

## UNA APLICACION DEL METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD EN ASTRONOMIA GALACTICA

*Eduardo Brieva B.*<sup>1</sup>    *Antonio Uribe B.*<sup>2</sup>

### 1. Introducción.

Desde la publicación del libro ya clásico de Trumpler y Weaver (1930) la utilización de la estadística en las disciplinas astronómicas se ha generalizado. Por ejemplo, el estudio de la rotación de la Tierra emplea series de tiempo; el análisis multivariado es una poderosa herramienta de selección y clasificación de objetos astrofísicos, tales como pulsares, cúmulos glo-

---

1 Observatorio Astronómico, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional, Bogotá.

2 Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional, Bogotá.

2.

bulares, cefeidas de período muy corto; los métodos de máxima verosimilitud y Monte-Carlo se aplican al estudio del campo de velocidades estelares en la vecindad del Sol, etc.

Se presenta aquí una aplicación de la inferencia estadística para resolver el problema de la pertenencia de estrellas a los denominados cúmulos abiertos, mediante el método de máxima verosimilitud.

Los cúmulos abiertos, que se hallan distribuidos en el disco de la galaxia, son conglomerados de decenas a centenares de estrellas, en general jóvenes, con una relación gravitacional más estrecha que la existente entre las estrellas del campo que los rodea (Alter et al., 1970). El Catálogo mas reciente (Ling<sup>o</sup> 1980) contiene 1.130 cúmulos. Sus propiedades cinemáticas, fotométricas y espectroscópicas permiten un mejor conocimiento de la distribución estelar en nuestra galaxia, contribuyen al análisis de la evolución de las estrellas, al estudio de la dinámica estelar y de la evolución galáctica. Para ello es de crucial importancia determinar cuales estrellas pertenecen al cúmulo, para luego elaborar un diagrama magnitud-color, o diagrama de Hertzsprung-

Russell, no contaminado, que es el objetivo principal de los estudios astrométricos sobre pertenencia. Todo ésto encuentra una aplicación fundamental, además, en la calibración de la escala de distancias del universo, en la cual el cúmulo de las Híadas juega un papel preponderante (Hanson, 1980).

Así pues, la distinción de las estrellas que pertenecen a un cúmulo abierto, a partir de la observación de una región generalmente rica en estrellas, muchas de las cuales aparecen en el campo considerado sin pertenecer al cúmulo, es uno de los primeros problemas que se debe afrontar para estudiar tales objetos y analizar sus propiedades. A menudo se quiere confirmar o rechazar la pertenencia de cierta clase de estrellas a un cúmulo en particular, por ejemplo, supergigantes, cefeidas u otras variables, estrellas en etapas tempranas de su evolución, "blue-stragglers", etc.

Existen básicamente tres métodos para determinar la pertenencia de estrellas a un cúmulo abierto.

El método fotométrico se vale del diagrama Hertzsprung-Russell para distinguir los miembros del cúmulo. Este método está limitado por la absor-

ción interestelar, difícil de estimar, que modifica la ubicación de las estrellas en el mencionado diagrama.

El método de las velocidades radiales, determinadas por efecto Doppler, ubica en el cúmulo aquellas estrellas cuya velocidad radial no difiere mucho del promedio de la velocidad radial para el cúmulo.

El método de los movimientos propios, una de cuyas modalidades se expone aquí, adscribe al cúmulo ciertas estrellas de la región de acuerdo con un criterio probabilístico.

## 2. Material observacional.

Consideremos la velocidad  $\vec{V}$  de una estrella con respecto al Sol. Esta se descompone en una velocidad radial  $\vec{V}_r$ , cuya magnitud se determina espectroscópicamente por medio del efecto Doppler, y una velocidad  $\vec{V}_t$ , tangencial a la esfera celeste, cuya magnitud solo puede determinarse a través del llamado movimiento propio, conociendo la distancia de la estrella al observador.

El movimiento propio,  $\mu$ , de una estrella de coordenadas  $(\alpha, \delta)$ , se define como el cambio angular anual de su dirección heliocéntrica en la esfera celeste, debido a su velocidad  $\vec{V}_t$ . A su vez  $\vec{V}_t$  puede descomponerse en sus proyecciones según el círculo paralelo al ecuador celeste y el círculo máximo perpendicular al ecuador, en componentes  $(V_t)_\alpha$ ,  $(V_t)_\delta$ . Se definen las componentes  $\mu_\alpha$  y  $\mu_\delta$  del movimiento propio, como los desplazamientos angulares que dan lugar a las expresiones siguientes:

$$(V_t)_\alpha = \mu_\alpha \kappa' \quad (1)$$

$$(V_t)_\delta = \mu_\delta \kappa,$$

siendo  $\kappa$  la distancia a la estrella y  $\kappa'$  el radio del círculo paralelo. Por tanto se cumple:

$$(V_t)_\alpha = (\mu_\alpha \cos \delta) \kappa \quad (2)$$

$$(V_t)_\delta = \mu_\delta \kappa.$$

Las unidades de  $\mu_\alpha$  y  $\mu_\delta$  son segundos de arco por año; para la gran mayoría de las estrellas  $\mu_\alpha$  y  $\mu_\delta$  sólo son apreciables al cabo de muchos años. En el plano tangente generado por  $(V_t)_\alpha$ ,  $(V_t)_\delta$  consideramos las proyecciones de  $\mu_\alpha \cos \delta$

6.

y de  $\mu_\delta$ , que respectivamente se llaman  $\mu_x$  y  $\mu_y$ :

$$\mu_x = \mu_\alpha \cos \delta \quad (3)$$

$$\mu_y = \mu_\delta.$$

La determinación del movimiento propio se logra, tratándose de estrellas débiles, mediante la comparación de dos o más placas fotográficas de la misma región del cielo, obtenidas en observaciones separadas por un lapso de muchos años, preferiblemente bajo las mismas condiciones instrumentales. Como resultado de este proceso <sup>(1)</sup> se obtienen valores de  $\mu_x$  y  $\mu_y$  para las estrellas de la región; estos datos son los que se utilizan en el análisis de pertenencia.

### 3. Distribución de los movimientos propios.

Obtenidos los movimientos propios de la región considerada se elabora un diagrama cartesiano en donde se representan dichos movimientos como puntos de coordenadas  $(\mu_x, \mu_y)$ ; este diagrama se denomina Diagrama Vectorial de Dispersión, DVD. Ver figura 1.

(1) Para los detalles véase por ejemplo Smart (1965), p. 299.

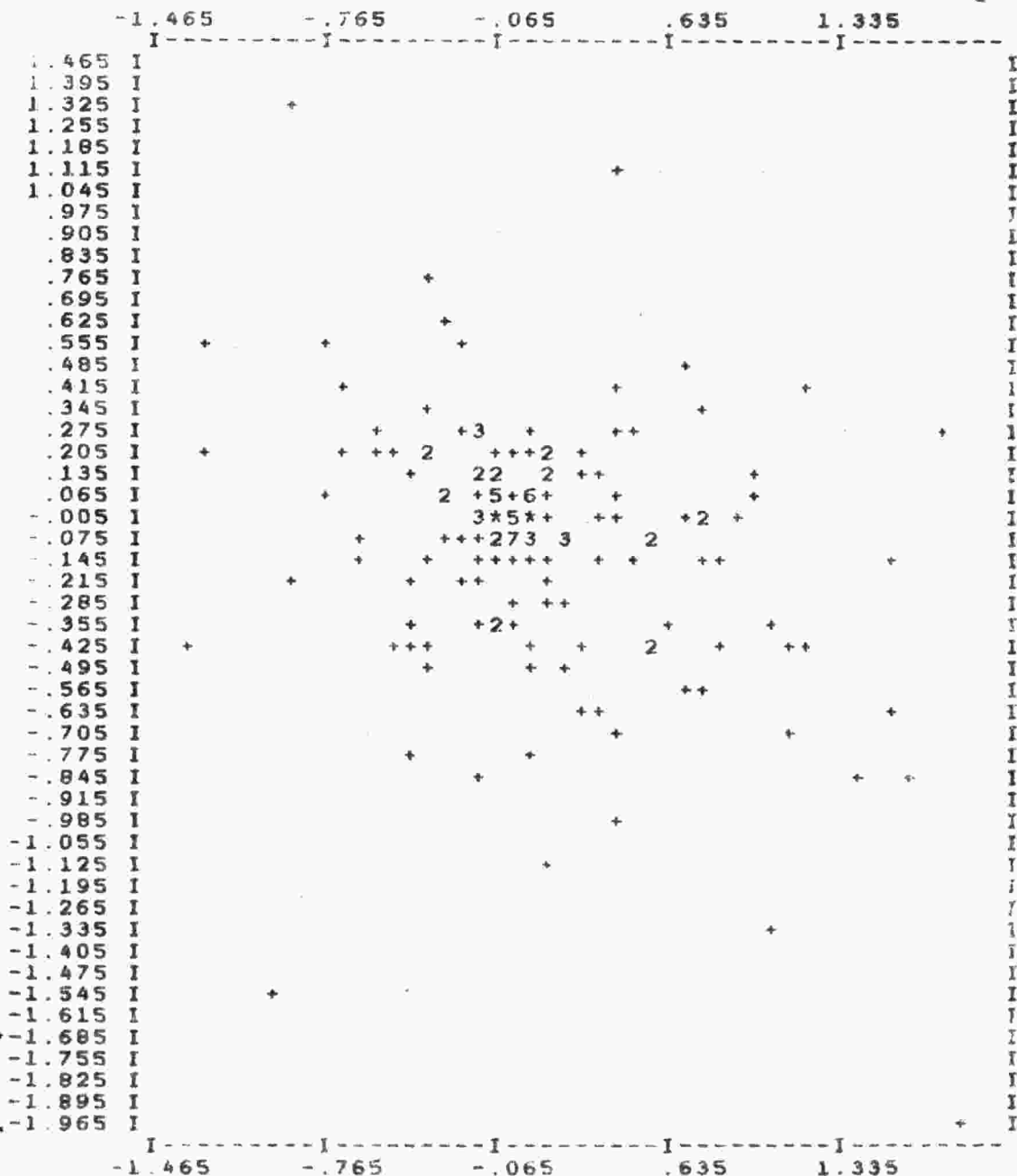


Figura 1 Diagrama de dispersión de los movimientos propios en la región del cúmulo abierto NGC654. Las unidades son segundos de arco por siglo. El diagrama tiene 2500 celdas, en cada una de las cuales se ubica un punto (+), entre 2 y 8, o más de 8 puntos (\*)

Se plantea el problema de discernir cuáles de estos puntos corresponden a estrellas que realmente son miembros del cúmulo y cuáles a estrellas que son del campo considerado. Para ello se introduce un modelo de función de densidad bivariada mixta ("contagious") de los movimientos proprios  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  dada por

$$\phi(\mu_x, \mu_y) = \alpha\phi_1(\mu_x, \mu_y) + (1-\alpha)\phi_2(\mu_x, \mu_y) \quad (4)$$

siendo  $\alpha$  y  $1-\alpha$  las ponderaciones de las componentes.

Esta función  $\phi(\mu_x, \mu_y)$  está formada por la superposición de dos distribuciones,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , que se suponen normales bivariadas, lo cual se justifica a continuación.

Para los movimientos propios de las estrellas del cúmulo se adopta un modelo de función de densidad  $\phi_1$ , normal bivariada circular, ya que - salvo en cúmulos muy cercanos - para tales estrellas pesan fundamentalmente los errores accidentales de observación, que se dispersan en igual forma en ambas direcciones, como es lógico suponer. Para las estrellas del campo se postula una función de densidad,  $\phi_2$ , normal bivariada elíptica, ya que aquí



intervienen múltiples factores de dispersión al tratarse de una población cinemáticamente heterogénea. Se considera que esta función es una aproximación adecuada, si se eliminan del DVD aquellas estrellas cuyo comportamiento se aparta notoriamente del de la población (Sanders, 1971).

A este modelo se ha llegado después de varios ensayos. Inicialmente (Vasilevskis y Rach 1957) se pensó en una función uniforme para el campo y en una normal bivariada circular para el cúmulo, modelo que fue modificado mediante la superposición de dos normales bivariadas, una circular y otra elíptica, por Vasilevskis, Klemola y Preston (1958).

La distribución mixta  $\phi$  es una distribución bivariada no normal para la cual se tiene, de manera explícita:

$$\begin{aligned} \phi(\mu_x, \mu_y) = & \frac{n_1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu_x - \mu_{x1}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\mu_y - \mu_{y1}}{\sigma}\right)^2\right]\right\} \\ & + \frac{n_2}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\mu_x - \mu_{x2}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{\mu_y - \mu_{y2}}{\sigma_y}\right)^2\right.\right. \\ & \left.\left. - 2\rho\left(\frac{\mu_x - \mu_{x2}}{\sigma_x}\right)\left(\frac{\mu_y - \mu_{y2}}{\sigma_y}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Esta función de distribución depende de 7 parámetros:

$n_1$ : número de estrellas pertenecientes al cúmulo.

$n_2$ : número de estrellas pertenecientes al campo,  
 $n_1 + n_2 = N$ .

$(\mu_{x1}, \mu_{y1})$ : coordenadas del centro de la distribución del cúmulo.

$\sigma$ : desviación estándar de  $\phi_1$ .

$(\mu_{x2}, \mu_{y2})$ : coordenadas del centro de la distribución del campo.

$(\sigma_x, \sigma_y)$ : desviaciones estándar de  $\phi_2$ .

$\rho$ : coeficiente de correlación de la distribución del campo.

Puesto que el coeficiente de correlación de esta distribución correlaciona movimientos propios, su valor no es, en principio, significativo en la interpretación del modelo y por lo tanto puede anularse mediante una transformación de coordenadas tal que la forma cuadrática asociada a la distribución elíptica tome su forma canónica (Trumpler and Weaver 1930); la anula-

ción de  $\rho$  simplifica los cálculos para la estimación de los parámetros de  $\phi$ . Aunque es lo que suele hacerse conviene aclarar que se obtendría una mayor precisión si no se hiciera tal simplificación. La validez de ésta requiere que las dos componentes del modelo mixto se superpongan suficientemente, lo cual no es un hecho que se pueda garantizar en general (Slovak 1977).

Eliminado  $\rho$ , se obtiene  $\phi$  dado por:

$$\begin{aligned} \phi(\mu_x, \mu_y) &= \frac{n_1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu_x - \mu_{x1}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\mu_y - \mu_{y1}}{\sigma}\right)^2\right]\right\} \\ &+ \frac{n_2}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu_x - \mu_{x2}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{\mu_y - \mu_{y2}}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

#### 4. Estimación de parámetros por el método de máxima verosimilitud.

Los ocho parámetros de (6) se pueden estimar por el método de máxima verosimilitud (Sanders 1971) a través de los siguientes pasos:

a) **Escritura de la función de verosimilitud.**

$$L = \prod_{i=1}^N \phi(\mu_{x_i}, \mu_{y_i}) \quad (7)$$

siendo  $N$  el número total de estrellas de la región, ésto es, el número de estrellas del campo más el número de estrellas del cúmulo.

$$\log L = \sum_{i=1}^N \log \phi(\mu_{x_i}, \mu_{y_i}) \quad (8)$$

**b) Obtención de las ecuaciones de verosimilitud.**

Derivando parcialmente (8) con respecto a cada uno de los ocho parámetros e igualando a ce ro se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales, en el cual figura a la izquierda el parámetro asociado con cada ecuación:

$$n_2 : \sum_{i=1}^N \phi^{-1} \left( \frac{A_i}{\sigma_x \sigma_y} - \frac{B_i}{\sigma^2} \right) = 0$$

$$\mu_{x2} : \sum_{i=1}^N \phi^{-1} A_i (\mu_{x_i} - \mu_{x2}) = 0$$

$$\mu_{y2} : \sum_{i=1}^N \phi^{-1} A_i (\mu_{y_i} - \mu_{y2}) = 0 \quad (9)$$

$$\mu_{x1} : \sum_{i=1}^N \phi^{-1} B_i (\mu_{x_i} - \mu_{x1}) = 0$$

$$\mu_{y1} : \sum_{i=1}^N \phi^{-1} B_i (\mu_{y_i} - \mu_{y1}) = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &: \sum_{i=1}^N \phi^{-1} A_i \left[ \left( \frac{\mu_{xi} - \mu_{x2}}{\sigma_x} \right)^2 - 1 \right] = 0 \\ \sigma_y &: \sum_{i=1}^N \phi^{-1} A_i \left[ \left( \frac{\mu_{yi} - \mu_{y2}}{\sigma_y} \right)^2 - 1 \right] = 0 \\ \sigma &: \sum_{i=1}^N \phi^{-1} B_i \left[ \frac{(\mu_{xi} - \mu_{x1})^2 + (\mu_{yi} - \mu_{y1})^2}{\sigma^2} - 2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

con  $A_i, B_i$  dados por:

$$\begin{aligned} A_i &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\mu_{xi} - \mu_{x2}}{\sigma_x} \right)^2 + \left( \frac{\mu_{yi} - \mu_{y2}}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\} \\ B_i &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\mu_{xi} - \mu_{x1}}{\sigma} \right)^2 + \left( \frac{\mu_{yi} - \mu_{y1}}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} . \end{aligned}$$

### c) Solución del sistema de ecuaciones.

El sistema (9) se puede resolver utilizando técnicas numéricas como la desarrollada por Brown (1969). Para lograr convergencia a una solución es necesario depurar antes los "outliers" en el diagrama de dispersión de movimientos propios y partir de una solución inicial conveniente, suficientemente vecina de la solución final.

## 5. Criterio de pertenencia.

El proceso anterior ha permitido estimar todos los parámetros de las distribuciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Por tanto es posible construir un criterio bayesiano de pertenencia mediante la expresión

14.

siguiente, que asigna a la estrella  $i$ -ésima de la región considerada una probabilidad de pertenencia al cúmulo, designada por  $p_i$  (Wolfe 1970):

$$p_i = p(c/\mu_{x_i}, \mu_{y_i}) = \frac{p(c) p(\mu_{x_i}, \mu_{y_i}/c)}{p(\mu_{x_i}, \mu_{y_i})}, \quad (10)$$

en donde

$p(c/\mu_{x_i}, \mu_{y_i})$ : probabilidad condicional de estar en el cúmulo, dados  $\mu_{x_i}, \mu_{y_i}$ .

$p(c)$ : probabilidad de pertenecer al cúmulo.

$p(\mu_{x_i}, \mu_{y_i}/c)$ : probabilidad condicional de tener el movimiento propio  $\mu_{x_i}, \mu_{y_i}$  dado que se está en el cúmulo.

$p(\mu_{x_i}, \mu_{y_i})$ : probabilidad de tener el movimiento propio  $\mu_{x_i}, \mu_{y_i}$ .

La fórmula (10) se traduce inmediatamente en,

$$p_i = \frac{n_1 \phi_1(\mu_{x_i}, \mu_{y_i})}{\phi(\mu_{x_i}, \mu_{y_i})} \quad (11)$$

Determinadas las anteriores probabilidades de pertenencia  $p_i$ , se forma un vector de probabi

lidades  $P$ , cuyas componentes aparecen en orden descendente. Como se tiene ya un valor para  $\hat{n}_1$ , estimador del número de miembros del cúmulo, se pueden considerar como estrellas más probables de éste aquellas que corresponden a las primeras  $[\hat{n}_1]$  componentes de  $P$ , en donde  $[\ ]$  designa la parte entera.

Debe anotarse que el número de estrellas consideradas en la región  $N$ , fluctúa en los trabajos observacionales de acuerdo con la magnitud límite que se haya escogido para el estudio. <sup>(2)</sup>

## 6. Aplicación.

Se presentan a continuación los resultados obtenidos al aplicar el método descrito al cúmulo NGC654, cúmulo galáctico joven, clasificado por Trumpler (1930) como I2p. Los movimientos propios se obtuvieron de Stone (1977).

---

(2) La escala de magnitudes mide el brillo aparente de las estrellas. A una diferencia de 5 magnitudes corresponde una relación de brillos igual a 100. En esta escala a mayor magnitud menor brillo.

En la Figura 1 se muestra el diagrama de dispersión de los movimientos propios de NGC654. Claramente se observa una región de concentración de  $(\mu_x, \mu_y)$ . El modelo que superpone dos distribuciones normales bivariadas, una elíptica y otra circular, parece ajustarse a la dispersión que presenta dicha figura.

El procedimiento seguido para determinar las probabilidades de pertenencia, en especial el proceso de depuración de los datos, es el de Zhao et al. (1981), que puede resumirse así:

- a) Se eliminan todas aquellas estrellas con  $|\mu_x| \geq 2''/\text{siglo}$  ó  $|\mu_y| \geq 2''/\text{siglo}$ .
- b) Con las restantes se encuentra un valor aproximado del ángulo de giro, se calculan los movimientos propios en el sistema rotado y se eliminan aquellas estrellas tales que  $|\mu_x| \geq 1.5$  ó  $|\mu_y| \geq 1.5$ .
- c) Con las estrellas que pasan los dos filtros anteriores se resuelve el sistema de ecuaciones (9), se calculan las probabilidades de pertenencia (11) y se identifican los miembros del campo.
- d) Con los miembros del campo se determina de nue



vo el ángulo de giro, se aplica la rotación de ejes, y se eliminan las estrellas que quedan fuera de uno de los intervalos  $[\mu_{x2}-2\sigma_x, \mu_{x2}+2\sigma_x]$ ,  $[\mu_{y2}-2\sigma_y, \mu_{y2}+2\sigma_y]$ .

e) Resolviendo una vez más el sistema de ecuaciones se determinan los estimadores finales de la distribución y los valores definitivos de las probabilidades de pertenencia.

Para resolver el sistema de ecuaciones se utilizó la subrutina ZSYSTM facilitada por Slovak (1985). Como valores iniciales usamos los propuestos por Sanders (1971). La primera solución se obtuvo en 4 iteraciones; para la solución final se requirieron 6 iteraciones. Todo el proceso se llevó a cabo en unas 2 horas, en el computador Texas Business 300 del Observatorio Astronómico.

En la Tabla 1 se muestran los valores de los parámetros según el presente estudio, y los obtenidos por Stone (1977). El acuerdo es ampliamente satisfactorio. En la Tabla 2 se indican, para cada estrella de la región considerada, su número de orden, sus movimientos propios  $\mu_x, \mu_y$ , en segundos de arco por siglo, su probabilidad de pertenencia, y el valor de ésta obtenido por

Stone (1977). Como puede verse, la concordancia es aceptable. Las discrepancias que se observan se explican probablemente por la diferencia en la técnica de depuración de los datos y en el cálculo del ángulo de rotación.

## 7. Conclusiones.

En este artículo se presenta una aplicación de la inferencia estadística en astronomía galáctica. Se analiza la pertenencia de estrellas a cúmulos abiertos, utilizando los movimientos propios de las estrellas de la región en estudio, mediante un modelo de distribución mixta (Vasilevskis et al. 1958), cuyos parámetros se estiman por el método de máxima verosimilitud (Sanders 1971, Slovak 1977).

Con el fin de ilustrar el método se elaboró un programa que depura los datos según la técnica de Zhao et al. (1982), resuelve las ecuaciones de máxima verosimilitud, mediante una subrutina facilitada gentilmente por Slovak (1985), y calcula las probabilidades de pertenencia de las estrellas de la región. El programa se aplicó al cúmulo NGC654 ya estudiado por Stone (1977)

con una metodología similar. El acuerdo es ampliamente satisfactorio.

El programa es muy sensible a la depuración de los datos y a la escogencia de los valores iniciales de los parámetros de la distribución en la solución del sistema de ecuaciones. Depurando de manera sistemática y partiendo de una solución inicial adecuada se logra convergencia en pocas iteraciones.

Debe mencionarse, finalmente, una dificultad relativa a la eliminación del coeficiente de correlación  $\rho$  mediante una rotación del sistema de coordenadas. Esta eliminación es válida en la medida en que haya superposición de las dos componentes de la distribución mixta, lo que no se puede garantizar a priori, antes de distinguir entre las estrellas del campo y las del cúmulo. Esto hace pensar que no rotar, y resolver un sistema más general de ecuaciones de verosimilitud, que incluyan el coeficiente  $\rho$ , permitiría una estimación analíticamente más precisa de los parámetros de la distribución mixta. En esta línea se desarrolla nuestro trabajo actual.

Este artículo es el resultado de una primera etapa del proyecto de investigación "Aproxi-

mación probabilística en el análisis de la pertenencia de estrellas a cúmulos abiertos", financiado por el Comité de Investigaciones y Desarrollo Científico, CINDEC, de la Universidad Nacional.

\*

### BIBLIOGRAFIA

- Alter, G., Ruprecht, J., Vanýsek, V., 1970, *Catalogue of Stars clusters and Associations*, Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Brown, K.M., 1969, SIAM J. Num. Anal., 6, 560.
- Hanson, R.B., 1980, The Hyades cluster distance, en *Stars Clusters*, IAU Symposium N° 85, D. Reidel, Dordrecht, Holland.
- Lingã, G., 1981, *Catalogue of open cluster data*, CDS, Strasbourg, France.
- Sanders, W.L., 1971, Astron. Astrophys., 14, 226.
- Slovak, M.H., 1977, A.J., 82, 818.
- Slovak, M.H., 1985, Comunicación personal.
- Smart, W.M., 1965, *Text-book on Spherical Astronomy*, Cambridge, p.299.
- Stone, R.C., 1977, Astron. Astrophys., 54, 803.
- Trumpler, R.J., 1930, Bull. Lick. Obs., 14, 154.

- Trumpler, R.J., y Weaver, H.F., 1953, *Statistical Astronomy*, Dover, New York, p.49-56.
- Vasilevskis, S., Rach, R.A., 1957, *A.J.*, 62, 175.
- Vasilevskis, S., Klemola, A., Preston, G., 1958, *A.J.*, 63, 387.
- Wolfe, J.H., 1970, Pattern clustering by multivariate mixture analysis, en *Multivariate Behavioural Research*, julio, 329.
- Zhao, J., Tian, K., Xu, Z., Yin, M., 1982, *Chin. Astron. Astrophys.*, 6, 344.

\*

TABLA 1

## PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION MIXTA

Parámetro	Este estudio	Stone
UX2	0.13	0.10
UY2	-0.02	-0.05
SIGMAX	0.49	0.47
SIGMAY	0.30	0.33
UX1	0.00	0.00
UY1	0.00	0.00
SIGMA	0.06	0.07
N2	131	130

TABLA 2

## MOVIMIENTOS PROPIOS Y PROBABILIDADES DE PERTENENCIA EN LA REGION DEL CUMULO GALACTICO NGC654

Número	Ux	Uy	Pi	Pi(Stone)
1	1.14	-.42	0.00	0.00
2	-.27	.64	.00	.00
3	.11	.28	.00	.00
4	.12	.23	.01	.02
5	.05	-.01	.95	.92
6	.31	-.41	.00	.00
7	1.53	-.62	0.00	0.00
8	.73	-.03	.00	.00
9	.01	-.02	.96	.92
10	-.02	.22	.08	.10
11	-.09	.22	.03	.05
12	.32	-.62	.00	.00
13	-.04	.12	.81	.74
14	.76	.03	.00	.00
15	-1.35	-.44	0.00	0.00
16	.55	-.04	.00	.00
17	-.11	.27	.00	.00

18	.52	.29	.00	.00
19	.41	1.13	.00	.00
20	1.73	.27	0.00	0.00
21	-.20	.53	.00	.00
22	.20	-.28	.00	.00
23	-11.60	17.49	0.00	0.00
24	1.57	-.13	0.00	0.00
25	1.12	-2.71	0.00	0.00
26	-.74	.54	.00	.00
27	-.27	.05	.00	.01
28	3.07	-1.48	0.00	0.00
29	.38	-.14	.00	.00
30	.44	.10	.00	.00
31	-.19	.29	.00	.00
32	.75	.02	.00	.00
33	-.42	-.80	.00	.00
34	1.80	-1.96	0.00	0.00
35	-.20	-.08	.11	.12
36	.07	0.00	.94	.89
37	-.02	-.02	.96	.93
38	1.08	-1.37	0.00	0.00
39	.15	.12	.25	.29
40	.15	.16	.08	.12
41	.46	.39	.00	.00
42	5.92	-1.27	0.00	0.00
43	-.10	-.15	.40	.39
44	-.13	-.85	.00	.00
45	1.07	-.37	.00	.00
46	-.36	-.48	.00	.00
47	-.31	-.12	.00	.00
48	.10	-.50	.00	.00
49	.64	-.55	.00	.00
50	-.39	-.36	.00	.00
51	-.49	.21	.00	.00
52	-.04	-.13	.77	.70
53	-.31	.22	.00	.00
54	-.98	-1.57	0.00	0.00
55	.42	-.99	.00	.00
56	.96	.15	.00	.00
57	-.06	-.03	.94	.90
58	-.24	-.09	.01	.03
59	-.52	-.42	.00	.00
60	-.11	.04	.85	.79
61	-.91	1.29	0.00	0.00
62	-.05	-.01	.95	.92
63	.24	-.10	.01	.01
64	1.21	.42	0.00	0.00
65	-.63	-.05	.00	.00
66	0.00	-.31	.00	.00
67	-.62	-.14	.00	.00
68	-.08	-.05	.91	.84
69	1.14	-.69	0.00	0.00
70	.13	.10	.52	.55
71	-.02	.03	.96	.93
72	.07	.03	.93	.89

73	.08	-.45	.00	.00
74	-.11	0.00	.87	.82
75	.46	-.69	.00	.00
76	.06	0.00	.95	.90
77	1.62	-.88	0.00	0.00
78	-.04	.06	.94	.90
79	-.06	.03	.94	.91
80	.07	.09	.85	.81
81	-.06	-.02	.95	.91
82	.11	0.00	.86	.79
83	-.11	-.36	.00	.00
84	.09	-.02	.91	.86
85	.07	-.02	.93	.89
86	.08	-.01	.93	.87
87	.23	-.50	.00	.00
88	.08	-.02	.92	.88
89	.05	.05	.94	.90
90	-.07	.01	.94	.89
91	-1.26	.53	0.00	0.00
92	.11	.04	.84	.80
93	.29	.13	.00	.00
94	0.00	-.07	.94	.90
95	-.68	.21	.00	.00
96	.07	-.03	.93	.88
97	.05	-.05	.94	.90
98	.02	-.07	.94	.89
99	-.24	.06	.02	.03
100	.03	.03	.96	.92
101	.15	-.12	.25	.24
102	.04	.07	.93	.88
103	0.00	-.06	.95	.91
104	-.05	.08	.91	.80
105	-.07	-.33	.00	.00
106	.01	.04	.96	.93
107	-.21	-.19	.00	.01
108	-.03	-.02	.96	.93
109	.05	.05	.94	.90
110	.10	.23	.02	.03
111	.01	-.09	.91	.86
112	-.06	.08	.89	.84
113	-.07	-.03	.93	.89
114	.05	-.09	.89	.82
115	-.07	-.01	.94	.90
116	.02	-.06	.95	.90
117	-.10	0.00	.90	.83
118	-.58	.18	.00	.00
119	-.01	-.05	.95	.92
120	.44	0.00	.00	.00
121	-.17	.04	.44	.41
122	2.40	.16	0.00	0.00
123	.30	.22	.00	.00
124	-.03	-.05	.96	.92
125	-.06	-.01	.95	.91
126	.02	-.04	.96	.92
127	-.16	-.01	.57	.54
128	.18	-.24	.00	.00



129	-.34	-.43	.00	.00
130	.07	-.07	.90	.82
131	-.06	.10	.85	.80
132	.37	-.64	.00	.00
133	-.06	.11	.81	.76
134	-.05	.04	.94	.91
135	.01	.03	.96	.93
136	-.01	-.36	.00	.00
137	.55	-.41	.00	.00
138	-.12	.31	.00	.00
139	.56	-.41	.00	.00
140	.33	-.03	.00	.00
141	.08	-.01	.93	.87
142	-.42	-.46	.00	.00
143	-.04	.03	.95	.92
144	.76	-.57	.00	.00
145	-1.23	.18	0.00	0.00
146	-.67	.41	.00	.00
147	.08	-.14	.56	.52
148	-.07	-.34	.00	.00
149	.19	-.08	.14	.15
150	.21	-.05	.09	.11
151	.50	-.12	.00	.00
152	.17	.01	.45	.45
153	1.20	-.40	0.00	0.00
154	.07	.09	.85	.81
155	.63	-.36	.00	.00
156	.17	.22	.00	.01
157	-.38	.79	.00	.00
158	.86	-.45	.00	.00
159	.15	-.29	.00	.00
160	.75	.36	.00	.00
161	.03	-.16	.56	.48
162	.12	-1.13	.00	.00
163	-.14	-.20	.03	.04
164	.76	-.17	.00	.00
165	-.93	-.22	.00	.00
166	.35	.15	.00	.00
167	-.41	.15	.00	.00
168	.07	-.76	.00	.00
169	.42	.27	.00	.00
170	-.09	-.07	.86	.80
171	.89	.02	.00	.00
172	-.12	.28	.00	.00
173	-.43	-.20	.00	.00
174	-.11	.16	.24	.29
175	3.75	-.38	0.00	0.00
176	.73	.50	.00	.00
177	-1.60	.63	0.00	0.00
178	-.38	.37	.00	.00
179	.59	-.09	.00	.00
180	.86	-.13	.00	.00
181	-.14	.16	.12	.18
182	-.56	.25	.00	.00
183	-.79	.08	.00	.00
184	.95	.08	.00	.00
185	1.40	-.83	0.00	0.00
186	-.32	.23	.00	.00