

Desarrollo de modelos matemáticos para la evolución de la temperatura en hornos eléctricos mediante balances de materia y energía

Recibido para evaluación: 16 de Feb de 2005
 Aceptación: 18 de Nov de 2005
 Entrega de versión final: 01 de Dic de 2005

H. V. Martínez¹
 C. M. Sierra²
 F. Chejne²
 W. F. Flórez³

RESUMEN

Este paper reporta modelos teóricos para predecir la evolución de la temperatura en procesos metalúrgicos que impliquen calentamiento o tratamientos térmicos de materiales metálicos en hornos eléctricos. Se expone un modelo para el calentamiento de metales en hornos estacionarios (MHE) y en un segundo caso, un modelo dinámico para el calentamiento y enfriamiento de barras de acero en hornos continuos (MHC). El modelo MHE consiste de un sistema algebraico de ecuaciones diferenciales no lineales el cual se soluciona utilizando el método numérico Petzold-Gear mientras que las ecuaciones diferenciales en el modelo MHC se resuelven mediante diferencias finitas. Los resultados teóricos a partir de las simulaciones matemáticas muestran una buena concordancia con la física del problema y los modelos propuestos.

PALABRAS CLAVES: Diseño térmico, hornos eléctricos estacionarios y continuos, simulación numérica

ABSTRACT

This paper reports theoretical models to predict the temperature evolution in metallurgical processes that imply heating or metals heat treatments in electrical furnaces. A mathematical model for metal heating in stationary furnaces (MHE) and a dynamic model for heating and cooling of steel bars in continuous furnaces (MHC) are exposed. The MHE consist in an algebraic system of nonlinear differential equations which are solved by the Petzold-Gear numerical method, whereas the differential equations system in the MHC model is solved by finite differences. The theoretical results from the mathematical simulations show a good agreement with the physics of the problem and with the proposed models.

KEYWORDS: Thermal design, stationary and continuous electrical furnaces, numerical simulation

¹ GINUMA, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín. Contacto: UPB: Circ. 1^a. 70-01. B. 09, CIDI. A. A. 56006, Medellín, Colombia
 E-mail: hadervm@upb.edu.co

² Instituto de Energía, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, A. A. 568, Medellín, Colombia.

³ IET: Instituto de Energía, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín

1. INTRODUCCIÓN

Muchos procesos metalúrgicos y de producción de materiales utilizan hornos eléctricos, éstos pueden ser del tipo discontinuo o continuo; los del primer tipo incluyen los hornos de caja, hornos elevadores, hornos de base corrediza y hornos de campana; los del segundo tipo incluyen los hornos de banda transportadora, hornos de transportador de cadena, hornos de hogar rotatorio y hornos de hogar de rodillos [1]. En general, los hornos estándar de resistencias están diseñados para operar a temperaturas en el rango de 550 a 1200°C y suelen presentar una precisión suficiente para controlar el flujo de calor y su distribución. Este flujo de calor es independiente de la naturaleza de los gases que rodean la carga, de modo que la atmósfera puede elegirse a voluntad de acuerdo con la naturaleza de la carga y la química del proceso térmico. Dicha libertad suele ser en muchos casos la principal razón para seleccionar el calentamiento generado eléctricamente. Otra ventaja se relaciona con la temperatura máxima de operación, la cual está limitada únicamente por la naturaleza del material que se procesa, permitiendo así la producción de ciertos materiales que no pueden obtenerse de otra forma.

En este paper se reportan dos modelos, el primero aplicable al calentamiento en hornos estacionarios de caja (MHE). El segundo modelo, es un modelo dinámico para el calentamiento y enfriamiento de materiales en hornos continuos de banda transportadora (MHC). El balance de energía en el primer caso considera una cámara de calentamiento estándar conformada por un recinto con revestimiento refractario y una capa circundante de aislamiento térmico, las ecuaciones de balance permiten predecir la evolución de las temperaturas en estado transitorio para el material y a través de las paredes del horno, de manera que se permita el cambio de dimensiones para un diseño térmico apropiado. Para el caso correspondiente al calentamiento en hornos continuos, se asume una cámara de entrada, una zona de calentamiento y finalmente una zona de enfriamiento. El modelo se centra en la predicción de temperaturas en estado transitorio a lo largo de la carga, así es posible predecir el tiempo y la posición para una temperatura particular, por ejemplo, para la realización de tratamientos térmicos.

2. Análisis térmico del proceso de calentamiento en hornos eléctricos estacionarios

La fig. 1 ilustra el sistema de análisis correspondiente a un horno de caja. Para un sistema como el ilustrado es posible realizar balances de energía para las siguientes masas de control: conductor eléctrico, pared refractaria, pared aislante, carga, gas alrededor del conductor eléctrico y gas sobre la carga. La ecuación general de balance de energía es ilustrada en (1).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\iiint e \rho dV \right]_{vc} + \left[\iiint (e + P_v) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \right]_{vc} = \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} \quad (1)$$

2.1. Balance por componentes

La ecuación (2) ilustra el balance de energía para la resistencia eléctrica (fig. 2a) derivada de la ecuación genérica (1). En dicha ecuación a, b y c son constantes dependientes del factor de forma seleccionado para la radiación. En el caso de considerar una pared plana irradiada por un conductor eléctrico, cilíndrico de longitud L, el factor de forma para la radiación entre dos cuerpos se asume en este caso como $\frac{1}{2}$ [2].

$$\frac{dT_1}{dt} = -bT_1 - 2cT_1^4 + cT_3^4 + cT_2^4 + bT_{43} + a \quad (2)$$

Por otro lado, en el caso de un horno que precise de un contenedor para la carga (v.g. crisol refractario), el valor del número de Biot, Bi ($Bi =$ resistencia interna del contenedor a la conducción de calor/ resistencia externa del contenedor a la conducción de calor), permite decidir si es o no posible despreciar la conducción a través de la pared del contenedor. En el caso de Bi suficientemente pequeño, es posible despreciar los gradientes térmicos internos y considerar la temperatura superficial del contenedor igual a la temperatura del material dentro del mismo. En tal sentido, una ecuación de balance de energía para la carga (fig. 2b), incluirá solamente una interacción de calor por convección entre la superficie de la carga y el gas circundante así como un intercambio de calor por radiación proveniente del conductor eléctrico y que es además captada por la superficie del refractario y por el contenedor de carga. La ecuación general de balance para la carga es mostrada en (3), donde d , e , h y k_4 son constantes.

$$\frac{dT_2}{dt} = dT_1^4 - eT_2 + eT_{44} + hT_3^4 - k_4T_2 \quad (3)$$

Una práctica común es no considerar almacenamiento de energía en la superficie refractaria (fig. 2c). Para tal caso, la ecuación de balance (4), puede ser discretizada en el espacio, tal como se ilustra en (5).

$$\frac{\partial T}{\partial x} = r(T_3^4 - T_1^4) - w(T_3^4 - T_2^4) \quad (4)$$

(5)

La evolución en estado transitorio de la temperatura a través de las paredes del horno (refractario-aislante), puede estudiarse al considerar un elemento diferencial como el ilustrado en la fig. 2d. La ecuación de balance de energía para el refractario y/o el aislante (6), discretizada en diferencias finitas solo para el espacio es ilustrada en (7) con F una constante y m el número de puntos considerados.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{f} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

$$\frac{dT}{dt} = FT_{(m+1)} + FT_{(m-1)} - 2FT_m \quad (7)$$

Si en la intercara refractario-aislante no se considera almacenamiento (fig. 2e), la ecuación de balance de energía (8), se plantea entonces como una igualdad de flujo de calor. Esta ecuación discretizada en el espacio se ilustra en (9). Por otro lado, la superficie externa del horno está sujeta a interacciones de calor por convección con los alrededores como se ilustra en (10). Esta misma ecuación discretizada solo para el espacio es ilustrada en (11), (fig. 2f).

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{aisl}} = l \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{ref}} \quad (8)$$

$$T_{30} - T_{29} = lT_{29} - lT_{28} \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{aisl}} = \frac{h_{\text{conv}(l)}}{\lambda_{\text{aisl}}} (T_{\text{amb}} - T_{42}) \quad (10)$$

$$T_{42} - T_{41} = uT_{\text{amb}} - uT_{42} \quad (11)$$

Finalmente, la mayoría de modelos no consideran la masa de gas que rodea el conductor eléctrico así como la que se encuentra sobre la carga. Sin embargo, es prudente pensar que gran parte del calor disipado es ganado por éstas masas de gas debido a efectos de convección entre éstas y las superficies cercanas del conductor eléctrico, la carga y la pared refractaria, principalmente cuando se trata de hornos con atmósfera controlada (fig. 2h y 2b). Las ecuaciones de balance de energía para el gas que rodea el conductor eléctrico y la carga, sin considerar el transporte convectivo interno de energía en el gas debido a la velocidad, se ilustran en (12) y (13) respectivamente.

$$\frac{dT_{43}}{dt} = qT_2 + sT_1 + tT_3 - k_3T_{43} \quad (12)$$

$$\frac{dT_{44}}{dt} = vT_2 - T_{44} \quad (13)$$

2.2. Modelo numérico MHE

El modelo de calentamiento para hornos eléctricos estacionarios MHE, consiste entonces de un sistema algebraico diferencial no lineal de primer orden del tipo $G(t, y, y') = 0$ [3]. En el caso particular que se ilustra en (14), se han considerado 24 puntos a través de la pared refractaria y 11 puntos a través del espesor de aislante, las tablas 1 y 2 relacionan las variables y unidades correspondientes que son utilizadas.

$$G(1) = Y_1' + bY_1 + 2cY_1^4 - cY_3^4 - cY_2^4 - bY_{43} - a = 0$$

Resistor

$$G(2) = Y_2' - dY_1^4 + eY_2 - eY_{44} - hY_3^4 + k_4Y_2 = 0$$

Carga

$$G(3) = Y_3 - Y_4 + r\Delta x Y_3^4 - r\Delta x Y_1^4 - w\Delta x Y_3^4 + w\Delta x Y_2^4 = 0$$

Superficie refractaria

$$G(m) = Y_m' - FY_{m+1} - FY_{m-1} + 2FY_m = 0$$

$4 \leq m \leq 28$
Pared refractaria (24 puntos)

$$G(29) = Y_{30} - T_{29} + IT_{28} - IT_{29} = 0$$

Intercara refractario-aislante

$$G(m) = Y_m' - GY_{m+1} - GY_{m-1} + 2GY_m = 0$$

$30 \leq m \leq 41$
Pared aislante (11 puntos)

$$G(42) = Y_{42} - Y_{41} - uT_{amb} + uT_{42} = 0$$

Pared exterior

$$G(43) = Y_{43}' - qY_2 - sY_1 - tY_3 + k_3Y_{43} = 0$$

Gas sobre el conductor eléctrico

$$G(44) = Y_{44}' - vY_2 + vY_{44} = 0$$

Gas sobre la carga

(14)

3. Análisis térmico en hornos eléctricos continuos

En general durante el procesamiento de materiales metálicos en hornos continuos del tipo banda transportadora se llevan a cabo el calentamiento de la pieza; posteriormente el sostenimiento y en una etapa final el enfriamiento de la carga, el cual puede ser por ejemplo mediante aire forzado según las condiciones finales y el tratamiento térmico que se desee dar al material.

3.1. Calentamiento

Para modelar el calentamiento, puede hacerse uso de un elemento diferencial como el ilustrado en la fig. 3, en el cual la carga consiste de una barra de material que entra al horno por un extremo a velocidad constante. Las ecuaciones que definen los balances de materia y energía para dicho elemento diferencial se muestran respectivamente en (15) y (16). Las variables utilizadas se relacionan en la tabla 3

$$\dot{m}_e = \dot{m}_s = \dot{m} \quad (15)$$

Si se asumen como constantes la densidad del material, la velocidad promedio de la carga dentro del horno, las dimensiones de la misma, la conductividad térmica del material, las capacidades calóricas y la temperatura del horno, la ecuación (16), se puede reescribir como se ilustra en (17).

Al calcular el número de Pelet ($Pe = (\rho * C * V * d) / (\lambda)$), para un caso particular en el cual la carga sea una barra de acero, se obtiene un número bastante grande. Por ejemplo, para el caso de $V = 0.003 \text{ m/s}$ y $a=b=0.0635 \text{ m}$; $Pe=13.4$, lo cual indica que en (17) tiene más peso el término convectivo, asociado con la velocidad de la barra, que el término conductivo. Por lo tanto, el término

$$K_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad p \quad \frac{\partial T}{\partial x} + K_2 T^4 + K_3 \frac{\partial T}{\partial t} - K_4 = 0 \quad (18)$$

3.2. Enfriamiento

Para el enfriamiento el balance de materia y energía parte también de un modelo diferencial (fig. 4). En este caso, las ecuaciones que definen los balances de materia y energía son las mismas ecuaciones (15) y (16), pero el intercambio de calor de la carga con los alrededores se da por convección: ($\dot{Q}_{cv} = h_c ab(T - T_o)$). De modo que con las mismas consideraciones hechas para el calentamiento, la ecuación que define el enfriamiento de la barra se puede ilustrar como se muestra en (19).

$$\frac{\partial T}{\partial x} + K_5(T - T_o) + K_3 \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \text{ con:}$$

$$K_5 = 2(a + b)h_c \quad (19)$$

3.3 Modelo numérico MHC

Las ecuaciones (18) y (19) pueden resolverse mediante diferencias finitas expandiendo en series de Taylor [4]. Si las temperaturas para el calentamiento y el enfriamiento se evalúan en el tiempo $n+1$ (método implícito), el modelo para el procesamiento de materiales en hornos continuos MHC, puede resumirse como se ilustra en (20) y (21). Las condiciones de frontera para el calentamiento se resumen en: ($T_{(t=0)} = T_o$), ($T_{(x=0)} = T_o$), En el caso

$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_e u_e - \dot{Q}_{cd_x} + \dot{Q}_{rd} = \dot{m}_s u_s - \dot{Q}_{cd_{x+\Delta x}} + \frac{\partial(mu)}{\partial t} \Big|_x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{Donde:} \\ & \dot{m}_s u_s = \dot{m}_e u_e + \frac{\partial}{\partial x} \left(\dot{m}_e u_e \right) \Delta x \\ & \dot{Q}_{cd_{x+\Delta x}} = \lambda ab \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda ab \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Delta x \\ & \dot{Q}_{rd} = \sigma 2(a+b) F \xi (T_H^4 - T^4) \\ & \text{Con: } \dot{m} = \rho \bar{V} ab \quad y \quad u = CT \end{aligned} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} -K_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x} + K_2 T^4 = -K_3 \frac{\partial T}{\partial t} + K_4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{Donde } K_1, K_2, K_3 \text{ y } K_4 \text{ son constantes definidas como:} \\ & K_1 = \frac{\lambda}{\rho \bar{V} C} \\ & K_2 = \frac{2(a+b)\sigma \xi F}{\rho \bar{V} ab C} \\ & K_3 = \frac{1}{\bar{V}} \\ & K_4 = K_2 T_H^4 \end{aligned} \quad (17)$$

del enfriamiento, la temperatura inicial se asume igual a la temperatura calculada en el extremo final de la barra ($x=L$) durante el calentamiento: $T_{(t=0)} = T_{(x=L)}$ y en segundo lugar, la temperatura del extremo inicial que comienza a enfriarse, se asume igual a la temperatura del extremo final que fue calentado para todo valor del t : $(T_{(x=0)} = T_{(x=L)})_t$.

$$T_i^{n+1} = \frac{\frac{K_3}{\Delta t} T_i^n + K_4 + \left(\frac{T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right)}{\frac{1}{\Delta x} + f(T_i^{n+1}) + \frac{K_3}{\Delta t}}, \text{ con } f(T_i^{n+1})$$

$$\text{definida como: } f(T_i^{n+1}) = K_2 (T_i^{n+1})^3 \quad (20)$$

$$T_i^{n+1} = \frac{\frac{T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + K_5 T_o + \frac{K_3}{\Delta t} T_i^n}{\frac{1}{\Delta x} + K_5 + \frac{K_3}{\Delta t}} \quad (21)$$

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La solución del modelo MHE (14), requiere de algoritmos para sistemas algebraicos de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden del tipo $G(t, y, y') = 0$. El método de Petzold-Gear es útil en éste caso [5]. La estabilidad de dicho método puede

confirmarse al mantener constantes todas las variables y realizar el cálculo de las temperaturas en el tiempo variando el paso en el programa de simulación. En tal sentido, en la fig. 5 se ilustran los valores de varias temperaturas teóricas al cabo de 27.6min. para una variación en el paso de tiempo desde 0.05 hasta 3.0. Como se observa, se halla en general una consistencia en los valores de las temperaturas, el porcentaje máximo de desviación encontrado respecto del valor promedio de una temperatura es del $\pm 0,09\%$.

Con el modelo MHE es posible estudiar la evolución transitoria de las temperaturas en función del cambio de potencia y de la cantidad de carga en hornos eléctricos estacionarios. En las fig. 6 y 7 se muestran los valores experimentales de temperatura para una carga de 3Kg obtenidos respectivamente para hornos de 1KW y 1.8KW. Las dimensiones y valores relevantes para las simulaciones son listadas en la tabla 4.

La fig. 8 por otro lado, ilustra la evolución de las temperaturas de las masas de gas que se hallan rodeando el elemento conductor y sobre la superficie de la carga. Según estos resultados, estas masas ganan gran parte del calor disipado por el conductor, de modo que es posible argumentar que gran parte del proceso de calentamiento de la carga en hornos de atmósfera controlada se deba precisamente a la transferencia de calor por convección que se origina entre ésta y el gas que se utilice como atmósfera en el horno.

En cuanto al modelo MHC, es posible una solución mediante diferencias finitas [6] para una carga consistente de una barra rectangular dividida en (i) bloques. Los valores de las diferentes variables utilizadas para la simulación se listan en la tabla 5. En las figs. 9 y 10 se ilustran los resultados teóricos obtenidos para el

calentamiento, sostenimiento y enfriamiento de una barra cuadrada de acero cuando se varía respectivamente la sección transversal de la carga y su velocidad dentro del horno. En la fig. 9 se ha empleado una velocidad lineal constante de 18cm/min, mientras que en la fig. 10 se ha mantenido constante la sección transversal de la barra en 6.35cm. Se observa respectivamente que: *i)* para un tiempo igual, la temperatura de sostenimiento que se consigue es menor cuando la sección transversal de la carga va en aumento y *ii)* el efecto de la velocidad de la carga se evidencia principalmente durante el calentamiento y el enfriamiento. En el caso correspondiente al calentamiento, a bajas velocidades el aumento de temperatura es más rápido, lo cual puede deducirse de la pendiente más pronunciada a velocidades de 6cm/min en contraste con una velocidad dos veces superior de 12cm/min. En el caso del enfriamiento, con velocidades mayores se consiguen efectos más moderados de disminución de temperatura. En general, dependiendo del tipo de tratamiento térmico que se requiera dar al material es probable que la velocidad de la carga no deba ser constante durante las etapas de calentamiento, sostenimiento y enfriamiento, ya que altas velocidades generan bajas tasas de calentamiento y enfriamiento, adicionalmente el inicio del sostenimiento se consigue en distancias más cortas tal como se deduce del círculo que denota el retardo térmico en la fig. 10.

5. CONCLUSIONES

* Se han desarrollado dos modelos numéricos para el calentamiento de materiales en hornos eléctricos estacionarios (MHE) y continuos (MHC). El modelo MHE consiste de un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden cuya solución es accesible mediante algoritmos numéricos como el de Petzold-Gear. Por otro lado, el modelo MHC se ha resuelto mediante diferencias finitas. Dichos modelos permiten optimizar la selección de equipos en

procesos de calentamiento o tratamientos térmicos para diferentes tipos de materiales.

* Según los resultados obtenidos a partir del modelo MHC, gran parte del proceso de calentamiento de la carga en hornos de atmósfera controlada se debe a la transferencia de calor por convección que se origina entre ésta y el gas que se utilice como atmósfera en el horno.

REFERENCIAS

1. RUNG T. B. Computational modelling of thermophysical processes in the light metals industry, En: Rev. Gén Therm, Vol. 36, (1997), p. 575-591.
2. BIRD, R. B. STEWART, W. and LIGHTFOOT, E. N. Transport Phenomena, John Wiley and Sons, New York, 1960.
3. POPOV, V. and POWER, H., The DRM-MD Integral Equation Method for the Numerical Solution of Convection-Diffusion Equation, Boundary Element Research in Europe, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1999, p. 67-81.
4. NIEVES A., F. DOMÍNGUEZ, Métodos numéricos aplicados a la ingeniería, México: Editorial CESCOSA, 2002.
5. PRESS W. H., TEUKOLSKY S. A., VETTERLING W. T., FLANNERY B. P., Numerical Recipes in Fortran 90, The Art of Parallel Scientific Computing, Second Edition, Volume 2 of Fortran Numerical Recipes, Cambridge University Press 2002.
6. HILDEBRAND F. B. Introduction to numerical analysis, New York: Dover Publications, 1987.

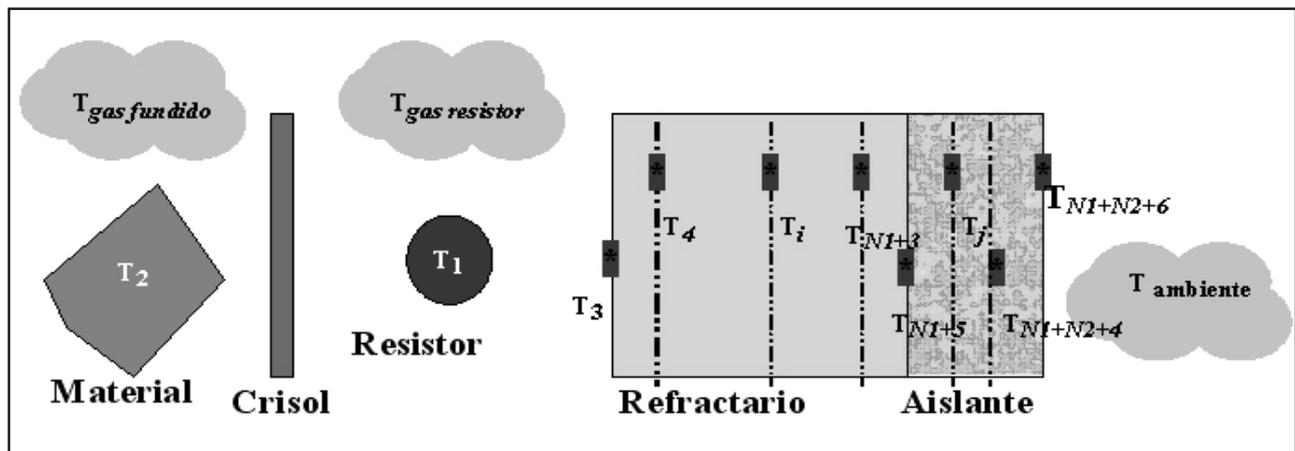


Figura 1. Esquema para el análisis térmico de un horno estacionario de caja

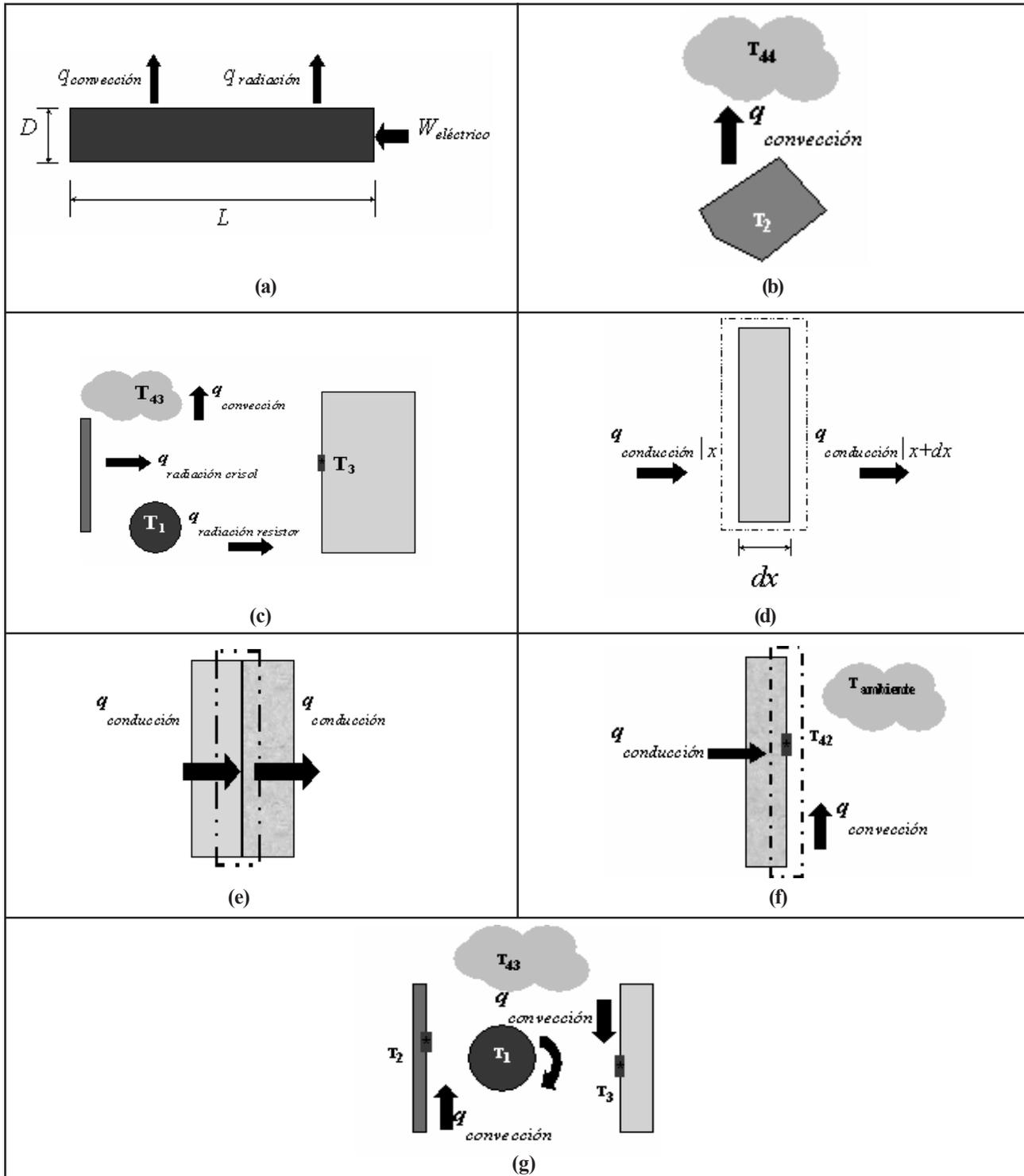


Figura 2. Masas de control consideradas durante el análisis de un horno de caja: (a) Resistor, (b) Gas sobre la carga, (c) Superficie de refractario, (d) Pared refractaria, (e) Intercara refractario-aislante, (f) Superficie del aislamiento, (g) Gas que rodea el conductor eléctrico.

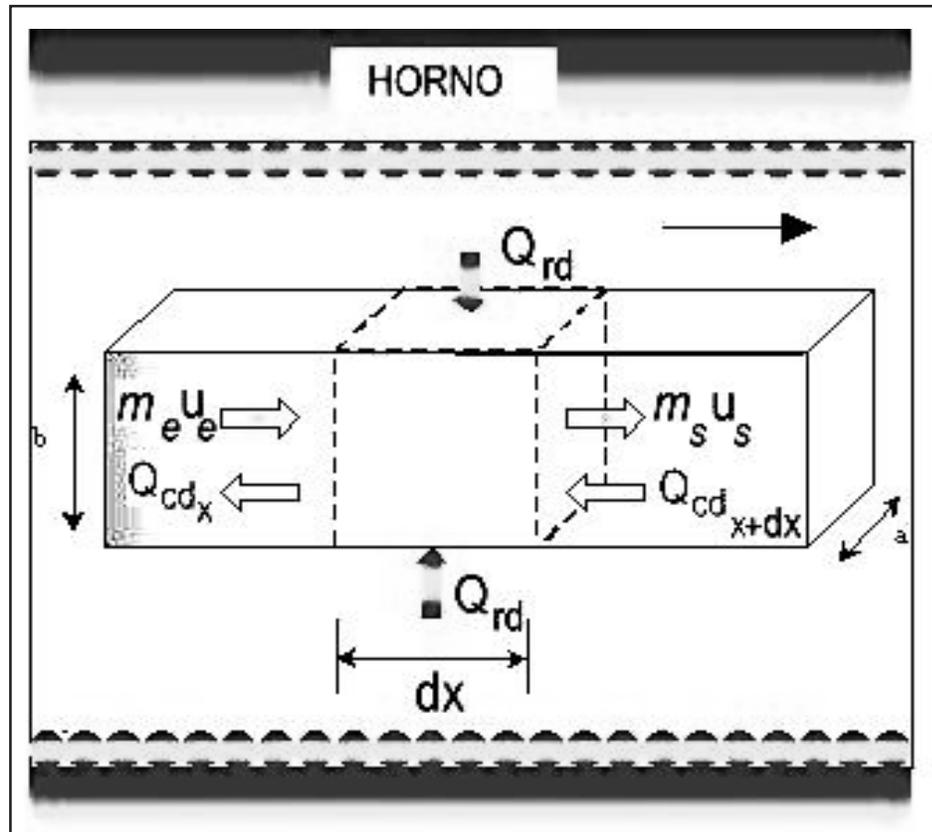


Figura 3. Esquema para el análisis térmico durante el calentamiento en hornos continuos

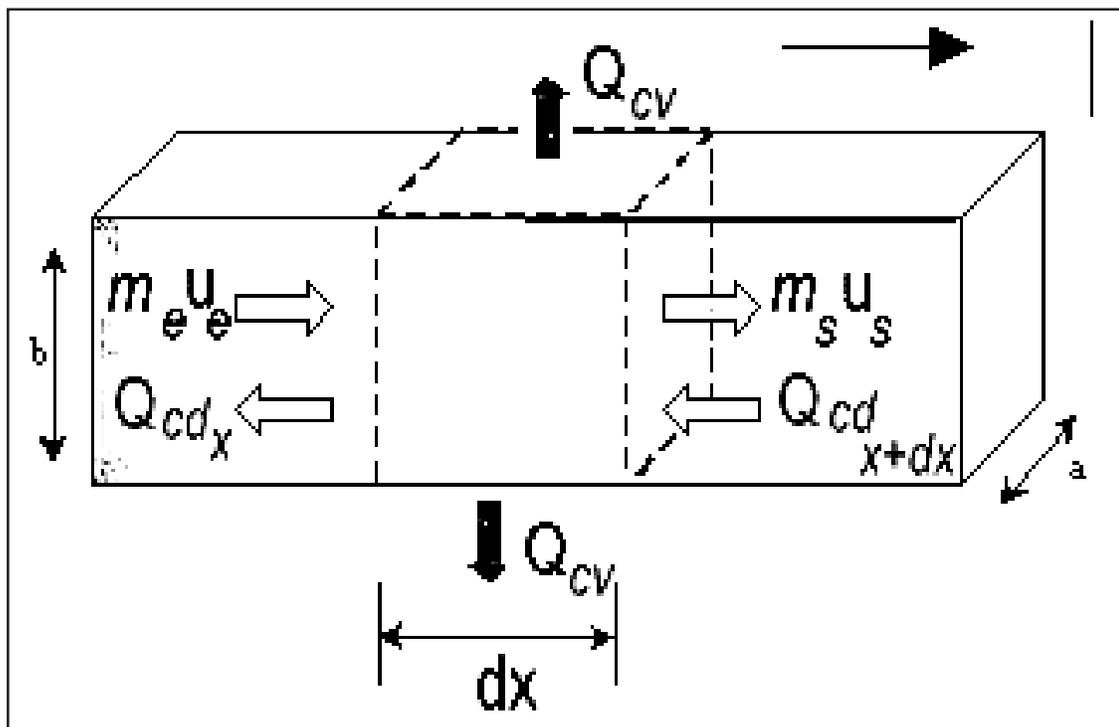


Figura 4. Esquema para el análisis térmico durante el enfriamiento en hornos continuos

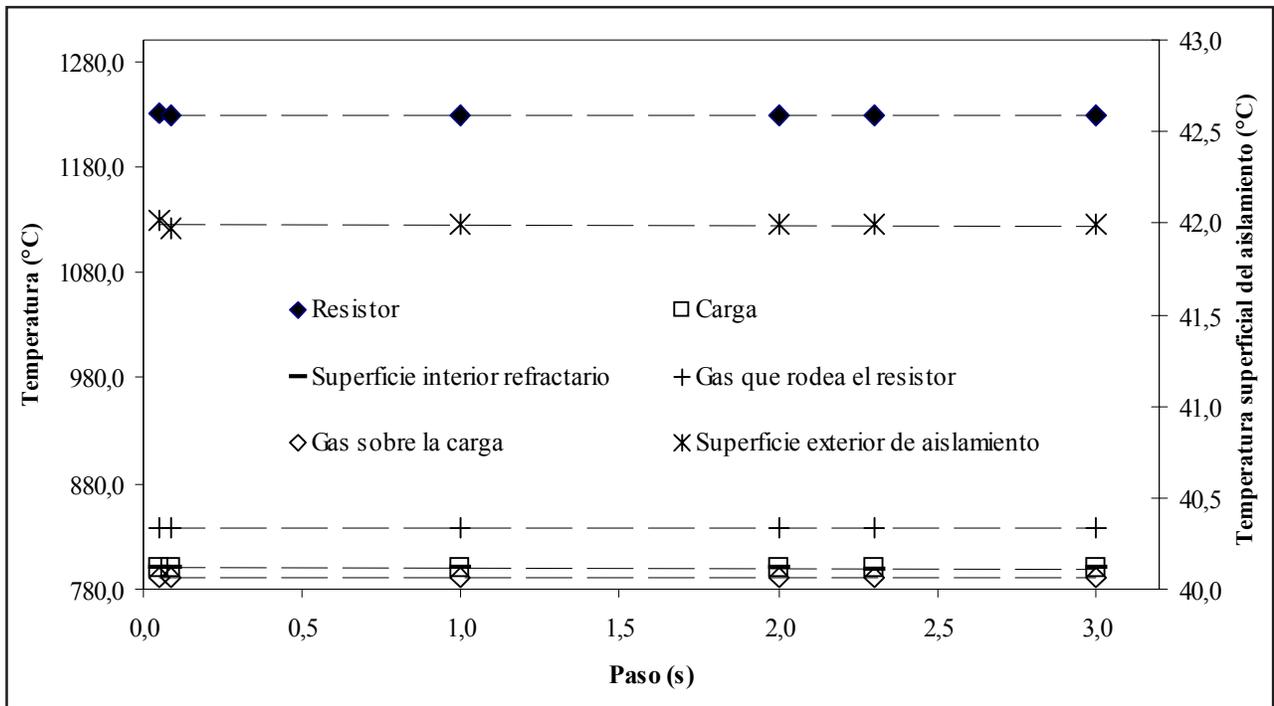


Figura 5. Temperaturas al cabo de 27.6min. vs el paso de tiempo para el modelo MHE

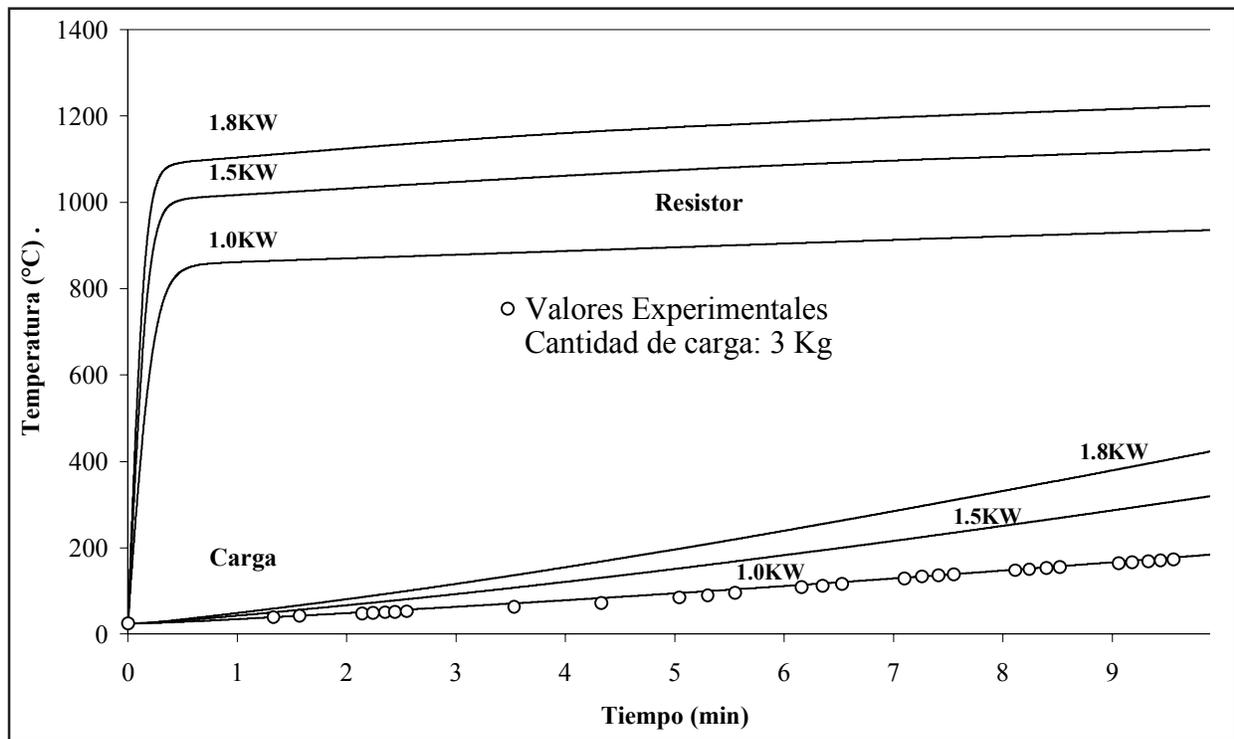


Figura 6. Evolución de las temperaturas del conductor y de la carga cuando se varía la potencia del horno en el modelo MHE

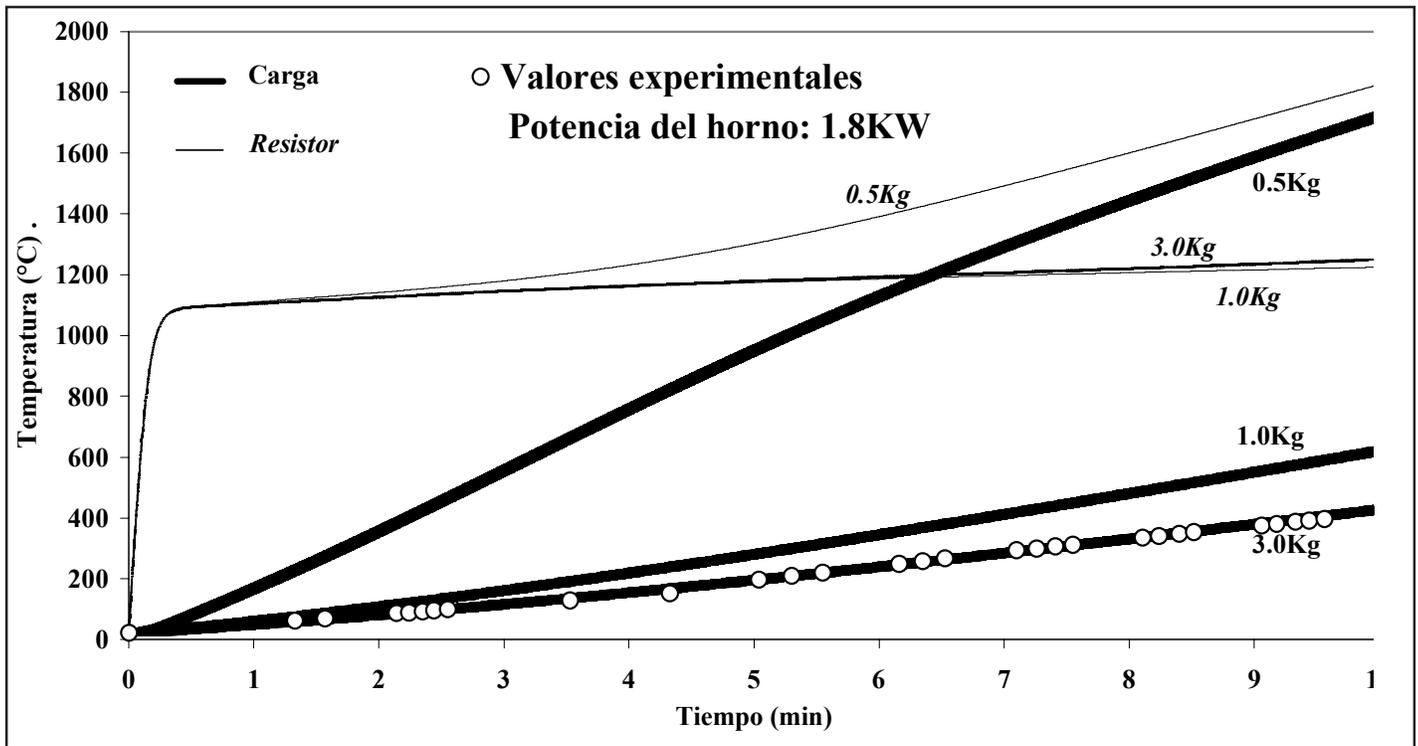


Figura 7. Evolución de las temperaturas del conductor y de la carga cuando se varía la masa a calentar en el modelo MHE

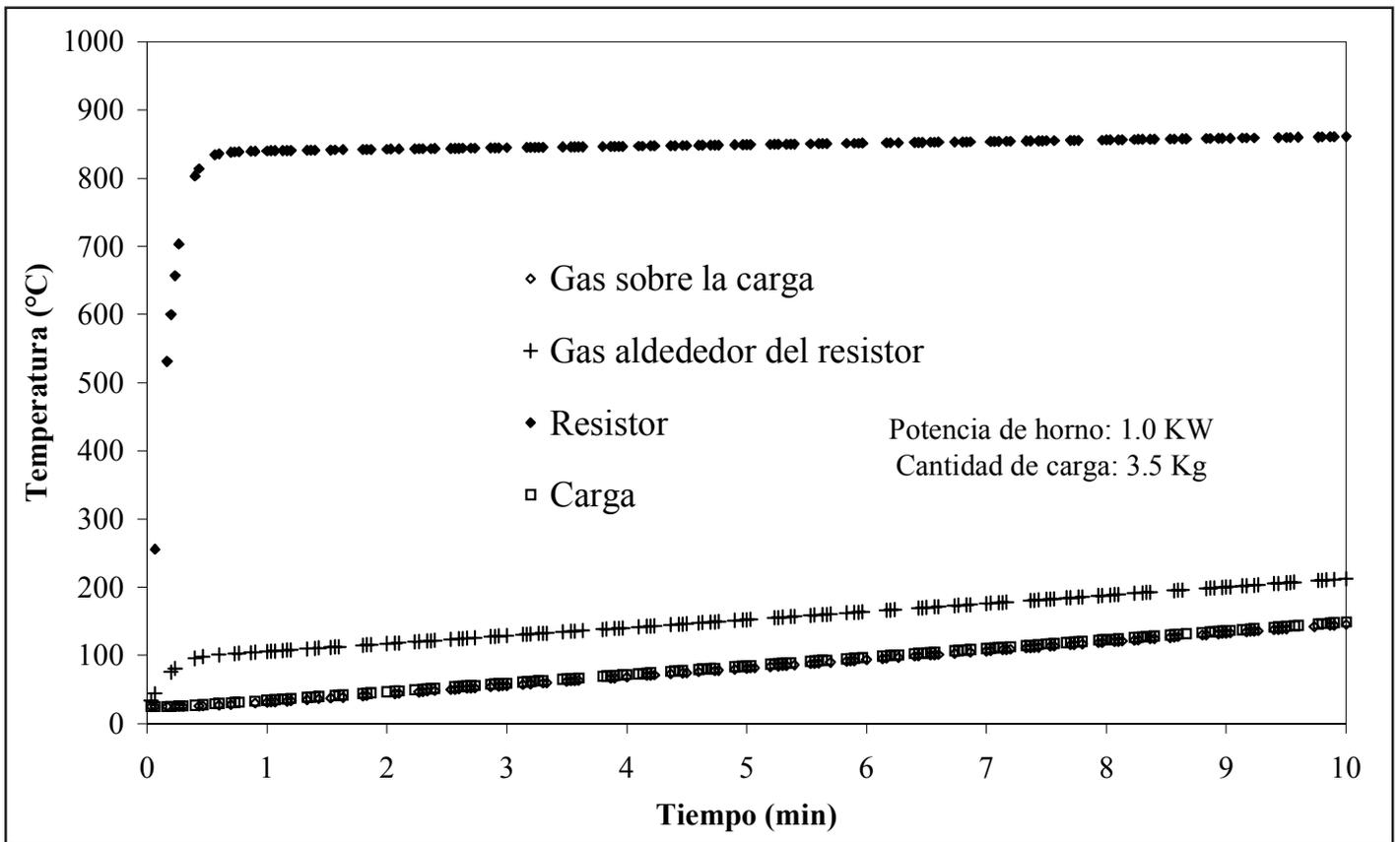


Figura 8. Evolución teórica de las temperaturas de los gases en hornos con atmósfera controlada

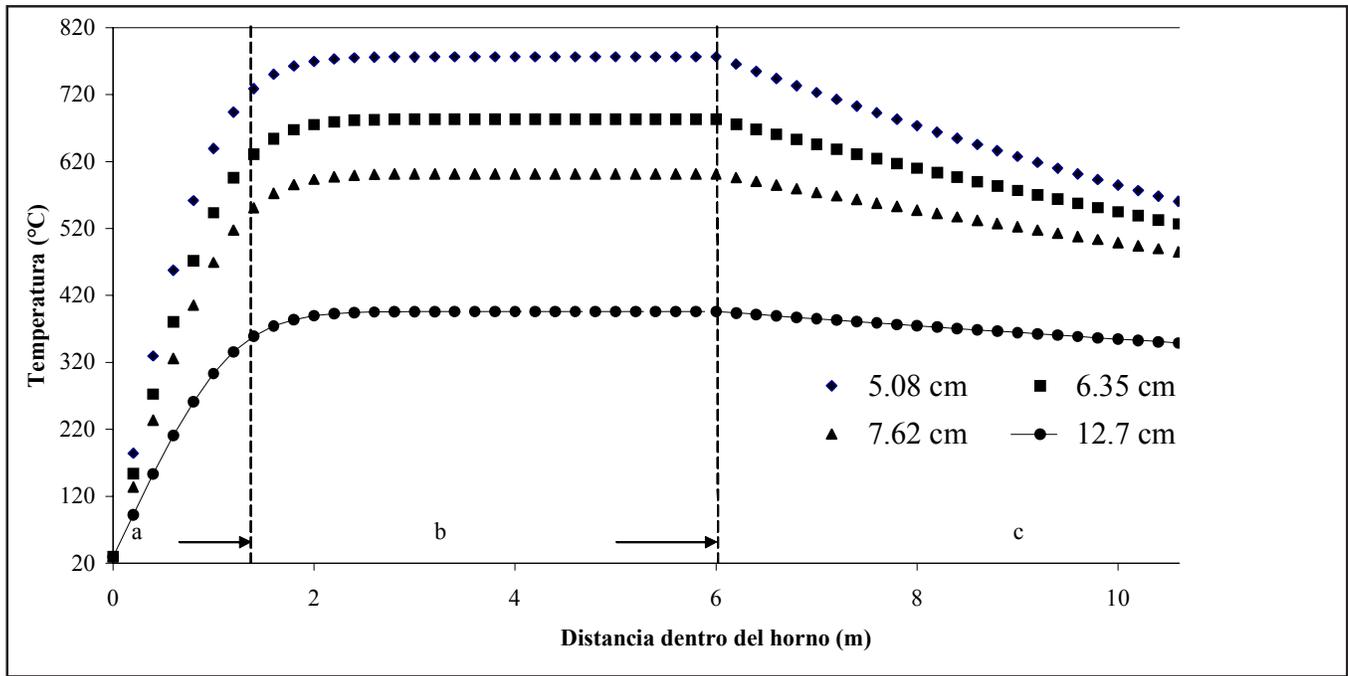


Figura 9. Ejemplo de la evolución de la temperatura de la carga en hornos continuos para diferentes dimensiones: (a) zona de calentamiento, (b) zona de sostenimiento y (c). zona de enfriamiento

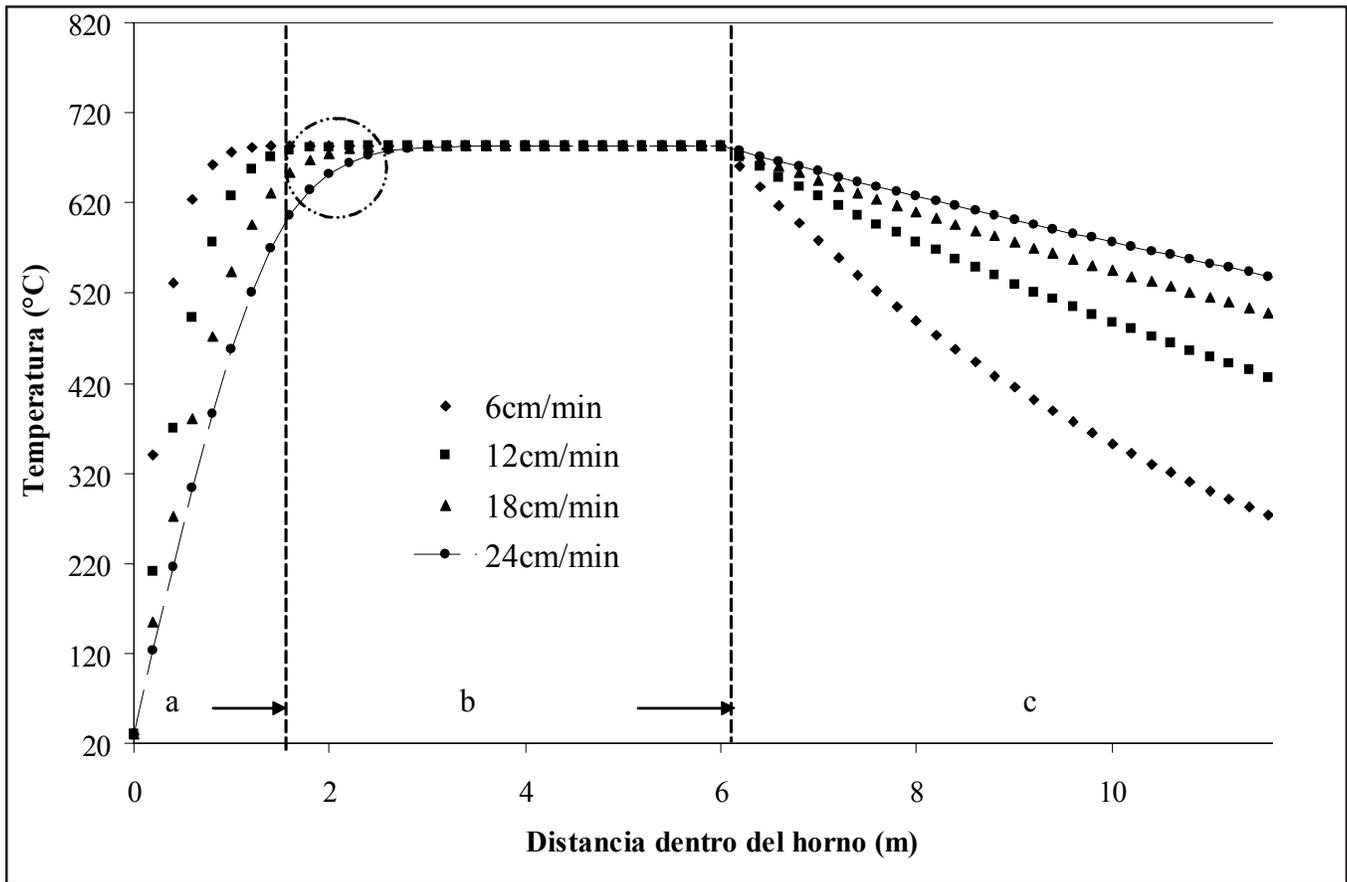


Figura 10. Ejemplo de evolución de la temperatura de la carga en hornos continuos para diferentes velocidades: (a) zona de calentamiento, (b) zona de sostenimiento y (c). zona de enfriamiento

Tabla 1. Listado general de variables en el modelo MHE

$a=$	$g= \frac{\lambda_{aisl}}{C_{aisl} \rho_{aisl}}$	$F= \frac{f}{\Delta x^2}$	$k_4= d+h$
$b=$	$G= \frac{g}{\Delta x^2}$	$r= \frac{A_2 \varepsilon \sigma}{2 A_3 \lambda_{ref}}$	$f= \frac{\lambda_{ref}}{C_{ref} \rho_{ref}}$
$c=$	$l= \frac{\lambda_{ref}}{\lambda_{aisl}}$	$v= \frac{h_{conv(2)} A_4}{m_{gas(2)} C_{gas}}$	$t= \frac{h_{conv(2)} A_3}{m_{gas(1)} C_{gas}}$
$d=$	$u= \frac{h_{conv(1)} \Delta x}{\lambda_{aisl}}$	$w= \frac{A_3 \varepsilon_{ref} \sigma}{2}$	$k_3= q+s+t$
$e=$	$q= \frac{h_{conv(2)} A_1}{m_{gas(1)} C_{gas}}$	$h= \frac{A_3 \varepsilon_{ref} \sigma}{2 m_{mat} C_{mat}}$	$s= \frac{h_{conv(2)} A_2}{m_{gas(1)} C_{gas}}$

Tabla 2. Simbología utilizada en el modelo MHE

Símbolo	Nombre	Elemento	Unidad
C C_{mat} C_{ref} C_{aisl} C_{gas}	Capacidad calórica	Resistor Carga Refractario Aislante Gas	J/KgK
m_{mat} $m_{gas(1)}$ $m_{gas(2)}$	Masa	Carga a calentar Gas que rodea el conductor Gas sobre la superficie de la carga	Kg
ρ ρ_{ref} ρ_{aisl}	Densidad	Material del conductor Refractario Aislante	Kg/m ³
D L Δx	Diámetro del conductor eléctrico Longitud del conductor eléctrico Elemento diferencial de longitud		m
A_1 A_2 A_3 A_4	Superficie	Externa del contenedor de carga Conductor Refractario expuesta al conductor Carga en contacto con el gas	m ²
P	Potencia del conductor eléctrico		W
$h_{conv(2)}$ $h_{conv(1)}$	Coefficiente de convección	Gas en contacto con el conductor y sobre la superficie de la carga Gas circundante sobre la pared aislante	W/m ² K
λ_{ref} λ_{aisl}	Conductividad térmica	Refractario Aislante	W/mK
ε ε_{ref}	Emisividad	Resistor Superficie del refractario	~
σ	Constante de Steffan Boltzman		W/m ² K ⁴

Tabla 3. Simbología utilizada en el modelo MHC

Símbolo	Nombre	Unidad
a, b	Dimensiones de la carga	m
L	Longitud del horno	
hc	Coficiente de transferencia de calor por convección	$W/m^2 \text{ } ^\circ K$
	Conductividad térmica	$W/m^\circ K$
T_H	Temperatura del horno	$^\circ K$
T_o	Temperatura ambiente	
ξ	Emisividad de la carga	~
\bar{V}	Velocidad de la carga	m/s
C	Capacidad calórica del material que constituye la carga	J/KgK
λ	Densidad de la carga	Kg/m^3
F	Factor de forma	~
m	Masa	Kg
u	Energía interna	J/Kg
t	Tiempo	s
\dot{Q}	Flujo de calor	W
Subíndices		
e	Entrada	
s	Salida	
H	Horno	
o	Ambiente	
cd	Conducción	
rd	Radiación	
cv	Convección	

Tabla 4. Valores utilizados en el algoritmo de solución del modelo MHE

Variable	Valor	Unidad
Altura horno	0.534	m
Diámetro contenedor	0.434	
Altura contenedor	0.217	
Coefficiente de convección con el gas circundante sobre la pared aislante ($h_{conv(1)}$)	10	W/m ² K
Coefficiente de convección del gas en contacto con el conductor y sobre la superficie de la carga ($h_{conv(2)}$)	2	
Densidad del aislamiento (ρ_{aisl})	10	Kg/m ³
Densidad del material del conductor (ρ)	7854	
Densidad del refractario (ρ_{ref})	2050	
Capacidad calórica del refractario (C_{ref})	960	J/KgK
Capacidad calórica del aislamiento (C_{aisl})	700	
Capacidad calórica del material del conductor (C)	437	
Emisividad del conductor (ϵ)	0.8	-
Emisividad del refractario (ϵ_{ref})	0.38	
Conductividad del refractario (λ_{ref})	1	W/mK
Conductividad del aislamiento (λ_{aisl})	0.043	

Tabla 5. Valores utilizados en el algoritmo de solución del modelo MHC

Variable	Valor	Unidad
Temperatura del horno (T_H)	1200	K
Temperatura ambiente (T_o)	298.15	
Coefficiente de transferencia de calor por convección (h_c)	10	W/m ² K
Emisividad de la superficie de la carga	0.9	-
Factor de forma, entre la barra cuadrada y el horno, (recinto cúbico), (F)	1	-
Densidad del material que constituye la carga ()	7800	Kg/m ³
Capacidad calórica de la carga (C)	450	J/KgK
Conductividad térmica de la carga ()	50	W/mK

ANEXO

Obtención de la ecuación (2):

Para la resistencia eléctrica, a partir del balance de energía (1):

se tiene que:

$$\left[\iiint (e + Pv) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \right]_{sc} = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\iiint e \rho dV \right]_{vc} = mC \frac{dT}{dt} \quad (ii)$$

$$\frac{\delta W}{dt} = P \quad (iii)$$

con m la masa del conductor eléctrico y P su potencia.

La transferencia de calor desde el conductor (q), es de la forma:

$$q = \left(q_{\text{refractario}} \right)_{rad} + \left(q_{\text{contenedor}} \right)_{rad} + q_{conv} \quad (iv)$$

Con un factor de forma de $\frac{1}{2}$, para una pared plana irradiada por un cilindro recto, la ecuación general de balance desde (i)-(iv) en (1), es:

$$\left[\frac{\pi}{4} \rho D^2 C \right] \frac{dT_1}{dt} = P - \pi D h_{conv(2)} (T_1 - T_{43}) - \frac{\pi}{2} D \epsilon \sigma (2T_1^4 - T_3^4 - T_2^4) \quad (v)$$

Usando los valores reportados en la tabla 1, la ecuación (v), puede escribirse como:

$$\frac{dT_1}{dt} = -bT_1 - 2cT_1^4 + cT_3^4 + cT_2^4 + bT_{43} + a \quad (2)$$