

La teoría del rayo paraxial en la sismica de pozo: Aproximación de segundo orden en los tiempos de tránsito

LUIS ALFREDO MONTES VIDES

Profesor asociado

Departamento de Geociencias; Universidad Nacional de Colombia - Facultad de Ciencias

RESUMEN

Utilizando la aproximación del rayo paraxial de la llamada óptica geométrica se encontró un conjunto de expresiones que caracterizan los eventos de reflexión que han sido registrados en detectores situados dentro de un pozo. Una de ellas es la función característica que estima los tiempos de tránsito de eventos VSP de fuentes situadas en la cercanía de la boca del pozo, la cual puede ser conocida numéricamente a partir de la medición de al menos seis tiempos de tránsito apropiadamente seleccionados. Se deducen expresiones que permiten transformar la función característica de tiempos de tránsito de los eventos de reflexión de la sismica de pozo en la equivalente función característica de tiempos de tránsito obtenida en configuración punto medio común, correspondiente a eventos registrados en superficie. Este resultado hará posible la solución del problema inverso en profundidad en la vecindad del pozo, mediante la aplicación de técnicas de continuación hacia abajo de la función de tiempos de tránsito.

Los resultados son válidos en la aproximación de segundo orden de los tiempos de tránsito en modelos constituidos por capas homogéneas e isotrópicas con cualesquiera velocidades y densidades, separadas por interfases suaves arbitrariamente curvadas.

PALABRAS CLAVE: SÍSMICA DE POZO, SÍSMICA GEOMÉTRICA, TEORÍA DEL RAYO, CONTINUACIÓN HACIA ABAJO, PROBLEMA INVERSO, TIEMPOS DE TRÁNSITO.

ABSTRACT

Using the paraxial ray approximation of the named geometric optics a set of numerical expressions were found, these expressions characterize reflecting events recorded in detectors placed in a borehole. One of them is the characteristic travel time function which estimates the travel times of reflecting events in a vertical seismic profile configuration with sources placed in surface in the vicinity of the boreholes's top. This characteristic VSP function can be numerically estimated using at least six measurements of appropriated selected travel times. Others expressions were deduced to allow the transformation of the VSP travel time function in the equivalent CDP travel time function corresponding to reflecting events recorded in surface in a common midpoint array. The use of this result will make possible to solve the inverse problem in the neighborhood of the borehole by the application of downward continuation techniques of the travel time function.

The results are valid only in the approximation of the second order of the travel times in models which consist of a pile of homogeneous and isotropic layers of any velocities and densities, separated by smooth interfaces arbitrarily curved.

KEY WORDS: VERTICAL SEISMIC PROFILE, GEOMETRIC SEISMIC, RAY THEORY, DOWNWARD CONTINUATION, INVERSE PROBLEM, TRAVEL TIMES.

INTRODUCCIÓN

Uno de los pasos importantes en el procesamiento de datos para la obtención de imágenes del subsuelo es la transformación de datos desde el dominio de datos obtenidos en la configuración de sismica de pozo - VSP (*Vertical Seismic Profile*) a la configuración de adquisición de datos en superficie CMP (*common midpoint*). Así se obtienen tiempos de tránsito de rayos recibidos en superficie a partir de datos obtenidos en un pozo para su proceso e interpretación.

Usando la teoría del rayo paraxial en la aproximación de segundo orden de los tiempos de tránsito, se presenta un desarrollo teórico que permite llevar a cabo la transformación entre los dominios mencionados. Como resultado se obtiene un conjunto de ecuaciones que permite transformar los tiempos de tránsito VSP a tiempos de tránsito de eventos de reflexión registrados en superficie.

La solución del problema inverso se obtiene a partir de la solución de este conjunto de ecuaciones, conociendo así las velocidades de intervalo y la geometría de las interfaces en la vecindad del rayo central (Montes, 1988 y Montes, 1999).

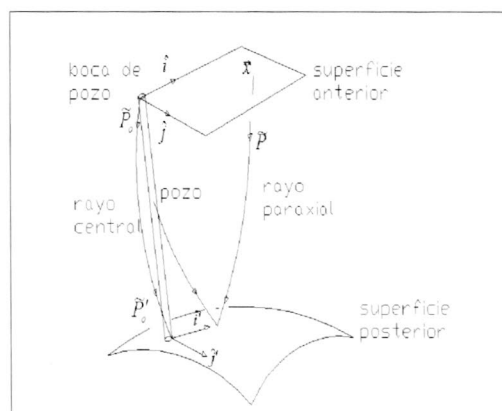


Figura 1. Sistema sísmico con el pozo, interceptando las superficies anterior y reflectora. Por simplicidad no se muestran otras interfaces. El rayo central queda definido entre estos dos puntos de intersección. El rayo paraxial parte de la fuente en la superficie anterior y alcanza al geófono situado en el pozo luego de reflejarse en la superficie posterior

En consistencia con los planteamientos de la teoría del rayo paraxial (Bortfeld, 1989), la Tierra se modela como una superposición de capas homogéneas, sin restricciones sobre sus valores de velocidad y densidad. Estas capas están separadas por interfaces suaves arbitrariamente curvadas y aproximadas por superficies de segundo orden. El modelo sísmico, como se muestra en la figura 1, está limitado en su parte superior por la superficie de la Tierra llamada superficie anterior, y en su parte inferior por la superficie donde tienen lugar las reflexiones denominadas superficie posterior. Un pozo arbitrariamente curvado atraviesa el sistema sísmico. El rayo que inicia en la boca del pozo sobre la superficie anterior e incide sobre la superficie posterior se selecciona como rayo central, aclarando que el rayo central no es en general un rayo normal, y se define únicamente por dos puntos en los extremos superior e inferior del sistema sísmico. El punto inicial del rayo central define el sistema de coordenadas (i, j, k) y el punto final, a su vez, el sistema cartesiano (i', j', k') . Los planos (i', j') y (i, j) son tangentes a las superficies anterior y posterior en los puntos de intersección con el rayo central.

TIEMPOS DE TRÁNSITO ASOCIADOS A RAYOS PARAXIALES

Cualquier rayo en la vecindad del rayo central se describe por cuatro vectores bidimensionales, sobre la superficie anterior por los vectores posición $\vec{x}(i, j)$ y $\vec{p}(i, j)$ lentitud, y en la superficie posterior por los correspondientes vectores $\vec{x}'(i', j')$ y $\vec{p}'(i', j')$. Estos vectores bidimensionales se obtienen proyectando los respectivos vectores tridimensionales sobre los planos tangentes en los puntos de intersección del rayo central con las superficies anterior y posterior, eliminando así un componente en ellos.

En la aproximación de segundo orden de los tiempos de tránsito, los vectores posición y lentitud sobre la superficie posterior y anterior están relacionados a través del operador matriz de transferencia, dados por la relación:

$$\begin{bmatrix} \vec{x}' \\ \vec{p}' - \vec{p}'_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_o & B_o \\ C_o & D_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} - \vec{p}_o \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde A_o, B_o, C_o, D_o son matrices jacobianas 2x2.

Se observa que aparece un término \vec{p}' adicional en la ecuación (1), que es igual a cero por ser rayo normal en la equivalente expresión de Bortfeld (1989).

La ecuación (1) permite expresar \vec{p} y \vec{p}' como funciones de \vec{x} y \vec{x}' exclusivamente

$$\vec{p}' = \vec{p}'_o + C_o \vec{x} - D_o B_o^{-1} A_o \vec{x} + D_o B_o^{-1} \vec{x}' \quad (2)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_o - B_o^{-1} A_o \vec{x} + B_o^{-1} \vec{x}' \quad (3)$$

Todo evento de reflexión se compone de dos rayos transmitidos, uno que inicia en la posición \vec{x} con lentitud inicial \vec{p} , y el otro que parte de \vec{x}'' con lentitud inicial \vec{p}'' , arribando ambos al mismo punto final $(\vec{x}'')' = \vec{x}'$ situado sobre la superficie posterior, donde se cumple la ley de Snell $(\vec{p}'')' = -\vec{p}'$.

Aplicando la ecuación (1) al segundo rayo y usando las pareja de condiciones $(\vec{x}'')' = \vec{x}'$ y $(\vec{p}'')' = -\vec{p}'$ se obtiene una expresión para el vector lentitud inicial del rayo reflejado

$$\vec{p}'' = \vec{p}_o - D_o^{-1} C_o \frac{1}{2} (\vec{x}'' + \vec{x}) - B_o^{-1} A_o \frac{1}{2} (\vec{x}'' - \vec{x}) - D_o^{-1} \vec{p}'_o \quad (4)$$

así como para el vector lentitud inicial del rayo transmitido

$$\vec{p} = \vec{p}_o - D_o^{-1} C_o \frac{1}{2} (\vec{x}'' + \vec{x}) + B_o^{-1} A_o \frac{1}{2} (\vec{x}'' - \vec{x}) - D_o^{-1} \vec{p}'_o \quad (5)$$

Se observa que la diferencia entre estos vectores, lentitud inicial del rayo transmitido y del reflejado, es independiente del vector punto medio común $\frac{1}{2} (\vec{x}'' + \vec{x})$, mientras la suma de tales vectores es independiente del vector *offset* medio $\frac{1}{2} (\vec{x}'' - \vec{x})$.

En la situación *zero-offset*, cuando $\vec{x}'' = \vec{x}$, sobre la superficie anterior los dos rayos poseen igual lentitud $\vec{p}'' = \vec{p}$, siendo ésta en general diferente de \vec{p}_o .

TIEMPO DE TRÁNSITO DEL RAYO TRANSMITIDO

Para determinar el tiempo $t(\vec{x}, \vec{x}')$ que toma al rayo ir desde la superficie anterior a la posterior, se usa la ecuación principal de Hamilton (Bortfeld, 1989):

$$dt(\vec{x}, \vec{x}') = \vec{p}' \cdot d\vec{x}' - \vec{p} \cdot d\vec{x}, \quad (6)$$

la cual representa el diferencial de tiempo de tránsito desde cualquier punto en la superficie anterior a cualquier punto en la superficie posterior. De (6) se obtiene \vec{p} a partir de la derivada parcial de $t(\vec{x}, \vec{x}')$ respecto a \vec{x} , mientras \vec{p}' se obtiene mediante la derivación parcial respecto a \vec{x}' . Usando las cuatro ecuaciones diferenciales correspondientes, el tiempo de viaje de un rayo paraxial desde la superficie anterior hasta la posterior será:

$$t(\vec{x}, \vec{x}') = t_o - \vec{p}_o \cdot \vec{x} + \vec{p}'_o \cdot \vec{x}' + \frac{1}{2} \vec{x}' \cdot D_o B_o^{-1} \vec{x}' + \frac{1}{2} \vec{x} \cdot B_o^{-1} A_o \vec{x} - \vec{x} \cdot B_o^{-1} \vec{x}' \quad (7)$$

t_o : tiempo que toma el rayo central para atravesar el sistema sísmico.

En el caso de la sísmica de pozo o VSP, un rayo paraxial viajará desde cualquier punto en la superficie de la Tierra, en la cercanía del rayo central, hasta un detector situado dentro del pozo que coincida con una superficie reflectora en particular, en cuyo caso $\vec{x}' = \vec{0}$ y el tiempo de viaje será según la ecuación (7).

$$t(\vec{x}, \vec{x}' = \vec{0}) = t_o - \vec{p}_o \cdot \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x} \cdot B_o^{-1} A_o \vec{x} \quad (8)$$

expresión que puede estimarse numéricamente a partir de por lo menos seis tiempos para seis fuentes distintas, ya que contiene seis incógnitas.

TIEMPO DE TRÁNSITO DEL RAYO REFLEJADO

Sea la ecuación principal de Hamilton para el rayo reflejado dada por:

$$dt(\vec{x}, \vec{x}'') = -\vec{p}'' \cdot d\vec{x}'' - \vec{p} \cdot d\vec{x}. \quad (9)$$

La expresión (9) representa el diferencial del tiempo de tránsito de un rayo que parte desde cualquier fuente, en \vec{x} hasta cualquier detector en \vec{x}'' . La derivada parcial de $t(\vec{x}, \vec{x}'')$ respecto a \vec{x} provee el vector lentitud \vec{p} en la posición de la fuente, mientras que la derivación respecto a \vec{x}'' da el vector lentitud \vec{p}'' en la posición del receptor.

Al expresar el par (\vec{p}, \vec{p}'') por el correspondiente par de ecuaciones (4) y (5), usando además las cuatro ecuaciones diferenciales correspondientes, se obtiene la expresión para el tiempo de tránsito del rayo reflejado:

$$t(\vec{x}, \vec{x}'') = t_o - 2\vec{p}_o \cdot \frac{1}{2}(\vec{x}'' + \vec{x}) + 2D_o^{-1}\vec{p}'_o \cdot \frac{1}{2}(\vec{x}'' + \vec{x}) + \frac{1}{2}(\vec{x}'' + \vec{x}) \cdot D_o^{-1}C_o \frac{1}{2}(\vec{x}'' + \vec{x}) + \frac{1}{2}(\vec{x}'' - \vec{x}) \cdot B_o^{-1}A_o \frac{1}{2}(\vec{x}'' - \vec{x}) \quad (10)$$

Al considerar el caso del detector situado en el pozo en el punto $\vec{x}'' = \vec{0}$, los tiempos para un único receptor común vendrán dados por:

$$t(\vec{x}, \vec{x}'' = \vec{0}) = t_o - 2(\vec{p}_o - 2D_o^{-1}\vec{p}'_o) \cdot \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x} \cdot (D_o^{-1}C_o + B_o^{-1}A_o) \frac{1}{2}\vec{x} \quad (11)$$

expresión estimable numéricamente a través de al menos seis medidas en tiempos de tránsito en configuración receptor común VSP.

TRANSFORMACIÓN DEL ESPACIO VSP A ESPACIO CDP

Se busca transformar los tiempos de tránsito $t_{VSP}(\vec{x}'', \vec{x})$, correspondientes a rayos reflejados en las interfaces y registrados en los detectores situados dentro del pozo, a sus correspondientes a tiempos $t(\vec{x}, \vec{x}'')$ de reflexión registrados en superficie en levantamientos

convencionales en configuración punto medio común. Esta operación corresponde a una transformación de los datos desde un espacio VSP a un espacio CDP.

En la figura 2 se ilustra un levantamiento VSP con un sistema sísmico donde no se muestran las interfaces intermedias para claridad del mismo. Entre las superficies limitadoras superior e inferior del modelo se incluye un plano virtual, virtual en el sentido de no separar medios con propiedades litológicas distintas, la cual es perpendicular al rayo central y contiene el detector del pozo situado en la posición \vec{x}''_* en el nuevo sistema de coordenadas definidas para dicho plano.

El vector posición \vec{x}''_* es un vector bidimensional definido en el sistema cartesiano \hat{i}_*, \hat{j}_* que tiene su origen en el punto de intersección del rayo central con el plano. Cuando el rayo reflejado pasa por el pozo en la posición, el tiempo de tránsito medido en el receptor del pozo puede expresarse como la diferencia:

$$t_{VSP}(\vec{x}, \vec{x}''_*) = t(\vec{x}, \vec{x}'') - t(\vec{x}'', \vec{x}''_*) \quad (12)$$

donde $t(\vec{x}, \vec{x}'')$ representa el tiempo de reflexión de un rayo que parte de \vec{x} en la superficie y es detectado en un receptor situado en \vec{x}'' sobre la superficie, mientras $t(\vec{x}'', \vec{x}''_*)$ corresponde al tiempo de tránsito desde el detector del pozo posicionado en \vec{x}''_* hasta \vec{x}'' en la superficie. La transformación VSP-CDP puede formularse ahora de la siguiente manera: primero, hallar para una determinada fuente situada en superficie la posición correspondiente del receptor rayo, un rayo entre estas posiciones que pase por la posición en el pozo donde se halle un detector; segundo, estimar el tiempo de tránsito $t(\vec{x}'', \vec{x}''_*)$ del rayo transmitido, y tercero, adicionar el tiempo de tránsito $t(\vec{x}'', \vec{x}''_*)$ al tiempo de tránsito medido en el pozo $t_{VSP}(\vec{x}, \vec{x}''_*)$.

La relación entre las posiciones \vec{x} y \vec{x}''_* está establecida a través de la relación:

$$\vec{x}''_* = A_{ok}\vec{x}'' + B_{ok}(\vec{p}'' - \vec{p}_o) \quad (13)$$

Esta última relación determina la transformación de la pareja de vectores posición y lentitud desde la superficie de la tierra hasta la posición \vec{x}''_* en el pozo. Las matrices A_{ok} y B_{ok} están conformadas por parámetros que dependen exclusivamente de las características del medio situado por encima del receptor. Al expresar el vector lentitud \vec{p}'' de la relación (13) por el vector lentitud de la ecuación (4) del rayo reflejado, se obtiene:

$$\vec{x}''_* = A_{ok}\vec{x}'' + B_{ok}[-D_o^{-1}C_o \frac{1}{2}(\vec{x}'' + \vec{x}) - B_o^{-1}A_o \frac{1}{2}(\vec{x}'' - \vec{x}) - D_o^{-1}\vec{p}'_o] \quad (14)$$

donde se obtiene el rayo transmitido como parte del rayo reflejado que pasa por el punto \vec{x}''_* situado en el pozo.

El tiempo de tránsito $t(\vec{x}'', \vec{x}''_*)$ necesario para la transformación VSP-CDP se obtiene a partir de la ecuación (7); basado en el conocimiento previo de las matrices que transmiten el rayo a través de las capas situadas encima del detector en el pozo, es:

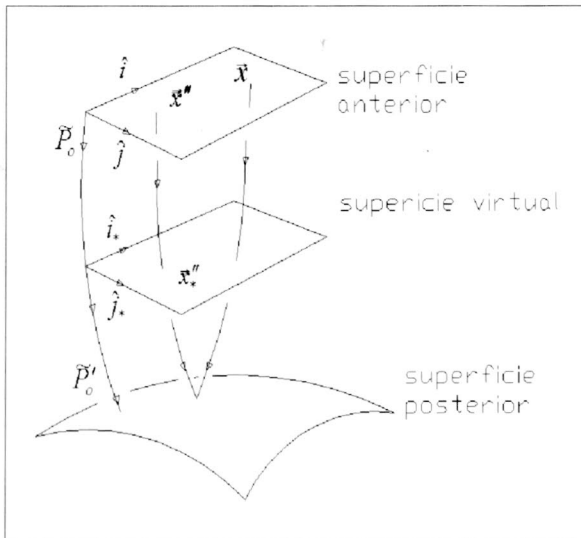


Figura 2. El sistema sísmico muestra la superficie virtual plana perpendicular a la Trayectoria del rayo central, coincidiendo con la posición \vec{x}''_* del geófono en el pozo

$$T(\bar{x}'' , \bar{x}_*'') = t_{ok} - \bar{p}_o \cdot \bar{x}'' + \bar{p}'_o \cdot \bar{x}_*'' + \frac{1}{2} \bar{x}_*'' \cdot D_{ok} B_{ok}^{-1} \bar{x}_*'' + \frac{1}{2} \bar{x}'' \cdot B_{ok}^{-1} A_{ok} \bar{x}'' - \bar{x}'' \cdot B_{ok}^{-1} \bar{x}_*'' \quad (15)$$

donde representa el tiempo de tránsito del rayo central para llegar hasta el detector.

La expresión (15) representa el tiempo necesario para completar el tiempo VSP en tiempo de tránsito CDP de acuerdo con la ecuación (12).

CONCLUSIONES

Se dedujeron funciones estimables numéricamente con tiempos de tránsito registrados en detectores colocados en un pozo, así como aquellas que permiten su transformación en funciones equivalentes de eventos registrados en superficie.

Las matrices A_{ok} y B_{ok} , como parámetros de la función característica, están constituidas por elementos que dependen exclusivamente de las propiedades elastodinámicas del medio que está situado encima del reflector.

Según Kahn (1988) las velocidades pueden determinarse utilizando la matriz de curvatura de los tiempos de tránsito $B_{0N}^{-1} A_{0N}$ de una configuración punto medio común situada sobre la última superficie antes de la interfaz reflectora.

La continuación hacia debajo de la función tiempo de tránsito (Montes, 1988) permite conocer la función tiempos de tránsito sobre la interfaz anterior de la última capa del sistema sísmico y, en consecuencia, la solución del problema inverso, que se manifiesta en el conocimiento de las velocidades de intervalo y la geometría de las interfaces en profundidad.

Las expresiones (13), (14) y (15) permiten relacionar la información sísmica en la vecindad del pozo con la información sísmica obtenida en configuraciones convencionales, estableciendo correlaciones numéricas entre la información de pozo y su entorno.

Los resultados logrados son válidos en la aproximación de segundo orden de los tiempos de tránsito en modelos constituidos por capas homogéneas e isotrópicas con cualesquiera velocidades y densidades, separadas por interfaces suaves arbitrariamente curvadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORTFELD, R. 1989: Geometric ray theory: Rays and travel times in seismic systems. *Geophysics*, V54, 342-349.

KAHN, S. U. 1988: Die Aufdeckung der Mehrdeutigkeiten in der Reflexionsseismik: Dissertation. Tech. Univ. Clausthal. Germany.

MONTES, L. A. 1988: Determinação das velocidades intervalares usando a teoria do raio paraxial: Aproximação de segunda ordem dos tempos de trânsito. Ph. D. thesis. Universidade Federal do Pará. UFPa, Brazil.

MONTES, L. A. 1999: Estimación de las velocidades de intervalo a través de la función de tiempos de difracción de la sísmica geométrica. *Geología Colombiana*, 24, 177-183.