

Una aplicación de la teoría fuzzy al análisis de la pobreza en Antioquia

Juan Guillermo Bedoya Ospina*

Juan Camilo Galvis Ciro**

Resumen

Este documento tiene como objetivo realizar una aplicación de la metodología fuzzy para el análisis de la pobreza en Antioquia. Para ello se utilizan las mismas dimensiones del índice de pobreza multidimensional del Gobierno colombiano y se realiza un contraste entre los resultados obtenidos con ambas metodologías. En términos de política pública, los resultados de la aplicación metodológica indican que la pertenencia al conjunto de los pobres está determinada por las condiciones de trabajo informal, el analfabetismo, el rezago escolar y condiciones de la vivienda.

Palabras claves: pobreza, teoría fuzzy, política pública.

Abstract

This paper applies the fuzzy methodology for the analysis of poverty in Antioquia. We use the same dimensions of multidimensional poverty index used by Colombian government and a contrast between the results obtained with both methods is done. The results indicate that membership to poverty set is determined by the conditions of informal labor, illiteracy, educational underachievement and housing conditions.

Keywords: poverty, fuzzy theory, public economics.

JEL Classification: I32, C02, H00.

Résumé

Le document vise à rendre une application de la méthode floue pour l'analyse de la pauvreté dans Antioquia. Pour ce faire les mêmes dimensions de l'indice de pauvreté multidimensionnelle utilisée par le gouvernement Colombien et un contraste entre les résultats obtenus avec les deux méthodes

Recibido: 15/04/2015

Aceptado: 09/07/2015

* Magister en Economía, Universidad de los Andes. Miembro grupo de investigación de microeconomía aplicada y teoría económica, Facultad de Ciencias Humanas y Económicas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. jg.bedoya10@uniandes.edu.co

** Estudiante de Doctorado en Economía, Universidade Federal Fluminense, Brasil. Miembro Grupo De Investigación de Microeconomía Aplicada y Teoría Económica, Facultad de Ciencias Humanas y Económicas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. jcgalvis@unal.edu.co

est fait. En termes de politique publique, les résultats de l'application méthodologique indiquent que l'appartenance à tous les pauvres est déterminée par les conditions de travail informelles, l'analphabétisme, l'échec scolaire et conditions de logement.

Mots clés: pauvreté, théorie fuzzy, économie publique.

Introducción

Los análisis de pobreza y calidad de vida vienen siendo ejecutados con entusiasmo en los últimos años a partir de la proclamación de los objetivos del milenio. De manera particular, la pobreza vista como una privación múltiple viene recibiendo gran atención en el campo de la investigación dado que suministra información crucial para el diseño e implementación de políticas públicas (Costa y De Angelis, 2008; Ángulo, Díaz y Pardo, 2011).

El enfoque multidimensional de la pobreza ha sido enriquecido vigorosamente con el enfoque de las capacidades de Sen (1976, 1993) y las propiedades axiomáticas propuestas para construir medidas consistentes de frente a un fenómeno tan importante para la sociedad. Con ello, se ha buscado también proponer alternativas a los análisis de la pobreza hechos desde las llamadas líneas de pobreza, debido a que existen críticas sobre las limitaciones en términos teóricos, empíricos y propositivos de dicho enfoque (Atkinson, 1987; Alkire y Foster, 2011).

A partir de la década de los años noventa viene ganando atención el llamado enfoque fuzzy de la pobreza, propuesto inicialmente por Cerioli y Zani (1990). En el enfoque fuzzy se asume que la pobreza no es un simple atributo conformado por características de los individuos en términos de presencia o de ausencia. En otras palabras, no se cae en la tentativa de clasificar los individuos entre pobres o no pobres. En lugar de ello, se supone que la pobreza y el bienestar de una persona son fenómenos de grados (Cheli y Lemmi, 1995).

Para analizar la pobreza, el enfoque fuzzy comienza por definirla como un conjunto borroso (fuzzy) al cual cada individuo tiene cierto grado de pertenencia. Generalmente la función de pertenencia al conjunto de los pobres es construida desde varios indicadores relacionados con la privación, por lo que el análisis fuzzy puede ser catalogado como un enfoque multidimensional (Betti, Cheli, Lemmi, Verma, 2006).

Considerando que el enfoque fuzzy de pobreza no ha sido utilizado en Colombia, el presente documento tiene como fin realizar una primera aplicación de dicha metodología para analizar la pobreza en Colombia. La unidad de análisis es la región de Antioquia y es utilizada la base de datos de la encuesta de calidad de vida 2012. La elección de Antioquia como unidad de análisis se debe a que es el departamento de Colombia que más ha reducido el índice multidimensional de pobreza en los últimos años. En conjunto con ello, varios municipios del departamento (incluyendo su capital, Medellín) se destacan por ocupar las

primeras posiciones en el ranking de desempeño fiscal en los últimos 15 años. Además, Antioquia puede ser catalogado como la zona del país más heterogénea en términos de calidad de vida lo que la convierte en un laboratorio social con grandes potenciales (Ramírez, Díaz y Bedoya, 2014).

El objetivo específico del presente documento es discutir la divergencia de resultados logrados a partir del enfoque fuzzy con relación a la metodología de pobreza multidimensional empleada actualmente por el Gobierno colombiano. Debido a que en Colombia el Departamento Nacional de Planeación y el Departamentos Administrativo Nacional de Estadística (DANE) vienen avanzando en la construcción y medición del llamado índice de pobreza multidimensional (IPM) basado en la metodología de Alkire y Foster (2011), el presente documento busca mostrar que la medida de pobreza oficial puede variar a partir de cómo se considera cada indicador, cuál es el valor a considerar como crítico en cada privación y cuál es el peso que tiene cada dimensión en el agregado.

Para tanto el documento está dividido como sigue. En la sección 1 se presentan las limitaciones del enfoque unidimensional de pobreza. En la sección 2, se presenta la teoría de conjuntos fuzzy. En la sección 3, se presenta la aplicación empírica para el caso colombiano. En la sección 4 están los resultados y, por último, se presentan las conclusiones.

1. El enfoque unidimensional de la pobreza: algunos comentarios sobre sus limitaciones

Existe una tradición económica de medir la pobreza con base en el consumo, construir líneas de pobreza a partir del costo de las necesidades estandarizadas en una comunidad, y considerar pobres a las personas (o familias) cuyo gasto no es suficiente para mantener un nivel de vida considerado mínimo.¹ Este enfoque de pobreza es el llamado enfoque monetario unidimensional debido a que el problema de la pobreza es considerado sólo desde la dimensión monetaria (Sen, 1976; Atkinson, 1987; Feres y Mancero, 2001).

En el enfoque unidimensional, las personas (o familias) se clasifican básicamente en dos categorías: pobres si la renta de la persona es igual o inferior a la línea de pobreza o no pobres si la renta del individuo es superior a la línea de pobreza. Así, éste enfoque puede catalogarse en una lógica binaria de dividir las personas entre pobres y no pobres, con la cual no es posible eliminar la arbitrariedad que subyace al hecho de que personas con rentas muy cercanas a la línea de pobreza sean tratados de igual forma a las personas con rentas muy alejados de la línea de pobreza. Es decir, al tiempo de que hace una dicotomía de la población se pierde información importante sobre el estado de bienestar de las personas ubicadas encima y debajo de la línea en tanto su condición es reducida a tener el calificativo de ser pobres o no (Betti, Cheli, Lemmi, Verma, 2006).

1 Las líneas de pobreza se miden tradicionalmente mediante gastos como una *proxy* del ingreso de las familias. El motivo se debe a que existen subvaloraciones significativas en los ingresos que revelan las familias en las encuestas.

Siguiendo a Giordani y Giorgio (2010), desde el punto de vista matemático el enfoque clásico unidimensional puede ser expresado como sigue. Sea X la distribución de una variable monetaria de un conjunto de personas (o familias) n . Sin pérdida de generalidad, asúmase que X denota la distribución de la renta medida en unidades monetarias. Sea x_i la renta (en unidades monetarias) de la persona i th con $i=1, \dots, n$. Suponga también que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

Desde la perspectiva del enfoque unidimensional el interés principal está centrado en evaluar cuando una persona (o familia) puede ser considerada como pobre o no pobre. En este sentido, el análisis clásico introduce una línea de pobreza, o medida del gasto mínimo necesario para suplir ciertas necesidades, la cual se denotará como x_p . Se supone entonces que una persona i -ésima es considerada pobre cuando $x_i \leq x_p$. En caso contrario la persona es considerada como no pobre.

En este contexto el enfoque unidimensional traza una dicotomía de la sociedad entre $\{0,1\}$ conforme la lógica aristotélica binaria de que una proposición tiene que ser falsa o verdadera. Consecuentemente con la fundamentación de éste tipo de lógica, se asume explícitamente el principio de no contradicción. Es decir, un enunciado no puede ser falso y verdadero al mismo tiempo. Además, se asume el principio del tercero excluido; un enunciado tiene que ser falso o verdadero, no se admite una tercera opción. El equivalente, en términos del análisis de pobreza, es entonces que una persona es pobre o es no pobre, cerrándose la discusión.

Detrás de la lógica aristotélica está la teoría de los conjuntos como base fundamental. En la teoría de conjuntos clásica se supone que existe un conjunto universo y subconjuntos asociados sobre los cuales se establecen axiomas y se derivan proposiciones. Por ejemplo, para un subconjunto A del universo U , la proposición de que el elemento $x \in A$ es verdadera o falsa desde que el subconjunto esté bien definido (Bloch, 2011).² Aplicada al estudio de la pobreza, la discusión no terminaría de forma clara pues claramente definir el conjunto de los pobres no es una cuestión ni trivial ni concluyente, ya que postular un conjunto económico no es algo directo y simple como la definición de conjuntos matemáticos.

Los límites del enfoque unidimensional de la pobreza pueden ser considerados de forma más precisa. Supóngase que existen dos individuos. La renta del individuo 1 es $x_1 = x_p - \epsilon$ y la renta del individuo 2 es $x_2 = x_p + \epsilon$, siendo ϵ una constante positiva (pero cercana a cero) y x_p la línea de pobreza. Considerando el enfoque unidimensional, el individuo 1 es clasificado como pobre en tanto el individuo 2 es clasificado no pobre. No obstante, desde el punto de vista práctico ambos individuos son aproximadamente pobres debido a que sus rentas están cercanas a la línea de pobreza y sólo están diferenciados por una constante que puede ser tan cercana a cero como sea posible. En otras palabras, no es razonable que cuando la renta de un individuo aumenta en una pequeña cantidad alguna unidad sea transferida del

2 No todas las proposiciones matemáticas encuadran bien en la lógica aristotélica. De las paradojas sin resolver en la lógica clásica está el hecho de que el llamado conjunto vacío admite varias proposiciones, como ser cerrado y abierto al mismo tiempo. Para más ver Bloch (2011).

status de ser pobre para el *status* de ser no pobre. Es precisamente sobre éste punto que subyace la discordia alrededor del enfoque unidimensional pues la división entre pobres y no pobres es débil (Giordani y Giorgio, 2010).

Las deficiencias del enfoque unidimensional muestran principalmente que un fenómeno social como la pobreza admite cierta vaguedad en su medición. No existe una línea clara y fina entre los pobres y no pobres, y la dicotomía de los individuos alrededor de la línea de pobreza admite un carácter difuso. Siendo así, es más deseable y práctico tratar la pobreza como un problema con diferentes niveles (Betti, Cheli, Lemmi, Verma, 2006).

En suma, la pobreza no se puede definir con criterios precisos porque no es fácil decidir cuando un individuo pertenece al conjunto de los pobres al ser este un conjunto difuso. Es decir, la pobreza es un problema que es mejor analizarlo como un problema de grados; todos los individuos están sujetos a pertenecer a una situación de pobreza pero con diferentes grados de pertenencia. Como consecuencia, es más deseable tratar la pobreza como un problema que no es de atributos, de ser pobre o no, y sí de grados, en tanto cualquier delimitación que se haga sobre lo que es ser pobre divide pero en diferentes niveles (Betti et al, 2006).

2. La teoría de conjuntos fuzzy: una alternativa al enfoque unidimensional

La lógica fuzzy (difusa o nebulosa) fue desarrollada por Zadeh (1965) y fue creada para tratar de dar un tratamiento matemático a términos que no son precisos. El objetivo de dicha lógica consiste en fortalecer la lógica matemática para el tratamiento de informaciones imprecisas y vagas, como por ejemplo, cuándo un elemento pertenece o no a un conjunto.³

Con base en Da Motta, Carvalho y Bassanezi (2005), la teoría fuzzy puede ser expresada como sigue. Un subconjunto fuzzy A de un universo U es definido en términos de una función de pertenencia μ que a cada elemento de $x \in U$ asocia un número $\mu(x)$ entre cero y uno, el cual es llamado grado de pertenencia de x a A . Un conjunto fuzzy A es definido entonces como:

$$A = \{[\mu_A(x), x]/x \in X\} \quad [1]$$

De esta manera el conjunto fuzzy A es simbólicamente caracterizado por su función de pertenencia $\mu_A: U \rightarrow [0, 1]$. Así $\mu_A(x)$ indica cuánto x es compatible con el conjunto A . En el caso que $\mu_A(x)=1$, se afirma que x pertenece totalmente al conjunto, o su grado de pertenencia es 100%. Por otra parte, cuando $\mu_A(x)=0$, x no pertenece al conjunto, o tiene un grado de pertenencia de 0%, siendo estos dos extremos semejantes a la lógica clásica. Por último, los otros elementos (la mayoría) reciben valores intermedios entre 0 y 1 y pertenecen al conjunto pero en diferentes rangos.

3 Un ejemplo de proposiciones matemáticas que tienen mejor respuesta en la teoría de conjuntos fuzzy son: el conjunto de los números próximos de 5, el conjunto de los números enteros cercanos de 0, el conjunto de los números reales en torno de 6.

A partir de lo anterior, la definición de un subconjunto fuzzy es entonces obtenida simplemente ampliando el rango de la función característica $[0,1]$ para el intervalo $[0,1]$. En este sentido, la lógica fuzzy puede ser entendida como una ampliación de la lógica binaria clásica a una lógica múltiple donde los principios de falso y verdadero son incluidos como resultados particulares. Por tanto, en cuanto al análisis de pobreza se refiere, la lógica fuzzy implica que cada individuo de una población tiene una propensión a la pobreza que está ubicado en un grado entre $[0,1]$ (Belhadj y Limam, 2012).

2.1. La teoría fuzzy aplicada al análisis del fenómeno de la pobreza

En este trabajo se utiliza la lógica fuzzy para analizar la pobreza desde un enfoque multidimensional. Es decir, se parte del hecho de que la pobreza es definida como un déficit en ciertos umbrales compuestos por dimensiones del bienestar. En esta dirección, se asume que el bienestar de una persona es una combinación de varias funcionalidades y el simple comando sobre un bien o servicio que garantiza la dimensión monetaria no determina la calidad de vida. En otras palabras, la pobreza es conceptualizada como constituida por la carencia de un vector de funcionalidades relacionadas directamente con las capacidades de las personas (Sen, 1993).⁴

Con el fin de contextualizar al lector en la teoría fuzzy, será desarrollada una descripción teórica de los conceptos a utilizar. Existen dos problemas principales a ser solucionados cuando se utiliza la teoría fuzzy al análisis de la pobreza. El primero es la elección de la función de pertenencia, o sea una especificación de la propensión a la pobreza de cada persona a partir de indicadores relacionados con su calidad de vida. Segundo, la elección de las reglas de intersección, complementos, unión y agregación de cada uno de los conjuntos (Betti, Cheli, Lemmi, Verma, 2006).

Con base en el enfoque de Cerioli y Zani (1990), Deutsch y Silber (2005) y Chakravarty (2006), se especifica el conjunto fuzzy de pobreza y se define la función de pertenencia al conjunto como sigue. Para un conjunto de n personas (o familias), la persona i th posee un vector de k indicadores denotados $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})$. Donde $x_i \in R_+^k$, siendo R_+^k el cuadrante no negativo del espacio k de dimensiones R^k . La coordenada j th del vector x_i especifica así la valoración del indicador (o atributo) j que tiene la persona i . Dichos indicadores son definidos de tal forma que están relacionados directamente al concepto de pobreza.

El vector x_i es a su vez la i th fila de una matriz $n \times k$ definida como $X \in M$, siendo M el conjunto de todas las matrices cuyas entradas son números reales no negativos, es decir, la sociedad. Así, la columna j de $X \in M$, brinda una distribución del atributo $j=1,2,\dots,k$ entre n personas.

4 El enfoque unidimensional de definir la pobreza con base en la dimensión monetaria puede verse como un caso particular del enfoque a tratar en éste documento. En cualquier caso, si se decide utilizar la lógica fuzzy para analizar la pobreza solamente con base en la dimensión monetaria, los individuos de la sociedad tendrían cada uno un grado de pobreza que está en el intervalo .

Existe una función de pertenencia sobre cada indicador j , siendo dicha función definida como $\mu_j: \mathbb{R}_+^1 \rightarrow [0,1]$. Donde $\mu_j(x_{ij})$ indica el grado de pertenencia de la persona i al conjunto de los pobres dado el valor x_{ij} . Sea $m=(m_1, \dots, m_k)$ el vector que especifica los valores mínimos de cada indicador (vector de necesidades mínimas o básicas). En este caso $m_j > 0$ es el valor del indicador (o atributo) j por encima del cual se considera que una persona i tiene un grado de pobreza mínimo en relación al indicador j . O sea, si $x_{ij} > m_j$ entonces la persona i tiene un grado de pobreza mínimo en el indicador j .

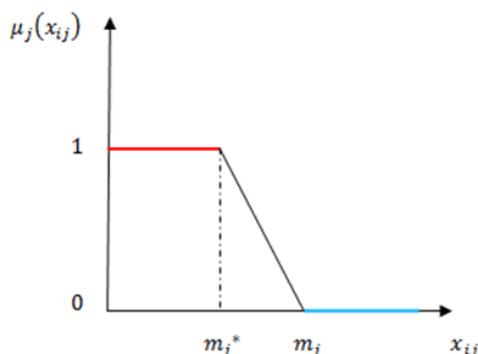
Dado lo anterior, la función de pertenencia $\mu_j(x_{ij})$ mide el grado de pobreza del indicador j de la persona i . Por tanto, $\mu_j(x_{ij})=0$ si $x_{ij} > m_j$. Como consecuencia, la pobreza es mínima si la cantidad del indicador j es mayor a m_j . Similarmente en el caso que $x_{ij}=0$ el grado de pobreza asociado con el indicador j de la persona i será máximo. O sea, $\mu_j(x_{ij})=1$. Por último, se supone que para incrementos en x_{ij} se presentan disminuciones lineales del grado de pobreza de la persona i en el indicador j . Dicho de otra forma, $\mu_j(x_{ij})$ es decreciente en el intervalo $(0, m_j)$. De esta manera la función fuzzy de pertenencia es definida como sigue:

$$\mu_j(x_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{ij} = 0 \\ \frac{m_j - x_{ij}}{m_j} & \text{si } x_{ij} \in (0, m_j) \\ 0 & \text{si } x_{ij} \geq m_j \end{cases} \quad [2]$$

La función anterior asume privación total cuando x_{ij} es cero y decrece linealmente entre $(0, m_j)$. No obstante, es posible considerar que una persona está privada desde cuando $x_{ij} > 0$. Por ejemplo, es necesario asumir que una persona necesita más de cinco años de estudio para considerarse que no es analfabeta. Para ese caso, se considera también otro tipo de función donde la privación surge a partir de un cierto mínimo m_j^* y decrece linealmente hasta cuando el indicador x_{ij} pasa un límite superior a m_j . En este caso la función de pertenencia es definida como sigue:

$$\mu_j(x_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{ij} < m_j^* \\ \frac{m_j - x_{ij}}{m_j - m_j^*} & \text{si } m_j^* \leq x_{ij} \leq m_j \\ 0 & \text{si } x_{ij} > m_j \end{cases} \quad [3]$$

Conforme Belhadj y Limam (2012), una figura que ilustra el comportamiento de la función de pertenencia es presentada en el gráfico 1. Con valores donde $x_{ij} < m_j^*$ la función de pertenencia asume un valor de 1. Luego, entre $m_j^* \leq x_{ij} \leq m_j$ la función decrece de forma lineal. Por último, a partir de $x_{ij} > m_j$ la función asigna un valor de 0. Es decir, a partir de este último valor se asume que el grado de pertenencia al conjunto de privación es mínimo. Como se puede observar, el aporte de la metodología fuzzy realmente tiene que ver con el tratamiento dado a los valores medios. En este intervalo se asume que una persona no pasa de la privación a la no privación de forma inmediata, y en vez de ello se encuentra en un problema de privación gradual.

Gráfico 1: Función de pertenencia para indicadores relacionados negativamente con la pobreza

Nota: elaboración propia a partir de Belhadj y Limam (2012).

Una amplia parte del problema de los análisis multidimensionales de pobreza tienen que ver con la fijación del límite de cada indicador, la valoración de m_j . A partir de la propuesta de Cheli e Lemmi (1995), en este documento se supone que m_j es determinado con base en la distribución estadística (la media estadística) que muestra cada indicador en la población. Así, implícitamente se asume que la pobreza es función del nivel de desenvolvimiento económico y las características socio-culturales e históricas de un espacio económico determinado.⁵

Una vez definida la función de pertenencia, el siguiente paso es agregar los diferentes indicadores que miden la pobreza y que conforman el índice multidimensional de pobreza fuzzy. Sea $\mu_j(x_{ij})$ el valor que toma la función de pertenencia para el indicador j del individuo i , y sea w_j el peso asignado al indicador j . La función de pertenencia total para el individuo i al conjunto de los pobres, definida como $\mu_p(i)$, está dada por:

$$\mu_p(i) = \sum_{j=1}^k w_j \mu_j(x_{ij}) \quad [4]$$

En relación al cálculo de los pesos para cada indicador, Cheli y Lemmi (1995) proponen una forma de elegir los pesos w_j con base en el comportamiento mismo de los indicadores, además de ser derivados de forma matemática para evitar problemas metodológicos. La propuesta es la siguiente:

$$w_j = \ln\left(\frac{1}{\mu_j(x_{ij})}\right) / \sum_{j=1}^k \ln\left(\frac{1}{\mu_j(x_{ij})}\right) \quad [5]$$

5 Se observa que necesariamente la definición de un límite, arbitrario o no, aparece en el análisis del enfoque fuzzy. La diferencia en este caso es que el límite de cada indicador para definir la privación es hecha a partir de los datos, y no es impuesta por el investigador.

Donde $\bar{\mu}_j(x_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_j(x_{ij})$. Es decir, w_j es una función inversa del grado de privación media de la población en relación a un indicador j . De esta forma, cuantas más personas tuvieran un valor de privación mayor, $\mu_j(x_{ij})$ cercano a 1, menor será el peso del indicador debido a que en ese caso el logaritmo natural de un número cercano a 1 tiende a cero.

Conforme puede concluirse, los pesos asignados a cada indicador establecen que cuando existe mayor grado de privación en relación a un indicador, menor será el peso asignado a dicho indicador. O sea, los pesos están basados en el grado de escasez relativa de una necesidad. Como resultado, cuando menor fuera la frecuencia de carencia en relación a un indicador (menor escasez), mayor será el peso que aquel indicador recibirá. Por ejemplo, caso todos los individuos tengan acceso al servicio de educación el peso asignado a educación será mayor y no tener acceso al servicio de educación será contabilizada con una mayor penalización en el índice de pobreza fuzzy. Conforme explica Berenger e Celestini (2006), la propuesta de Cheli y Lemmi (1995) propone que un peso mayor es asignado a bienes con mayor difusión en la sociedad. Por tanto, cuando mayor sea la propiedad de un bien, el hogar que no posee dicho bien será considerado privado.

Diversas críticas pueden ser hechas a esta forma de asignar los pesos. Por ejemplo, suponga el caso de acceso a agua potable. Si toda la población no tiene acceso a agua potable, la metodología citada asume que no tener agua potable no es una privación grave y el peso asignado a dicho atributo será bajo. Es evidente entonces que para los estándares de vida que se consideran dignos actualmente esto puede ser un problema. También está el deficiente de que los pesos cambiarían a cada año conforme mudan las condiciones económicas (Ángulo, Díaz, Pardo, 2011). Dado los problemas citados, en este documento se hicieron también cálculos asignándole un peso igual a cada atributo. Es decir, se calculó el índice fuzzy de pobreza asumiendo una importancia igual para cada dimensión.⁶

Una vez definidos los pesos de cada indicador, el último paso consiste en calcular la función de pobreza para toda la población. El grado de pobreza de toda la población $P(X;m)$ es definido como sigue:

$$P(X; m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_p(i) \quad [6]$$

Siguiendo a Sen (1976) y Chakravarty, Mukherjee, Ranada (1998) un índice multidimensional de pobreza $P(X;m)$ debe cumplir deseablemente con ciertos axiomas como monotocidad, simetría, transferencia, continuidad, no crecimiento de pobreza, no decrecimiento en el nivel mínimo de necesidades. El índice propuesto en el presente documento cumple con aquellos axiomas, conforme prueba Chakravarty (2006).

6 Conforme muestra Chakravarty (2006), el problema de seguir esta metodología es que el índice propuesto deja de cumplir todos los axiomas de los índices de pobreza (monotocidad o no decrecimiento, simetría, transferencia, etc.).

3. Aplicación empírica para el caso colombiano: Datos y metodología

Los datos utilizados en este documento provienen de la encuesta de calidad de vida realizada por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) para el año 2012. La región de análisis es la región Antioquia-Colombia, la cual contabiliza 9634 observaciones a personas que multiplicadas por el factor de expansión suman la población total, 6'243'956 personas. Del total de datos, el 57% corresponden al área urbana y el 43% al área rural.

Para calcular el índice fuzzy de pobreza, fueron utilizados 15 indicadores (o atributos) reunidos en 5 dimensiones, sobre los cuales se definieron las funciones de pertenencia. De esta forma, para cada persona i existen x_{ij} valores del indicador j , con $j=1,2,\dots,15$.

Los indicadores fueron elegidos siguiendo los indicadores postulados por Ángulo, Díaz y Pardo (2011) para construir el Índice de Pobreza Multidimensional (IPM) con el fin de realizar las comparaciones pertinentes. Conforme explican Ángulo, Díaz y Pardo (2011:14) los indicadores fueron seleccionados a partir de la revisión de las variables de uso frecuente en otros indicadores aplicados en Latinoamérica, la Constitución Política de Colombia, la revisión de la literatura sobre dimensiones y variables prioritarias de uso frecuente en los índices multidimensionales aplicados a Colombia, la relación directa con la política social del Gobierno Nacional, los estudios de voces de los pobres para Colombia, los umbrales definidos por los Objetivos de Desarrollo del Milenio, la disponibilidad de la información y la discusión con expertos.

Los indicadores fueron también agrupados en las mismas dimensiones propuestas por Ángulo, Díaz y Pardo, (2011). Las dimensiones utilizadas para calcular el índice son: condiciones educativas, trabajo, salud, servicios públicos y condiciones de vivienda, salud y condiciones de la niñez y la juventud.

Conforme los comentarios citados en la introducción, el objetivo del documento consiste en mostrar que existe un punto crítico en la metodología de pobreza del gobierno colombiano que está localizado en la forma en cómo se considera cada indicador y el peso que tiene en el agregado. Como será presentado más adelante, la metodología fuzzy aplicada aquí hace uso de funciones dicotómicas (valores de 0 o 1) para siete de los indicadores construidos para calcular el índice fuzzy de pobreza. De esos siete indicadores, cuatro indicadores corresponden a la dimensión *condiciones de la niñez y la juventud* donde, por la naturaleza de los indicadores considerados allí, sólo es posible postular funciones dicotómicas. Dado ello, la metodología aplicada puede verse como complementaria de la metodología del IPM en cuanto son utilizados los mismos indicadores, pero la mayoría de funciones de pertenencia no toman un valor dicotómico de 0 o 1.

De ahora en adelante, la metodología para construir el IPM propuesta por Ángulo, Díaz y Pardo (2011) la denotamos como IPM-DNP-DANE.

3.1. Dimensión condiciones educativas

En esta dimensión se consideran dos indicadores relacionados con los años de educación y con la condición de analfabetismo.

3.1.1. Logro educativo

El primer indicador utilizado es el indicador de logro educativo. Conforme la metodología IPM-DNP-DANE, una persona se considera privada si pertenece a un hogar donde la educación promedio de las personas mayores de 15 años es menor a 9 años de educación.

Con base en los datos utilizados, en Antioquia las personas mayores de 15 años tienen un nivel educativo promedio de 7.9 años. Considerando este dato como representativo de las condiciones educativas de la región, se considera una función de privación que tiene como límite inferior 7.9 años de educación. Es decir, un hogar será considerado con privación total si existe una persona mayor de 15 años con menos de 7.9 años de educación. A partir de este límite la privación decrece linealmente con los años de educación hasta un límite superior de 9 años de edad por ser este el límite fijado por la metodología IPM-DNP-DANE. Luego, un hogar donde las personas mayores de 15 años de educación tienen más de 9 años de educación son considerados sin privación. Así, la función de privación en el atributo logro educativo (x_1) es:

$$\mu_1(x_{i1}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x_{i1} < 7.9 \\ \frac{9-x_{i1}}{9-7.9} & \text{si } x_{i1} \in [7.9, 9) \\ 0 & \text{si } x_{i1} \geq 9 \end{array} \right\} \quad [7]$$

3.1.2. Dimensión analfabetismo

El segundo indicador utilizado es el indicador de analfabetismo. Conforme la metodología IPM-DNP-DANE una persona se considera privada si pertenece a un hogar en el que hay al menos una persona de 15 años y más que no sabe leer y escribir. Dadas las características del indicador, en este caso se consideró una función dicotómica para el atributo analfabetismo (x_2). Para esta situación se asignó un valor de 1 para el hogar donde existe al menos una persona de 15 años y más que no sabe leer y escribir. Caso contrario se asignó un valor de 0.

Una vez calculados los indicadores relacionados con el logro educativo y analfabetismo, se agregaron los indicadores en un solo indicador para esta dimensión. Los pesos asignados a cada sub-dimensión fueron de 1/2.

3.2. Dimensión trabajo

Una segunda dimensión considerada por la metodología IPM-DNP-DANE es la dimensión de trabajo. En esta dimensión se consideran dos indicadores. Uno relacionado con el desempleo de larga duración y el otro con el empleo formal.

3.2.1. Desempleo de larga duración

Un primer indicador considerado es el de desempleo de larga duración. Conforme la metodología IPM-DNP-DANE, una persona se considera privada si pertenece a un hogar que tiene al menos una persona de la población económicamente activa (PEA) desempleada por más de 12 meses.

Con base en los datos utilizados, en Antioquia una persona desempleada perteneciente a la población económicamente activa dura en promedio 5 meses desempleada. Considerando este dato como representativo de las dinámicas del mercado de trabajo en Antioquia, se considera una función de privación que tiene como límite superior 5 meses. Luego la privación crece para personas que llevan buscando trabajo entre 5 y 12 meses. El límite inferior de la función es 12 meses por ser este el límite fijado por la metodología IPM-DNP-DANE. En suma, una persona que lleva desempleada menos de 5 meses es considerada que no está privada. A partir de lo anterior, la función de privación en el atributo desempleo de larga duración () es:

$$\mu_3(x_{i3}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x_{i3} < 5 \\ \frac{x_{i3}-5}{12-5} & \text{si } x_{i3} \in [5,12) \\ 1 & \text{si } x_{i3} \geq 12 \end{array} \right\} \quad [8]$$

3.2.2. Empleo formal

El segundo indicador utilizado es el indicador de empleo formal. Conforme la metodología IPM-DNP-DANE una persona se considera privada si pertenece a un hogar que tiene al menos un ocupado que no tiene afiliación a pensiones o se encuentra en desempleo. Dado ello, se consideró una función dicotómica para el atributo empleo formal (x_4). En este caso una persona se considera privada si pertenece a un hogar en el que hay al menos un ocupado que no tiene afiliación a pensiones o se encuentra en desempleo. Para esta situación se asignó un valor de 1. Caso contrario se asignó un valor de 0.

Una vez calculados los dos indicadores de la dimensión trabajo, se agregaron los indicadores en un solo indicador. Los pesos asignados a cada sub-dimensión fueron de 1/2.

3.3. Dimensión servicios públicos y condiciones de la vivienda

Conforme la metodología IPM-DNP-DANE se consideran cinco indicadores relacionados con el acceso a las fuentes hídricas, servicios de acueducto, alcantarillado, material de construcción de la vivienda, paredes exteriores y cuartos por personas.

3.3.1. Acceso a fuente de agua mejorada

Con base en los datos utilizados, en Antioquia el 60% de las familias acceden al servicio de agua a través del servicio de acueducto. Por tanto, se considera que un individuo no está privado del servicio de acceso a fuentes de agua si tiene servicio de acueducto.

Las otras formas por las que acceden las familias al servicio de agua son en su orden: acueducto veredal o comunal, agua embotellada o en bolsa, agua lluvia, pozo con bomba, pozo sin bomba o jagüey, río, quebrada, manantial o nacimiento y otras fuentes. Con base en esta información, se asignó la siguiente escala de valores para construir la función de pertenencia en el atributo acceso a fuentes de aguas: si la familia tiene acueducto público se asignó un valor de 4, si tiene acueducto veredal o comunal se asignó un valor de 3, si consume agua embotellada o en bolsa se asignó un valor de 2, si tiene pozo con bomba se asignó un valor de 1, y se asignó un valor de 0 en los casos donde el acceso es a través de un pozo sin bomba o jagüey, río, quebrada, manantial o nacimiento y otras fuentes. De esta forma la función de pertenencia para el atributo (x_5) es:

$$\mu_5(x_{i5}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x_{i5} = 0 \\ \frac{4-x_{i5}}{4} & \text{si } x_{i5} \in (0,4) \\ 0 & \text{si } x_{i5} \geq 4 \end{array} \right\} \quad [9]$$

3.3.2. Servicio de eliminación de excretas:

Con base en los datos utilizados, en Antioquia el 59% de las familias cuenta con el servicio de eliminación de excretas a través de inodoros conectados a alcantarillados. Dado esto, se considera que un individuo no está privado del servicio de eliminación de excretas si cuenta con el servicio de inodoro conectado a alcantarillado.

Las otras formas a través de las cuales las familias eliminan las excretas son en su orden: inodoros conectados a pozos, inodoros sin conexión, letrinas, bajamar. También existe el caso de que simplemente la familia no cuenta con servicios sanitarios. A partir de esta información, se asignó la siguiente escala de valores para construir la función de pertenencia: si la familia tiene servicio de inodoro conectado a alcantarillado se asignó un valor de 2, si la familia tiene el servicio de inodoro conectado a pozo séptico se asignó un valor de 1. En los otros casos se asignó un valor de 0. De esta forma, la función de pertenencia para el atributo servicio de eliminación de excretas, (x_6), es:

$$\mu_6(x_{i6}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x_{i6} = 0 \\ \frac{2-x_{i6}}{2} & \text{si } x_{i6} \in (0,2) \\ 0 & \text{si } x_{i6} \geq 2 \end{array} \right\} \quad [10]$$

3.3.3. Material de construcción de las paredes exteriores

Con base en los datos utilizados, en Antioquia el 78% de las familias viven en una vivienda construida con paredes exteriores de ladrillo, bloque, piedra, material prefabricado o madera. Dado eso, se considerará que un individuo no está privado de una vivienda adecuada si tiene una vivienda con dichas características.

Los otros materiales de los que están hechos las paredes exteriores de las familias en Antioquia son: tapia pisada, adobe, bahareque revocado, bahareque sin revocar, guadua, caña, esterilla, madera burda, tablón. También existe el caso de viviendas construidas con zinc, tela, lona cartón, latas, desechos o plástico.

A partir de esta información, se asignó la siguiente escala de valores para construir la función de pertenencia. Se asignó un valor de 4 si la vivienda es de ladrillo, bloque, piedra, material prefabricado o madera, se asignó un valor de 3 si la vivienda es de tapia pisada o adobe, se asignó un valor de 2 si la vivienda es de bahareque revocado o sin revocar y se asignó un valor de 1 si la vivienda es de guadua, caña, esterilla, madera burda, tablón. Por último, se asignó un valor de 0 para los otros casos, o sea, para viviendas de zinc, tela, lona cartón, latas, desechos o plástico. De esta forma, la función de pertenencia para el atributo material de construcción de la vivienda, (x_7) , es:

$$\mu_7(x_{i7}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x_{i7} = 0 \\ \frac{4-x_{i7}}{4} & \text{si } x_{i7} \in (0,4) \\ 0 & \text{si } x_{i7} \geq 4 \end{array} \right\} \quad [11]$$

3.3.4. Pisos

Con base en los datos utilizados, en Antioquia el 43% de las familias viven en una vivienda con pisos de baldosa, vinilo, tableta o ladrillo. Dado eso, se considerará que un individuo no está privado de una vivienda con pisos adecuados si vive en una vivienda con las anteriores características.

Los otros materiales de los que están hechos los pisos de las viviendas de las familias en Antioquia son: cemento y gravilla (40%), tierra o arena (10%), madera burda (2.4%), mármol (2%), madera pulida e alfombra (0.01%). Teniendo en cuenta esta información y que la metodología del IPM-DNP-DANE considera que una persona está privada si pertenece a un hogar con pisos de tierra, se asignó la siguiente escala de valores para construir la función de pertenencia. Un valor de 3 si los pisos son de baldosa, vinilo, tableta o ladrillo, mármol, madera pulida e alfombra. Un valor de 2 si los pisos son de cemento y gravilla, y un valor de 1 si los pisos son madera burda. Por último, se asignó un valor de 0 si los pisos son de tierra o arena. De esta forma, la función de pertenencia para el atributo pisos de la vivienda, (x_7) , es:

$$\mu_8(x_{i8}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x_{i8} = 0 \\ \frac{3-x_{i8}}{3} & \text{si } x_{i8} \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x_{i8} \geq 3 \end{array} \right\} \quad [12]$$

3.3.5. Cuartos por persona

Con base en los datos utilizados, en Antioquia existen en promedio 2.17 personas por cuarto.⁷ La metodología IPM-DNP-DANE considera que una persona está privada si pertenece a un hogar donde hay 3 o más personas por cuarto. Dado ello, se supone como límite superior de la función de privación 3 personas por cuarto. Como límite inferior, es considerado el dato representativo de las condiciones promedios de la vivienda en Antioquia, es decir, 2.17 per-

7 Es necesario aclarar que este número de personas por cuarto adquiere sentido sólo para la construcción del indicador.

sonas por cuarto. A partir de allí la función crece linealmente hasta 3 personas por cuarto. De esta forma la función de pertenencia en el atributo es:

$$\mu_9(x_{i9}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x_{i9} \leq 2.17 \\ \frac{x_{i9}-2.17}{3-2.17} & \text{si } x_{i9} \in (2.17,3) \\ 1 & \text{si } x_{i9} \geq 3 \end{array} \right\} \quad [13]$$

Una vez calculados los indicadores relacionados con servicios públicos y condiciones de la vivienda, se agregaron todos los indicadores en un solo indicador para esta dimensión. Los pesos asignados a cada sub-dimensión fueron de 1/5.

3.4. Dimensión salud

En esta dimensión se consideran dos indicadores relacionados con servicio de salud dada una necesidad y aseguramiento en salud.

3.4.1. Servicio de salud dada una enfermedad

En esta dimensión la metodología IPM-DNP-DANE postula un indicador relacionado con servicio de salud caso un hogar registrara una enfermedad en los últimos 30 días. Con base en datos de la encuesta de calidad de vida año 2012, en Antioquia, 755 personas se enfermaron en los últimos 30 días. De esas, personas el 72% acudieron a una entidad prestadora de salud. A partir de esta información, se considera que un individuo no está privado del servicio de salud si tuvo acceso a una entidad prestadora de salud, o si no registró alguna enfermedad en los últimos 30 días y está afiliado al sistema de salud.

A partir de los datos, las otras formas en que las familias solucionan sus problemas de salud son: acudiendo a un médico general u otro especialista de forma particular, acudiendo a un boticario o farmaceuta, auto recetándose, usando remedios caseros o no haciendo nada. Dado ello, se asignó la siguiente escala de valores para construir la función de pertenencia: se asignó un valor de 4 si la persona tuvo acceso una entidad prestadora de salud o no registró enfermedades y está afiliado a algún sistema de salud. Un valor de 3 si asistió a un médico general u otro especialista de forma particular. Un valor de 2 si asistió a un boticario o farmaceuta y un valor de 1 si se auto recetó o uso remedios caseros. En el caso que el individuo no hizo nada se asignó un valor de cero. También se asignó un valor de cero en el caso en el que individuo no se enfermó en los últimos 30 días y al mismo tiempo no está afiliado a ningún sistema de salud. Dado eso, la función de pertenencia para el atributo salud, (x_8), es:

$$\mu_{10}(x_{i10}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x_{i10} = 0 \\ \frac{4-x_{i10}}{4} & \text{si } x_{i10} \in (0,4) \\ 0 & \text{si } x_{i10} \geq 4 \end{array} \right\} \quad [14]$$

3.4.2. Aseguramiento en salud

Siguiendo la metodología empleada en el índice de pobreza multidimensional en este caso se consideró una función dicotómica para el atributo de aseguramiento en salud (x_{11}). En este caso una persona se considera privada si pertenece a un hogar que tiene al menos a alguien mayor de 5 años que no se encuentre asegurada en salud. Para dicha situación se asignó un valor de 1. Caso contrario se asignó un valor de 0.

Una vez calculados los indicadores relacionados con salud se agregaron los indicadores en un solo indicador para esta dimensión. Los pesos asignados a cada sub-dimensión fueron de 1/2.

3.5. Dimensión condiciones de la niñez y juventud

En esta dimensión se consideran 2 indicadores: servicios a cuidados de la primera infancia y rezago escolar.

3.5.1. Cuidados de la primera infancia

Conforme la metodología IPM-DNP-DANE una persona se considera privada si pertenece a un hogar que tiene al menos un niño de 0 a 5 años sin acceso a todos los servicios de cuidado integral (salud, nutrición y cuidado). Dado ello, se consideró una función dicotómica para el atributo de acceso al servicio de cuidados de la primera infancia (x_{12}). Se asignó un valor de 1 cuando un hogar tiene al menos un niño de 0 a 5 años sin acceso a todos los servicios de cuidado integral (salud, nutrición y cuidado). Caso contrario se asignó un valor de 0.

3.5.2. Rezago escolar

Conforme la metodología IPM-DNP-DANE una persona se considera privada si pertenece a un hogar en que al menos hay un niño entre 7 y 17 años con rezago escolar (número de años aprobados inferior a la norma nacional). Dado ello, se consideró una función dicotómica para el atributo de rezago escolar (x_{13}). Se asignó un valor de 1 cuando en un hogar al menos un niño entre 7 y 17 años tiene rezago escolar (número de años aprobados inferior a la norma nacional). Para dicha situación se asignó un valor de 1. Caso contrario se asignó un valor de 0.

3.5.3. Trabajo infantil

Conforme la metodología IPM-DNP-DANE una persona se considera privada si pertenece a un hogar que tiene al menos un niño entre 12 y 17 años trabajando. Dado ello se consideró una función dicotómica para el atributo de trabajo infantil (x_{14}). En este caso una persona se considera privada si pertenece a un hogar en que al menos hay un niño entre 12 y 17 años trabajando. Para dicha situación se asignó un valor de 1. Caso contrario se asignó un valor de 0.

3.5.4. Asistencia escolar

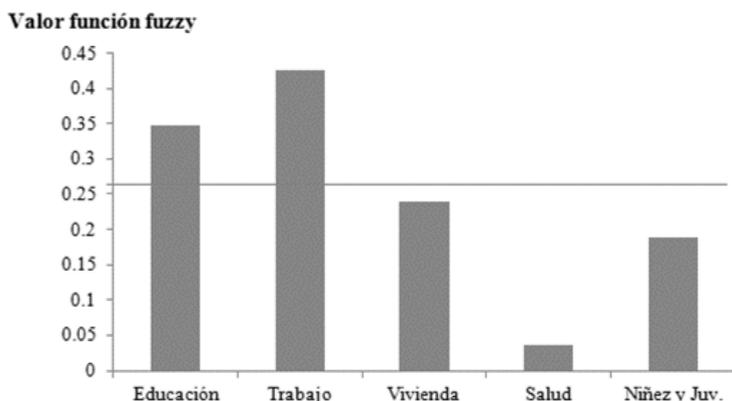
Conforme la metodología IPM-DNP-DANE una persona se considera privada si pertenece a un hogar que tiene al menos un niño entre 6 y 16 años que no asiste a una institución educativa. Dado ello se consideró una función dicotómica para el atributo de inasistencia escolar (x_{15}). En este caso una persona se considera privada si pertenece a un hogar en que al menos hay un niño entre 6 y 16 años que no asiste a una institución educativa. Para dicha situación se asignó un valor de 1. Caso contrario se asignó un valor de 0.

Una vez calculados los indicadores relacionados con primera infancia se agregaron los indicadores en un solo indicador para esta dimensión. Los pesos asignados a cada sub-dimensión fueron de 1/4.

4. Resultados

Inicialmente, se analiza el promedio del valor de la función de pertenencia para cada indicador. En el gráfico 2 es presentado el valor promedio de la función fuzzy para cada dimensión. El mayor valor de la función de privación se da en la dimensión de condiciones de trabajo (0.34) y el menor valor se da en el área de salud con 0.03. En promedio, el valor de la función de privación en Antioquia es de 0.24. Dado que en salud y condiciones de niñez existen privaciones generales en todo el departamento, la función fuzzy termina asignando un valor menor en estos indicadores. En este sentido, y en relación con la metodología IPM-DNP-DANE, la metodología fuzzy presenta una debilidad dado que los pesos asignados a la importante dimensión de salud y niñez serán relativamente bajos por construcción teórica conforme se observará más adelante.

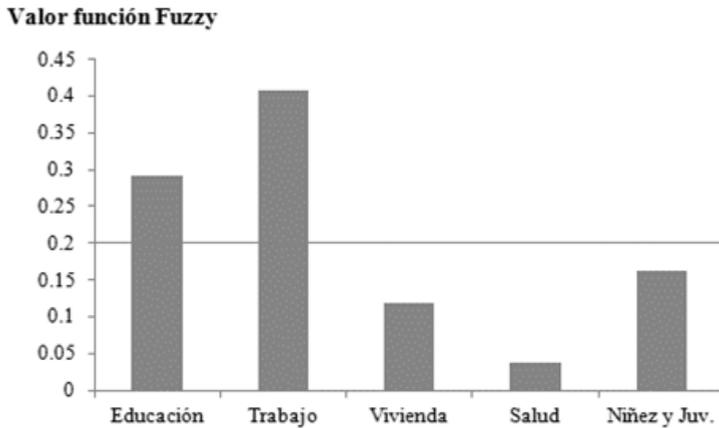
Gráfico 2: Valor promedio de la función fuzzy de pertenencia en cada dimensión para Antioquia



Nota: Cálculos propios a partir de datos de la Encuesta de Calidad de Vida – DANE 2012. La línea horizontal indica el valor total calculado de la función fuzzy agregada en Antioquia.

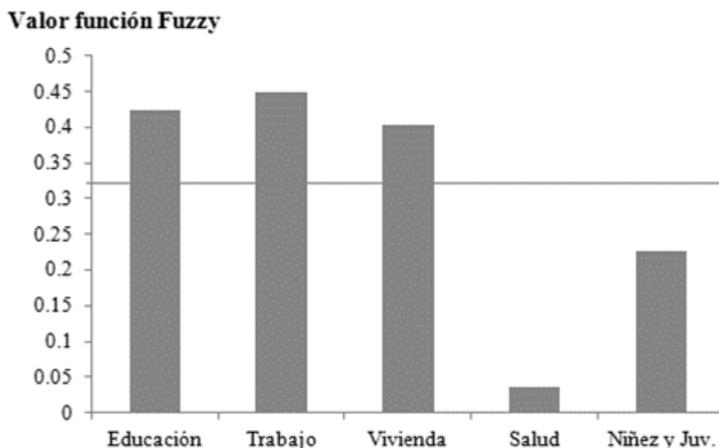
Dado que la base de datos utilizados facilita discriminar por zonas, es hecho el mismo ejercicio anterior desagregando entre la zona urbana y rural de Antioquia para obtener una mejor idea de los cálculos hechos.

Gráfico 3: Valor promedio de la función fuzzy de pertenencia en cada dimensión para Zona Urbana



Nota: Cálculos propios a partir de datos de la Encuesta de Calidad de Vida – DANE 2012. La línea horizontal indica el valor total calculado de la función fuzzy agregada en la región.

Gráfico 4: Valor promedio de la función fuzzy de pertenencia en cada dimensión para Zona rural

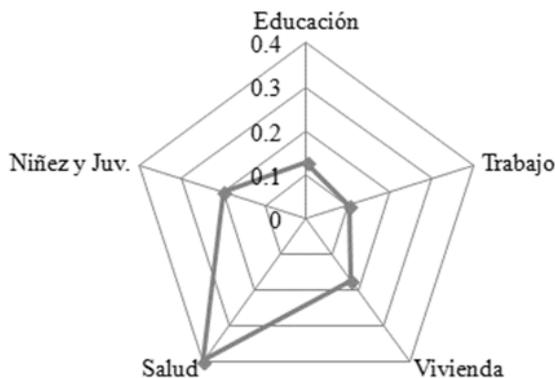


Nota: Cálculos propios a partir de datos de la Encuesta de Calidad de Vida – DANE 2012. La línea indica el valor total calculado de la función fuzzy en la región.

Algunas diferencias importantes y significativas entre las zonas se deben destacar. Según se observa en los gráficos, existen menos problemas de privación en los servicios de vivienda en la zona urbana en relación a la zona rural. En la zona urbana, el mayor valor de la función de privación se alcanza en la dimensión trabajo (0.4) y el menor valor en la dimensión de salud (0.03). En promedio, el valor de la función de privación en la zona urbana es de 0.20. En contraste, el valor de la función de privación es de 0.30 en la zona rural. Además, el mayor valor de la función de privación se alcanza en la dimensión de trabajo (0.44), seguido de cerca por educación (0.42) y vivienda (0.40). Como resultado de las diferencias en los valores de los indicadores, los pesos asignados en cada zona son diferentes y el valor de la función fuzzy reflejará la diferencia.

Con fines ilustrativos, son presentados los resultados del cálculo de los pesos realizados conforme la ecuación [5] con el objetivo de calcular el índice de fuzzy de pobreza agregado. A partir de los resultados observados antes para el valor promedio de las funciones en cada dimensión (gráfico 2), la ecuación [5] asignó un peso inverso conforme el grado de privación. Dado ello, la dimensión de trabajo recibió el menor peso (0.10), seguida de educación (0.12), vivienda (0.17), condiciones de la niñez (0.2). El mayor peso fue asignado a la dimensión de salud (0.39).

Gráfico 5: Valor de los pesos para cada dimensión (región completa)



Nota: Cálculos propios a partir de datos de la Encuesta de Calidad de Vida – DANE 2012.

Se presenta a continuación los valores calculados para la función fuzzy total. Los cálculos del índice fuzzy con base en los pesos del gráfico 5 son denotados por Fuzzy (1). También se realizaron los cálculos del índice fuzzy de pobreza asignándole a cada dimensión un peso de 1/5. En este caso los cálculos son denotados por Fuzzy (2). Para contrastar los resultados con la metodología oficial del gobierno colombiano, son presentados también los resultados de la metodología IPM-DNP-DANE para el año 2012. Los resultados para la región completa y desagregando por zona urbana y rural son presentados en la tabla 1.

Tabla 1: Índice Fuzzy de pobreza para Antioquia

Metodología	Fuzzy (1)	Fuzzy (2)	IPM-DNP-DANE
Antioquia	0.181	0.247	0.264
Zona Urbana	0.146	0.203	0.226
Zona Rural	0.228	0.307	0.315

Nota: Cálculos propios a partir de datos de la Encuesta de Calidad de Vida – DANE 2012.

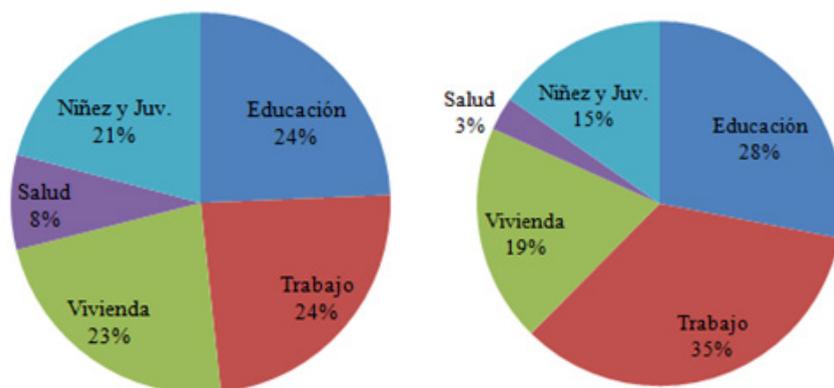
Según los resultados, la asignación de pesos para cada dimensión no es neutral en el resultado final del índice fuzzy. Considerando los pesos asignados a partir de la construcción teórica, los resultados indican que el índice fuzzy de pobreza para una persona en Antioquia es de 0.181, siendo mayor el valor del índice de pobreza en la zona rural que en la zona urbana. Dicho de otra forma, en promedio una persona en Antioquia pertenece al conjunto de los pobres con un grado de 18.1%

Dado que en el índice de pobreza de la metodología IPM-DNP-DANE los pesos son asignados de forma proporcional, o de 1/5 para cada dimensión, es más adecuado comparar los resultados encontrados con el índice Fuzzy (2) con respecto a los resultados de la metodología IPM-DNP-DANE. En este caso, se encuentra que el índice Fuzzy arroja una diferencia de dos puntos porcentuales menos.

Conforme se trató de mostrar en la explicación metodológica de la teoría utilizada, los resultados son explicados por la forma en que es construido el índice con la metodología IPM-DNP-DANE ya que dicho índice siempre asume valores de 0 y 1 en cada indicador y, como consecuencia, arroja valores más altos para cada función de pertenencia. Dicho de otra forma, al momento de construir el valor de cada indicador hay un paso crítico cuando se define el límite de cada privación.

Debido a que el enfoque fuzzy establece una privación que es decreciente en relación al límite, cuando se calcula cada indicador existen valores intermedios y como resultado el valor del indicador en cada dimensión termina siendo menor. En otras palabras, el enfoque fuzzy muestra que la definición del límite de cada indicador, junto con el peso de cada dimensión, es relevante en el resultado final, tanto para la metodología IPM-DNP-DANE como para la metodología Fuzzy.

Es presentado ahora el porcentaje en que contribuye cada dimensión en el cálculo del índice fuzzy (ver gráfico 6). En la izquierda es presentada la contribución en el índice Fuzzy (1) y en la derecha es presentada la contribución de cada dimensión en el índice Fuzzy (2).

Gráfico 6: Contribución de cada dimensión al índice Fuzzy de pobreza

Nota: Cálculos propios a partir de datos de la Encuesta de Calidad de Vida – DANE 2012.

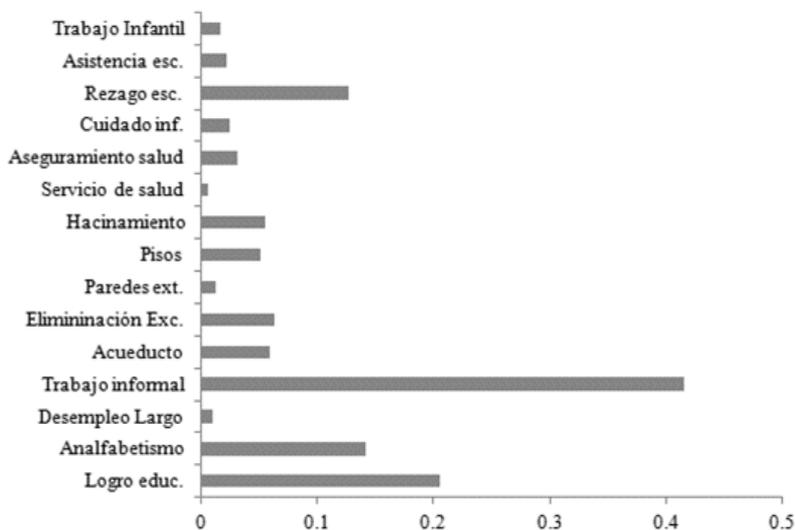
Conforme los resultados, la dimensión que más contribuye en el valor del índice de pobreza fuzzy en ambos casos es la dimensión de trabajo, seguida de la dimensión de educación, vivienda, condiciones de la niñez y salud. O sea, independiente del peso asignado a cada indicador el perfil de la pobreza en Antioquia termino siendo similar. En términos prácticos los resultados indican que para disminuir el perfil de la pobreza en Antioquia se deben mejorar las condiciones de trabajo y educación.

Por último, es presentado abajo el valor promedio que asumió la función de pertenencia en cada indicador. Con base en el gráfico 7, entre los indicadores que componen el índice de pobreza fuzzy, los mayores valores registrados fueron en el indicador de trabajo informal, seguido de logro educativo, analfabetismo y rezago escolar. Los menores valores fueron alcanzados en servicio de salud, desempleo de larga duración y paredes exteriores de la vivienda.⁸

Dado que en Colombia no existen documentos que hayan aplicado la metodología fuzzy al análisis de la pobreza, para fines comparativos de los resultados obtenidos se citan algunos resultados de la literatura empírica desarrollada en diferentes países. Costa y De Angelis (2008) utilizan 11 indicadores de privación para analizar la pobreza en Italia. Encuentran que los principales factores asociados a la pobreza son la educación, la actividad del jefe del hogar y la residencia. Para 2006 calculan un índice fuzzy de pobreza de 0.129.

Para el caso de América Latina, Ottonelli y Mariano (2014) analizan la pobreza en la región nordeste de Brasil (la región más pobre de este país). Para ello, hacen uso de 19 indicadores y cuatro dimensiones. Sus resultados muestran que la pobreza está altamente relacio-

8 Resultados similares encuentran Ángulo, Díaz y Pardo (2011).

Gráfico 7: Valor promedio de la función de pertenencia por indicador

Nota: Cálculos propios a partir de datos de la Encuesta de Calidad de Vida – DANE 2012.

nada con los problemas de renta y educación. A 2010 calculan índices de pobreza fuzzy encima de 0.50.

Por último, Belhadj y Limam (2012) analizan la pobreza en Túnez con datos de los años 1990. Los resultados indican que el índice fuzzy de pobreza es de 0.074 y que la pobreza en Túnez es marcadamente un fenómeno rural.

5. Conclusiones

En el presente documento se realizó una aplicación de la metodología Fuzzy para el análisis de la pobreza en Antioquia. Se eligieron los mismo indicadores postulados por Ángulo, Díaz y Pardo (2011) para construir el Índice de Pobreza Multidimensional (IPM) en Colombia con el objetivo particular de verificar la forma en que metodología Fuzzy altera los resultados de la medición de la pobreza.

Los resultados indican que, a pesar de utilizar los mismos indicadores de la metodología IPM-DNP-DANE, el valor total del índice fuzzy de pobreza resulta ser menor. Las causas están concentradas en la forma en que se considera la privación en cada indicador utilizado. La metodología IPM-DNP-DANE es más severa dado que todos los indicadores se construyen sobre la lógica de “cumplir o no cumplir”, mientras en el caso de la metodología Fuzzy

se asume la pobreza como un problema de grados y la privación decrece linealmente con relación al límite elegido en cada indicador.

Más allá de que el resultado sea menor en el caso Fuzzy, queda evidenciado que la metodología del gobierno colombiano debe ser monitoreada cuidadosamente en su aplicación temporal dado que cambios en el límite de privación de cada indicador, y en el peso de cada dimensión, pueden traer resultados significativamente diferentes.

A pesar de las diferencias en la construcción de la metodología, los resultados convergen en el resultado final. Principalmente el trabajo informal, el analfabetismo, el rezago escolar y en menor medida algunas condiciones de la vivienda se encuentran como fundamentales al momento de determinar quienes están en mayor grado de privación en Antioquia.

Debido a que muy posiblemente cada dimensión asociada a la pobreza están relacionadas y exista interacción entre ellas, es necesario considerar la agregación de cada indicador considerado intersecciones. En ese tema en específico, los trabajos de Belhadj y Limam (2012), Berenger y Celestini (2006) y Betti, Cheli, Lemmi, Verma (2006) han arrojado resultados importantes dado que muestran que el grado final de privación es afectado por la forma en que se realiza la agregación.

Referencias bibliográficas

- Alkire, S., Foster, J. (2011). Counting and Multidimensional Poverty Measurement. *Journal of public economics*, 476-487.
- Ángulo, R.C., Díaz, Y., Pardo, R. (2011). Índice de Pobreza Multidimensional para Colombia (IPM-Colombia) 1997-2010. *Archivos de Economía*, (382). Departamento Nacional de Planeación, 1-56.
- Atkinson, A.B. (1987). On the Measurement of Poverty. *Econometrica*, 55 (4), 749-764.
- Belhadj, B., Mohamed, Limam. (2012). Unidimensional and multidimensional fuzzy poverty measures: New approach. *Economic Modelling*, 29, 995-1002.
- Berenger, V., Celestini, F. (2006). French Poverty Measures using Fuzzy Set Approaches. En: *Economic Studies in Inequality, Social Exclusion and Well-Being*, vol. 3, 139-153.
- Betti, G., Cheli, B., Lemmi, A., Verma, V. (2006). Multidimensional and longitudinal poverty: an integrated fuzzy approach, fuzzy set approach to multidimensional poverty measurement. En: *Economic Studies in Inequality, Social Exclusion and Well-Being*, vol. 3, 115-137.
- Bloch, E. (2011). *Proofs and Fundamentals: A First Course in Abstract Mathematics*. Editorial Springer, New York, p. 384.
- Cerioli, A., Zani, S. (1990). A fuzzy approach to the measurement of poverty. In: Dagum, C., Zenga, M. (Eds.), *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty, Studies in Contemporary Economics*. Springer Verlag, Berlin, pp. 272-284.

- Chakravarty, S. (2006). An Axiomatic Approach to Multidimensional Poverty Measurement via Fuzzy Sets. En: *Economic Studies in Inequality, Social Exclusion and Well-Being*, vol. 3, 115–137.
- Chakravarty, S.R., Mukherjee, D., Renade, R.R., (1998). On the Family of Subgroup and Factor Decomposable Measures of Multidimensional Poverty. *Research on Economic Inequality*, 8, 175-194.
- Cheli, B., Lemmi, A. (1995). Totally fuzzy and relative approach to the multidimensional analysis of poverty. *Economic Notes*, 24, 115–134.
- Costa, M., De Angelis L. (2008). The multidimensional measurement of poverty fuzzy set approach. *Statistica*, 68 (3-4), 303-319.
- Da Motta, Rosana. Carvalho, Laécio y Bassanezi, Rodney. (2005). Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações. *Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional*, No. 17. p.81.
- Deutsch, J., Silber, J. (2005). Measuring multidimensional poverty: an empirical comparison of various approaches. *Review of Income and wealth*, 51 (1), 145-174.
- Feres, Juan C., Mancero, X. (2001). Enfoques para la medición de la pobreza. Breve revisión de la literatura. CEPAL, Chile.
- Giordani, P., Giorgi, G. (2010). A fuzzy logic approach to poverty analysis based on the Gini and Bonferroni inequality indices. *Stat Methods appl.*, 19, 587-607.
- Ottonelli, J., Mariano, J.L. (2014). Pobreza multidimensional nos municípios da Região Nordeste. *Revista de Adm. Pública*, 48 (5), 1253-1279.
- Ramírez, M., Díaz, Y., Bedoya, J.G. (2014). Decentralization in Colombia: Searching for social equity in a bumpy economic geography. Working Papers 337, ECINEQ, Society for the Study of Economic Inequality.
- *Convergencia social en Colombia: el rol de la geografía económica y de la descentralización*. Fedesarrollo, Bogotá. 88p.
- Sen, A. K. (1993). Capability and Well-Being. In: Nussbaum, M., Sen, A.K. (Eds.), *Quality of Life*. Clarendon Press, Oxford, 30-53.
- Sen, A. K. (1976). Poverty: An Ordinal Approach to Measurement. *Econometrica*. 44, 219-231.
- Zadeh, L. (1965). Probability theory and fuzzy logic are complementary rather than competitive. *Technometrics*, 37, 271–276.