

## ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN LA ESTIMACION DE LA FUNCION CARACTERISTICA DE PUNTO DE HAMILTON DE LA SISMICA GEOMETRICA

**LUIS ALFREDO MONTES VIDES**

Profesor Asociado, Departamento de Geociencias - Universidad Nacional de Colombia

**Montes, L.** (2000): Análisis de sensibilidad en la estimación de la función característica de Punto de Hamilton de la sismica geométrica. Geofís. Colomb. 4:31-36. ISSN 0121-2974. Santa Fe de Bogotá, D.C. - Colombia

### RESUMEN

Usando la aproximación de segundo orden de los tiempos de Tránsito en modelos sísmicos constituidos por capas homogéneas e isotrópicas separadas por interfaces suaves, los tiempos de los eventos de reflexión registrados en vecindad del rayo central pueden estimarse a partir de una función hiperbólica que corresponde a la función característica de punto de Hamilton, la cual no es conocida numéricamente en la óptica geométrica. En la sismica, esta se puede determinar a través de una regresión lineal entre las coordenadas fuente-detector y los tiempos de Tránsito de por lo menos nueve rayos apropiadamente seleccionados y registrados en configuraciones de cubrimiento múltiple. Un análisis de sensibilidad permite conocer la estabilidad y robustez del método de regresión que estima la función característica de los tiempos de Tránsito.

### ABSTRACT

Using the second-order approximations of the traveltimes in a seismic model which consists of a pile of homogeneous layers separated by smooth interfaces, the traveltimes of reflection events registered in the vicinity of the central ray can be estimated from an hyperbolic function that corresponds to Hamilton's point characteristic in optics, where it is not numerically known. In seismic, it can be determined through a linear regression between the source-detector coordinates and the traveltimes of at least nine rays properly selected and registered in multiple fold configurations. A sensibility analysis allows to know the stability and robustness of the linear regression method to estimate the characteristic traveltimes function.

### 1. INTRODUCCION

Las leyes generales para representar propiedades globales de los rayos transmitidos y reflejados en un sistema sísmico fueron establecidas usando las ideas de la óptica geométrica (Bortfeld, 1989).

En un modelo de la tierra constituido por capas homogéneas e isotrópicas separadas por interfaces suaves con velocidades y densidades arbitrarias, el sistema queda limitado por la superficie anterior considerada plana (de adquisición), y la posterior arbitrariamente curvada (de reflexión).

El tiempo de Tránsito de cualquier rayo cercano a un rayo de referencia denominado rayo central se expresa por una sencilla función matricial, que es equivalente a la función característica de punto de Hamilton de la óptica.

Matemáticamente, la teoría de aproximación paraxial es la contraparte sísmica de la óptica gaussiana. Problemas, tales como fenómenos de enfocamiento (Bortfeld & Kemper, 1991) y migración de amplitudes (Bortfeld & Kiehn, 1992) han sido tratados exitosamente sin conocer la estructura detallada del sistema sísmico. La teoría provee formulas más simples y compactas, deseables en problemas de inversión.

El propósito de este artículo es evaluar el proceso que estima la función que suministra el tiempo de un evento reflexión asociado a una superficie del sistema, y analizar como los errores cometidos en la identificación de los primeros arribos puede influir en el estimativo de dicha función; error que se transfiere a los resultados de cualquier proceso de inversión que haga uso de esta teoría.

## 2. RAYOS Y TIEMPOS DE TRANSITO

El sistema se considera compuesto de capas homogéneas e isotrópicas separadas por interfaces suaves, está limitado por la superficie sobre la cual se posicionan las fuentes y los geofonos llamada superficie anterior, y por la superficie donde tiene lugar la reflexión, denominada superficie posterior. En la aproximación geométrica o paraxial, un rayo transmitido que incida normalmente sobre el reflector se usa como rayo central, a éste se referencian los rayos vecinos o paraxiales. El sistema de coordenadas se fija al rayo central, haciendo coincidir el origen del sistema cartesiano con el punto donde el rayo intersecta la interface, así el plano  $xy$  es tangente a la superficie anterior en el punto de partida del rayo central. El plano  $x'y'$  es tangente al punto de intersección del rayo central con la superficie posterior.

Con la ayuda de estos sistemas cualquier rayo paraxial puede representarse por los vectores posición y lentitud (slowness) proyectados sobre los planos tangentes ( $xy, x'y'$ ) en las superficies anterior ( $\bar{x}, \bar{p}$ ) y posterior ( $\bar{x}', \bar{p}'$ ), ver Fig.1. Para diferenciar los vectores asociados al rayo central de aquellos asociados a los rayos paraxiales, la pareja de vectores asociados al rayo central se escribe con el suscrito "o", así en la superficie anterior la pareja será  $(\bar{x}_o, \bar{p}_o)$ .

En la aproximación de segundo orden de los tiempos de Tránsito las parejas de vectores en la superficie de reflexión se relacionan con los vectores de la superficie anterior a través de la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}' \\ \bar{p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_o & \underline{B}_o \\ \underline{C}_o & \underline{D}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{p} - \bar{p}_o \end{bmatrix} \quad (1)$$

con  $\underline{A}_o, \underline{B}_o, \underline{C}_o, \underline{D}_o$  matrices jacobianas 2x2.

Un rayo trazado desde  $\bar{x}$  en la superficies anterior a  $\bar{x}'$  en la posterior y de allí hasta  $\bar{x}''$  sobre la anterior representa una onda que atravesando el sistema es reflejada con un tiempo de Tránsito:

$$t(\bar{x}, \bar{x}'') = T_o + \bar{p}_o(\bar{x} + \bar{x}'') + \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}'')\underline{D}_o^{-1}\underline{C}_o\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}'') + \frac{1}{2}(\bar{x}'' - \bar{x})\underline{B}_o^{-1}\underline{A}_o\frac{1}{2}(\bar{x}'' - \bar{x}) \quad (2)$$

donde  $T_o$  es el tiempo de Tránsito del rayo central de ida y vuelta (*two way time*). El tiempo de Tránsito *zero-offset* se obtiene cuando  $\bar{x} = \bar{x}''$ .

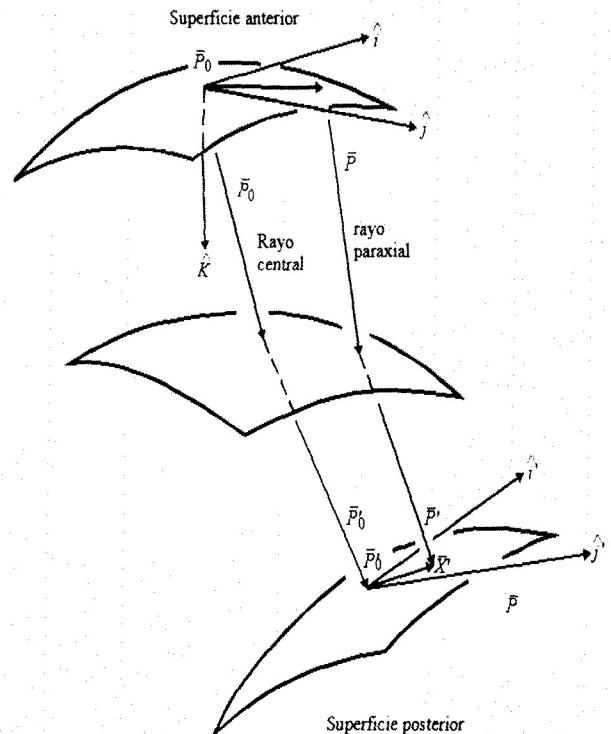


FIGURA 1. SISTEMA SISMICO MOSTRANDO EL RAYO CENTRAL CON LOS SISTEMA CARTESIANOS DEFINIDOS EN LAS SUPERFICIES ANTERIOR Y POSTERIOR. EL RAYO PARAXIAL ATRAVIESA EL SISTEMA HASTA EL REFLECTOR.

La ecuación (2) corresponde a la característica de punto de Hamilton en óptica, llamada así por dar el tiempo de propagación entre dos puntos. Aún usada en el diseño de instrumentos ópticos la función característica de punto de Hamilton no se conoce explícita ni numéricamente. Sin embargo en sismología el sistema es la Tierra y la forma de la función se expresa en (2), pudiendo estimarse numéricamente.

Las matrices  $\underline{B}_o^{-1}\underline{A}_o, \underline{D}_o^{-1}\underline{C}_o$  son simétricas, en consecuencia la función (2) posee nueve incógnitas: seis en  $\underline{B}_o^{-1}\underline{A}_o, \underline{D}_o^{-1}\underline{C}_o$ , una en  $T_o$  y dos en  $\bar{p}_o$ . Utilizando al menos nueve tiempos de tránsito apropiadamente registrados las incógnitas de la expresión (2) pueden resolverse y por tanto estimar numéricamente la función característica de los tiempos de tránsito.

## 3. CONFIGURACION Y TIEMPO DE ARRIBO

Para estimar la función característica se requiere de por lo menos nueve mediciones (*picking*) de tiempos de arribo de las ondas reflejadas, ya que la ecuación (2) posee nueve incógnitas. Para simplificar las ecuaciones denotaremos los parámetros así:

$$\underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix}, \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix}, \underline{P}_o = (p, q)$$

Una configuración con disparo en el origen del sistema cartesiano da lugar a una familia de trazos fuente común (*common-shot*). Al situar los geofonos en las coordenadas  $(x_{gi}, y_{gi})$  y al usar la ecuación (2) se tiene un sistema de ecuaciones que matricialmente tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_N \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1x_{g1}y_{g1}x_{g1}^2 & x_{g1}y_{g1}y_{g1}^2 & x_{g1}^2x_{g1}^2 & x_{g1}y_{g1}y_{g1}^2 & y_{g1}^2x_{g1}^2 & x_{g1}y_{g1}y_{g1}^2 & y_{g1}^2y_{g1}^2 \\ 1x_{g2}y_{g2}x_{g2}^2 & x_{g2}y_{g2}y_{g2}^2 & x_{g2}^2x_{g2}^2 & x_{g2}y_{g2}y_{g2}^2 & y_{g2}^2x_{g2}^2 & x_{g2}y_{g2}y_{g2}^2 & y_{g2}^2y_{g2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1x_{g9}y_{g9}x_{g9}^2 & x_{g9}y_{g9}y_{g9}^2 & x_{g9}^2x_{g9}^2 & x_{g9}y_{g9}y_{g9}^2 & y_{g9}^2x_{g9}^2 & x_{g9}y_{g9}y_{g9}^2 & y_{g9}^2y_{g9}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_o \\ -p \\ -q \\ u_{11}/4 \\ u_{12}/2 \\ u_{22}/4 \\ v_{11}/4 \\ v_{12}/2 \\ v_{22}/4 \end{bmatrix}$$

El sistema presenta tres pares de columnas iguales o linealmente dependientes, por tanto no admite solución. Este resultado indica que es imposible conocer la función característica usando una familia de trazos con fuente común.

Un análisis similar en trazos obtenidos en receptor común CRP lleva a un sistema con seis grados de libertad, imposibilitando conocer los parámetros a partir de una familia de trazos CRP.

Al considerar trazos registrados en configuración CMP se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_m y_m x_{d1}^2 & x_{d1}y_{d1}y_{d1}^2 & x_{d1}^2x_m^2 & x_m y_m y_m^2 \\ 1x_m y_m x_{d2}^2 & x_{d2}y_{d2}y_{d2}^2 & x_{d2}^2x_m^2 & x_m y_m y_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1x_m y_m x_{d9}^2 & x_{d9}y_{d9}y_{d9}^2 & x_{d9}^2x_m^2 & x_m y_m y_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_o \\ -p \\ -q \\ u_{11}/4 \\ u_{12}/2 \\ u_{22}/4 \\ v_{11}/4 \\ v_{12}/2 \\ v_{22}/4 \end{bmatrix}$$

Por el hecho de contar con seis grados de libertad se concluye que en un único arreglo CMP no es posible conocer la función característica.

Por último en una familia de trazos *common-offset* nuevamente se obtiene un sistema con seis grados de libertad encontrando la misma imposibilidad hallada en los tres casos anteriores.

Lo anterior permite afirmar que para determinar la función característica se requiere utilizar tiempos de arriba registrados en distintas configuraciones.

#### 4. APROXIMACION HIPERBOLICA

En la exploración sísmica se sabe hace tiempo que en medios con capas planas y horizontales, los tiempos de tránsito de las reflexiones aproximadamente verticales se ajustan mejor por funciones hiperbólicas que por funciones de tipo parabólicas (Ursin, 1982). Al considerar el cuadrado de la función de tiempos de tránsito dada en (2) y despreciando los términos mayores a la segunda potencia se obtiene:

$$t(\bar{x}, \bar{x}')^2 = [T_o - 2\bar{p}_o \bullet \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}')]^2 + 2T_o[\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}') \bullet \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}') + \frac{1}{2}(\bar{x}' - \bar{x}) \bullet \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o \frac{1}{2}(\bar{x}' - \bar{x})] \quad (3)$$

La ecuación (3) representa los tiempos de tránsito en la aproximación hiperbólica. El conjunto de N tiempos registrados en distintas configuraciones da lugar a un sistema matricial de N ecuaciones.

#### 5. ANALISIS DE SENSIBILIDAD

La estabilidad se define como la propiedad que posee un estimador central a ser insensible a la presencia de pequeños errores aleatorios en los datos, al suministrar información "a priori" sobre el modelo se puede garantizar la estabilidad en la solución. La robustez, indica la sensibilidad del parámetro a un número reducido de errores apreciables en los datos.

Estimar la función característica usando tiempos de tránsito de eventos de reflexión es un problema de regresión lineal de un sistema de ecuaciones sobredeterminado que se expresa de la forma:

$$\text{Minimizar } \|\bar{\epsilon}\| = \|\underline{G}\bar{m} - \bar{b}\| \quad (4)$$

La solución para (1) serán los valores de  $\bar{m}$  que generen el menor error  $\bar{\epsilon}$ , que se obtiene a través de la matriz inversa generalizada, ver Apéndice A.

Para estudiar la sensibilidad en la determinación de la función característica, la ecuación (3) se perturba introduciendo errores aleatorios en los tiempos de tránsito. Estas secuencias de números aleatorios se

generan con una distribución normal con media  $\mu = 0$  y desviación estándar  $\sigma \neq 0$ .

Se llevaron a cabo nueve ensayos, con gaussianas de  $\sigma_i = \{2,4, \dots, 18\text{ms}\}$ , el valor mayor representa el tiempo usado por un frente de onda con frecuencia de 100 Hz para viajar una longitud de onda  $\lambda$  a una velocidad de 1000 m/s. Con este intervalo se indica que el error se relaciona con la incertidumbre para identificar en una longitud de onda el tiempo de arribo (*picking*).

Con fuentes y detectores en configuración CMP la función característica viene dada por la expresión:

$$t(\vec{0}, \vec{x}) = T_o + \vec{x}U\vec{x}, \quad (5)$$

donde  $U = B_o^{-1}A_o$  y  $T_o$  se pueden estimar a través del método de la inversa generalizada.

Por otro lado cuando fuente y detector están en configuración *zero-offset* la función característica de tiempos de tránsito toma la forma:

$$t(\vec{x}) = T_o + \vec{p}_o\vec{x} + \vec{x}V\vec{x} \quad (6)$$

donde  $V = D_o^{-1}C_o$  y  $\vec{p}_o$  se obtienen usando la matriz de Moore-Penrose, ver Apéndice A.

El tiempo para una configuración *zero-offset* se puede aproximar al tiempo de arribo al detector más próximo a la fuente. Ligeras perturbaciones se introdujeron en los tiempos de tránsito del sistema de ecuaciones (3) y se estudió como los errores en esos tiempos de arribo influyen en los parámetros, para ello se creó un programa en Matlab 4.0 que calcula la función característica exacta a partir de tiempos de tránsito obtenidos de un modelo de capas plano horizontales, utilizando el programa de trazamiento de rayos SEIS88 desarrollado por Cerveny et al. (1980) en la Universidad de Charles en Praga. Posteriormente se adicionaron a los tiempos de arribo cadenas de errores estocásticos generados por una función de distribución normal, con media cero y  $\sigma_i \neq 0$ ; los resultados arrojados en el proceso se muestran en la Tabla 1.

TABLA 1

$\sigma(s)$	$t_o(s)$	$p_x$	$p_y$	$V_{11}$	$V_{12}$	$V_{22}$	$U_{11}$	$U_{12}$	$U_{22}$
0	0.5	0	0	1	0	1	0	0	0
0.002	0.4997	-0.0006	-0.0009	0.9937	0.0109	0.9922	0.0011	0.001	0.0021
0.004	0.4993	-0.0011	-0.0017	0.9874	0.0219	0.9844	0.0026	0.0011	0.0041
0.006	0.499	-0.0015	-0.0026	0.981	0.033	0.9766	0.0045	0.0002	0.0062
0.008	0.4987	-0.002	-0.0034	0.9746	0.0443	0.9687	0.0068	-0.0016	0.0084
0.01	0.4984	-0.0024	-0.0042	0.9681	0.0556	0.9608	0.0095	-0.0043	0.0106
0.012	0.4981	0.0027	-0.005	0.9615	0.067	0.9528	0.0126	-0.008	0.0128
0.14	0.4978	-0.003	-0.0057	0.9548	0.0785	0.9448	0.0161	-0.0126	0.015
0.16	0.4975	-0.0033	-0.0065	0.9481	0.0901	0.9368	0.0199	-0.0181	0.0173
0.18	0.4973	-0.0035	-0.0072	0.9413	0.1019	0.9287	0.0242	-0.0246	0.0196

Los resultados muestran que en el caso extremo de máximo nivel de ruido en los tiempos de arribo ( $\sigma = 18\text{ms}$ ), los parámetros  $B_o^{-1}A_o$  ( $U$ ) y  $T_o$  se obtuvieron con errores bajos (menores a 3%), indicando la buena estabilidad de los parámetros.

Al perturbar a nivel máximo los tiempos en *zero-offset* se halló que el  $\vec{p}_o$  estimado no se desvió significativamente de su valor verdadero, mientras que  $D_o^{-1}C_o$  se calculó con un error de 10%. Para disminuir ese nivel de incertidumbre los tiempos *zero-offset* deben ser calculados a partir del ajuste de datos en configuración CMP. En general los resultados indican que a mayor

error en estimar los tiempos (*picking*) mayor error en la determinación de los parámetros.

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo se muestra el procedimiento para estimar la función característica de los tiempos de tránsito en la aproximación hiperbólica usando para ello un conjunto de tiempos de reflexión registrados en cobertura múltiple. Un análisis de sensibilidad sobre el procedimiento de estimación de la función característica indica que se pueden conocer los parámetros de esta

función con un pequeño margen de error, el cual esta ligado a la calidad de los datos colectados.

La función estimada representa los tiempos de eventos de reflexión en la vecindad del rayo central en el rango de offsets donde es valida la corrección NMO.

**AGRADECIMIENTOS**

Este trabajo es un resultado parcial obtenido durante mis estudios conducentes a Ph.D. en la Universidad Federal de Para en Brasil, bajo la dirección de los Doctores Walter Sollner y Peter Hubral a quienes manifiesto un gran agradecimiento por sus valiosas ideas y apoyo durante el desarrollo del trabajo, así como en la sustentación del mismo.

**REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS**

**Arthanari, T. S. & Y. Dodge.** (1981): Mathematical Programming in Statistics. J. Wiley and Sons.  
**Bortfeld, R.** (1989): Geometrical Ray Theory: Rays and Traveltimes in Seismic Systems. Geophysics **54**:342-349.  
**Bortfeld, R., & R.M. Kemper.** (1991): Geometrical Ray Theory: Line Foci and Point Foci in the Anterior Surface of Seismic Systems: Geophysics **56**:806-811.  
**Bortfeld, R., & M. Kiehn.** (1992): Reflection Amplitudes and Migration Amplitudes, Geophys. Prospect. **40**:873-884.  
**Cerveny, V., L. Klimes & V. Psencik.** (1988): Complete Seismic-Ray Tracing in 3-D Structures. D. Doornbos Ed. Seismological Algorithms. Academic Press.  
**Dantzig, G. B.** (1963): Linear Programming and Extensions. Princeton University Press.  
**Menke, W.** (1973): Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory. Academic Press.  
**Ursin, B.** (1982): Quadratic Wavefront and Traveltime Approximations in Homogeneous Layered Media with Curved Interfaces. Geophysics, **47**:1012-1021.

**APENDICE A**

**SOLUCION DEL PROBLEMA INVERSO**

Sea el sistema algebraico lineal de n-incógnitas  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  relacionadas a través del sistema acoplado de r-ecuaciones dado por:

$$\begin{aligned} g_{11}m_1 + g_{12}m_2 + \dots + g_{1n}m_n &= d_1 \\ g_{21}m_1 + g_{22}m_2 + \dots + g_{2n}m_n &= d_2 \\ \vdots & \\ g_{r1}m_1 + g_{r2}m_2 + \dots + g_{rn}m_n &= d_r \end{aligned} \tag{A-1}$$

Donde  $g_{ij}$  y  $b_i$  tienen valores conocidos.

Cuando el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas el problema se dice que es sobredeterminado. Matricialmente el sistema de ecuaciones A1 se representa así:

$$G\bar{m} = \bar{d} \tag{A-2}$$

La solución consiste en estimar los parámetros del modelos dado por  $\bar{m}^{est}$ , de modo que los datos previsibles  $\bar{d}^{pre}$  se aproximen lo mejor posible a los datos observados  $\bar{d}^{obs}$ . Sus diferencias se expresan por el vector de error  $\bar{\epsilon} = \bar{d}^{obs} - \bar{d}^{pre}$ , siendo la mejor solución aquella que genere el menor error medido a través de la norma del error  $\|L(\bar{\epsilon})\|$ . Las normas más usadas son la de error absoluto mínimo y la de error cuadrático medio mínimo definidas respectivamente como:

$$\|L_1(\bar{\epsilon})\| = \sum_i |\epsilon_i| \text{ y } \|L_2(\bar{\epsilon})\| = \sqrt{\sum_i \epsilon_i^2}$$

Para cada norma se supone que los datos se comportan según un tipo de estadística, así para la norma 2 los datos obedecen a una distribución de Gauss y en este caso la solución al sistema A-2 viene dado por el método de la matriz inversa generalizada de Moore-Penrose (**Menke, 1987**):

$$G^t G\bar{m} = G^t \bar{d} \tag{A-3}$$

el superíndice t indica traspuesta. Suponiendo que existe la matriz inversa  $(G^t G)^{-1}$  se obtiene:

$$\bar{m}^{est} = (G^t G)^{-1} G^t \bar{d} \tag{A-4}$$

En el caso de la norma 1, para el sistema A-2 la solución se establece a partir de su representación como un problema de programación lineal (**Arthanari & Dodge, 1981**). La representación según la teoría de investigación de operaciones viene dado por:

Minimizar  $\sum \|\epsilon_i\|$

Sujeto a:  $G\bar{m} - \bar{\epsilon} = \bar{d}$  (A-5)

El cual fue resuelto por el denominado método Simplex o Simplex revisado de la programación lineal (**Dantzig, 1963**).

Generalmente los datos contienen ruido que causa error al estimar los parámetros del modelo, si los datos tiene asociada una función de distribución caracterizada por

una matriz de covarianza dada por  $[\text{cov}(\bar{m})] = M\bar{d}M$ , donde  $M$  es la matriz inversa generalizada de Moore-Penrose.

Si los datos no están correlacionados y tienen una varianza  $\sigma_d^2$  entonces la solución que genera el menor error cuadrático tendrá una matriz de covarianza dada por:

$$[\text{cov}(\bar{m})] = [(G'G)^{-1}G]\sigma_d^2[(G'G)^{-1}G]$$

que resulta finalmente en:

$$[\text{cov}(\bar{m})] = \sigma_d^2[G'G]^{-1} \quad (\text{A-6})$$

La expresión A-6 indica que la matriz de covarianza de los parámetros esta controlada por la matriz de covarianza de los datos y por la matriz inversa generalizada.

La introducción de información "a priori" garantiza la obtención de la solución en el problema de mínimos cuadrados, esa información es una restricción sobre los valores que tomarán los parámetros. Esto se presenta como el caso donde un parámetro debe tomar un valor constante conocido o multiplicado de una matriz de pesos ponderados, dando un mayor valor a aquellos que presentan mayor estabilidad.

En el caso particular de ajuste a una parábola la ecuación A-2 se expresa en forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

El cálculo de  $\bar{m}$  por mínimos cuadrados de A-4 según la inversa generalizada A-4, será:

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} n & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum d_i \\ \sum z_i d_i \\ \sum z_i^2 d_i \end{bmatrix}$$