

Revista Colombiana de Estadística
N° 3 - 1981

MODELOS MATEMATICOS ELEMENTALES EN PROYECCIONES DE POBLACION

David Ospina Botero

Profesor Asistente
Universidad Nacional

Introducción. Uno de los más importantes problemas que los países tiene que enfrentar es el crecimiento poblacional. Las tasas de incremento que prevalecieron durante la temprana historia humana solo tuvieron ligeras desviaciones. Sin embargo, a partir del siglo XIX las tasas de población han estado creciendo hasta tal punto que todos los gobiernos en el mundo están preocupados. El control natal no es suficientemente conocido y las tasas de mortalidad han venido decreciendo en toda parte [1]. Este problema ha motivado el estudio científico del número de seres humanos. En el siglo XIII Thomas Malthus fué la primera persona en proponer un modelo matemático [2], pero no fué hasta después de 1946 que este modelo alcanzó completo desarrollo [3]. En este corto estudio serán examinados los modelos más sim-

ples en las proyecciones poblacionales, como un todo. El propósito de este artículo es ayudar a aquellos estudiantes interesados en el problema del crecimiento poblacional y que no estén familiarizados con él.

Inicialmente los métodos aritméticos, geométricos, exponencial y exponencial modificado serán explicados. Más adelante, estos métodos serán aplicados a un caso concreto: *Colombia*.

Se ha seleccionado nuestro país porque él es representativo de una nación en desarrollo. Además, su situación demográfica muestra características muy especiales que serán discutidas en éste artículo. No es útil considerar un país desarrollado porque tales países no tienen tasas de crecimiento tan inestables como las de los países en desarrollo. Finalmente, algunas recomendaciones serán hechas basadas en el caso analizado.

CAPITULO I

MÉTODOS:

El medio más exacto para estimar población, demanda la existencia de datos relacionados con cada variable involucrada: Número de nacimiento, muertes y migraciones. Sin embargo, ésto no es posible siempre y la falta de tales datos obliga a los demógra-

fos a utilizar diferentes métodos de proyección. En estos casos los datos de los censos con usualmente asequibles y los métodos aritmético y geométrico casi siempre dan buenos resultados [4], [5]. No obstante, el modelo que se ajusta mejor a los cambios reales del crecimiento poblacional es el exponencial, cuando se hacen supuestos adecuados.

1.1 Método aritmético.

El método aritmético asume que el cambio poblacional anual (o por unidad de tiempo considerada), en un área o región específica, es constante. Si la población en el tiempo 0 es P_0 y la población, en la misma área, n años después es P_n . Entonces, la fórmula para obtener el incremento anual (R_A) está dada por

$$R_A = \frac{P_n - P_0}{n}$$

(ver [4] p.81), [6] y [7].

Las estimaciones de la población en el tiempo t , P_t serán:

$$P_t = P_0 + t R_A \quad (t > n)$$

$$P_t = P_n + (t-n) R_A$$

(t y n son números positivos).

A través de este método pueden obtenerse proyecciones lógicas cuando la tasa de crecimiento es decreciente (por ejemplo, Estados Unidos durante la década de los 60) (Ver [5] pp.553-554), y las predicciones son he-

chas para períodos no mayores de 5 años, ya que el error de estimación es directamente proporcional a la cantidad de tiempo.

1.2 Método geométrico.

El método geométrico asume un porcentaje constante de cambio por unidad de tiempo. Por tanto, si la población en el tiempo n ha aumentado a P_n ,

$$P_n = P_0(1+R_G)^n$$

donde R_G es la tasa geométrica (ver [7] p.35).

R_G puede ser hallada en la última fórmula tomando logaritmo en ambos lados de la igualdad.

$$\log P_n = \log P_0 + n \log(1+R_G)$$

$$y \quad R_G = \text{antilog} \left\{ \frac{\log P_n - \log P_0}{n} \right\} - 1$$

Sin embargo, se ha podido mostrar que esta tasa no es adecuada cuando son necesarias estimaciones por largos períodos de tiempo. Además, se han logrado pobres resultados cuando la tasa de crecimiento es decreciente, o en casos cuando la densidad de población en una región dada es tan alta que es de esperarse una tasa decreciente de cambio a largo plazo (ver [4] p.82)

Por otra parte, cuando las proyecciones se hacen para un período corto, esta tasa es preferida a la aritmética. La tasa geométrica debe ser escogida cuando el incremento poblacional es directamente pro

porcional al número de habitantes en un momento dado.

1.3 Método exponencial (Modelo de Malthus).

Ya se ha dicho que Malthus fué la primera persona en desarrollar un modelo matemático adecuado de crecimiento poblacional. Su preocupación respecto de la limitación de los recursos económicos y del excesivo incremento de la población humana lo motivó suficientemente para desarrollarlo.

Su modelo puede ser expresado como una ecuación diferencial de primer orden, así:

$$\frac{dP}{dt} = R_E P$$

donde $\frac{dP}{dt}$ es la derivada de la población con respecto al tiempo, y R_E es el incremento poblacional (ver [3] p.23).

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$P_t = P_0 e^{Rt}$$

donde P_0 = Población en el tiempo 0

P_t = Población en el tiempo t

e = Constante matemática (aprox. 2,7183) [8].

Para un período fijo n , esta ecuación puede ser expresada como:

$$P_n = P_0 e^{Rn}$$

El valor de R_E será entonces:

$$R_E = \frac{\ln P_n - \ln P_0}{n} \quad (\text{ver [6] p.379})$$

donde \ln = Logaritmo Neperiano.

Puede demostrarse que la tasa exponencial es el límite de la tasa geométrica constante cuando la última expresión se aplica a cada infinitesimal de tiempo.

1.4 Un caso Especial de Exponencial Modificada:

En aquellos casos cuando el número de habitantes en un país determinado (o ciudad) depende únicamente del número de nacimientos y muertes, es muy útil modificar el último modelo de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dt} = (a + bt)P$$

donde $(a+bt)$ es una ecuación de primer orden que expresa las tasas geométricas como una función del tiempo. Muy a menudo esta ecuación se ajusta por el principio de los mínimos cuadrados [9]

La solución de la ecuación anterior es:

$$P_t = P_0 e^{(at+bt^2)}$$

Una gran desventaja de este método es que el error en la predicción aumenta de una manera desorbitante

cuando el período de tiempo es muy largo.

CAPITULO II

EL CASO COLOMBIANO.

La importancia de considerar el caso de Colombia obedece a que nuestro país tiene características demográficas similares a la mayoría de los países latinoamericanos. Por otra parte, es conveniente recalcar que Colombia es una de las pocas naciones en desarrollo donde el incremento en la tasa de población ha disminuído.

El impacto de la tecnología ha causado:

- a) Más nacimientos debido al mejoramiento en la distribución del servicio médico,
- b) menos nacimientos debido al cambio en las actividades sociales (mayor control natal),
- c) más muertes debido a la existencia de más pesticidas y a las actitudes de la clase media (más trabajo y, por tanto, más enfermedades del corazón por ejemplo),
- d) menos muertes infantiles debido a una mejor distribución del cuidado médico.

Las últimas consecuencias han dado como resultado un menor número de nacimientos y una mortalidad

fija [10].

Más aún, el demorado proceso para registrar las variables concernientes al crecimiento poblacional (número de nacimientos, muertes y migraciones) no permite predicciones diferentes de aquellas que consideran la población globalmente.

Las estimaciones serán hechas para los años 1980, 1990 y 2000. En todos los casos, menos para el último (Exponencial Modificada), los dos últimos censos serán utilizados.

TABLA DE DATOS

Año	Población a mediados del año (De acuerdo a los censos) [11] [12]	
1951	11'548.172	
1964	17'484.508	
1973	23'004.499	

TABLA DE ESTIMACIONES DE POBLACION

Método	1980	1990	2000
Aritmético	27'297.823	33'431.143	39'564.463
Geométrico	28'485.472	38'655.393	52'456.191
Exponencial	28'479.650	38'636.205	52'414.841
Exp.Modificado	28'193.042	36'454.876	45'653.269

TASAS ESTIMADAS

(Período 1964-1973)

Método Aritmético:	$R_A = 613.332$
Método Geométrico:	$R_G = 0,0310$
Método Exponencial:	$R_E = 0,0305$
Método Exp.Modificado:	$R_x = 0,03242-0.00016x$

*

CONCLUSIONES.

De acuerdo con el ejemplo, todos los métodos dan resultados similares cuando las estimaciones son hechas para períodos menores de 5 años. Por otro lado, para períodos largos, puede observarse que los métodos exponencial y geométrico dan valores que difieren sólo ligeramente y los cuales son bastante diferentes a aquellos obtenidos a través de los métodos aritmético y exponencial modificado. Los últimos dos producen resultados bastante similares cuando las proyecciones son hechas a largo plazo.

Sin embargo, los métodos aritmético y geométrico deberían ser seleccionados debido a su simplicidad. En aquellos casos cuando la tasa de crecimiento está disminuyendo es más adecuado el método aritmético. En otros casos, cuando la tasa está creciendo, el método geométrico debería utilizarse. Es bueno recordar que estos métodos deberían ser usados so-

lamente cuando no existen suficientes datos acerca de muertes, nacimientos y migraciones. Cuando estos están disponibles, el estudiante debe hacer uso de ellos. Otros métodos, naturalmente, deberían ser empleados en tales circunstancias.

* * *

BIBLIOGRAFIA

- [1] Freedman, R. y Bevelson, B., *The human population*, Scientific American, 231 (Sep. 1974), pag. 31.
- [2] Malthus, T.R., *An essay on the principle of population* London, Reeves and Turner, (1878) pag. 21.
- [3] Pollard, J.H., *Mathematical Models for the growth of human populations*, Cambridge, Great Britain: Cambridge at the University Press, (1973), p. 60.
- [4] Wolfenden, H.H., *Population Statistics and their compilation*, Chicago: The Univ. of Chicago Press, (1954), pag. 80.
- [5] Smith, T.L. and Zopf, P.E. Jr., *Demography, principles and methods*, Philadelphia, F.A. Davis Company, (1970), pag. 550-552.
- [6] Bureau of the Census, U.S. *The Methods and Materials of Demography*, Vol. 2, "Population Change", By Henry S. Shryock, Jacob S. Siegel and Associates, Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, (1975), pp. 377-378.
- [7] Bogue, D.J., *Principles of Demography*, New York, John Wiley and Sons. Inc. (1969), pp. 32-33.

- [8] Boyce, W.E., and Diprima, R.C., *Elementary differential Equations and boundary value problems*, New York, John Wiley and Sons, Inc., (1965), pp.51-52.
- [9] Johnston, S.J., *Econometric Methods*, Tokyo, Mc Graw-Hill Kogakusha, Ltd., (1972), pp.14-17.
- [10] "Situación Demográfica y movimiento de la Población", *América en Cifras*, Washington; Secretaría General de la O.E.A., (1974), pp.86-105.
- [11] "National Population Census-Series", *Statistical Abstracts of Latin America*, Los Angeles: James W. Wilkie, UCLA Latin American Center Publications, (1976), p.66.
- [12] "Ajuste del Censo de 1973", *Boletín Mensual de Estadística*, N° 308, Bogotá: Departamento Administrativo Nacional de Estadística, Marzo (1977), p.9.

* * *