Revista Colombiana de Estadística
N° 23-24, 1991

IDENTIFICACION DE UN MODELO ARMA A PARTIR DE UN MODELO DE ESTADOS

Fabio Nieto
Profesor Asistente
Universidad Nacional

Resumen: Se ilustra con un ejemplo teórico el procedimiento para obtener un modelo ARMA, a partir del modelo de estados que se identifica con el espacio predictor del proceso que genera una serie temporal.

Palabras claves: Modelo de Estados, Modelo ARMA, Espacio Predictor.

1. Introducción.

Akaike (1974, 1976) diseñó un procedimiento para identificar un modelo estocástico *único* para una serie cronológica. El método está basado en el espacio predictor del proceso que genera la serie y una presentación didáctica del tema aparece en Nieto (1991).

El objetivo de Akaike era diseñar una metodología para identificar un modelo ARMA. Sin embargo, como paso intermedio, él identificó primero el modelo Markoviano del proceso, el cual será llamado en lo sucesivo el modelo de estados y se encuentra definido por Nieto (1991).

En el procedimiento STATESPACE del paquete SAS/ETS (1984), aparece programada la estrategia diseñada por Akaike. Con esta herramienta computacional se obtiene el modelo de estados del proceso y la pregunta que surge inmediatamente es: cómo conocer la representación ARMA del proceso dado que se conoce el modelo estados?

El objetivo de este trabajo es ilustrar con un ejemplo teórico, una manera de pasar del modelo de estados al modelo ARMA. La idea es facilitar el entendimiento del trabajo de Akaike a los principiantes en este tema.

2. Del modelo de estados al modelo ARMA.

Considerar el proceso estocástico bivariado

$$Y(n)+B_1Y(n-1)+B_2Y(n-2)+B_3Y(n-3) = X(n)+A_1X(n-1) \qquad (1)$$

donde

$$Y(n) = [Y_1(n),Y_2(n)]'.$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -b_{11} & 0 \\ 0 & -b_{12} \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -b_{21} & 0 \\ 0 & -b_{12} \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b_{32} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se asume que B_1, B_2, B_3 y A_1 son tales que el proceso es estacionario e invertible.

Se demuestra (Nieto (1991)) que el proceso tiene un modelo de estados único

$$\left.\begin{aligned} V(n+1) &= AV(n) + BX(n+1) \\ Y(n) &= CV(n) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_{21} & 0 & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b_{32} & 0 & b_{22} & b_{12} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a+b_{11} & 0 \\ 0 & b_{12} \\ 0 & b_{12}^2+b_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$X(n) = Y(n) - Y(n|n-1)$, y

$V(n) = [Y_1(n), Y_2(n), Y_1(n+1|n), Y_2(n+1|n), Y_2(n+2|n)]'$,

con

$$Y_j(n+k|n) = E[Y_j(n+k)|Y(n),Y(n-1),\dots,]$$

$$j = 1,2; \qquad k \geq 0,$$

y

$$Y(n|n-1) = E(Y(n)|Y(n-1),\dots).$$

La idea es usar el modelo (2) para obtener la representación ARMA única del proceso $Y(n)$.

Si $V_i(n)$ denota la i-ésima componente de $V(n)$, $i = 1, \dots, 5$, entonces

$$V_1(n) = y_1(n|n), V_2(n) = Y_2(n|n), V_3(n)$$

$$= Y_1(n+1|n), V_4(n) = Y_2(n+1|n)$$

y

$$V_5(n) = Y_2(n+2|n).$$

De la primera ecuación de (2) se obtiene que

$$V_i(n+1|n) = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} V_i(n), \qquad i = 1,2,\dots,5.$$

Por lo tanto, en particular,

$$\begin{aligned} Y_1(n+2|n) &= V_3(n+1|n) \\ &= b_{21}Y_1(n|n)+b_{11}Y_1(n+1|n) \\ &= b_{21}Y_1(n|n)+0Y_2(n|n)+b_{11}Y_1(n+1|n)+0Y_2(n+1|n) \\ &\quad + 0Y_1(n+2|n)+0Y_2(n+2|n) \end{aligned}$$

$$= [b_{21},0]\ Y(n)+[b_{11},0]\ Y(n+1|n)+[0,0]\ Y(n+2|n)$$

$$= B_o(1)\ Y(n+2|n)+B_1(1)\ Y(n+1|n)+B_2(1)Y(n|n)$$

$$= \sum_{m=o}^{2} B_m(1)Y(n+2-m|n). \tag{3}$$

$$Y_2(n+3|n) = V_5(n+1|n)$$

$$= b_{32}Y_2(n)+b_{22}Y_2(n+1|n)+b_{12}Y_2(n+2|n)$$

$$= [0,b_{32}]Y(n)+[0,b_{22}]Y(n+1|n)+[0,b_{12}]Y(n+2|n)$$

$$+ [0,0]Y(n+3|n)$$

$$= B_o(2)Y(n+3|n)+B_1(2)Y(n+2|n)+B_2(2)Y(n+1|n)$$

$$+ B_3(2)Y(n|n)$$

$$= \sum_{m=o}^{3} B_m(2)Y(n+3-m|n). \tag{4}$$

Como

$$V_i(n+1)-V_i(n+1|n) = d_{i1}X_1(n+1)+d_{i2}X_2(n+1), \quad i = 1,\ldots,5$$

donde $B = (d_{ij})_{5\times 2}$, entonces en particular,

$$Y_1(n+2|n+1)-Y_1(n+2|n) = (a+b_{11})X_1(n+1)$$

y

$$Y_2(n+3|n+1)-Y_2(n+3|n) = (b_{12}^2+b_{22})X_2(n+1).$$

Ahora, sea $X_1'(n+2)$ la componente ortogonal de $Y_1(n+2)$

con respecto a $P(n)$, el espacio predictor en el tiempo n (Nieto (1991)). Entonces

$$\begin{aligned} X_1'(n+2) &= X_1(n+2)+Y_1(n+2|n+1)-Y_1(n+2|n) \\ &= X_1(n+2)+(a+b_{11})X_1(n+1). \end{aligned}$$

$X_1(n+2)$ es la componente ortogonal de $Y_1(n+2)$ con respecto a $P(n+1)$ y la esperanza condicional se interpreta como una proyección ortogonal.

De la misma manera y con notación análoga se obtiene que

$$\begin{aligned} X_2'(n+2) &= X_2(n+2)+Y_2(n+2|n+1)-Y_2(n+2|n) \\ &= X_2(n+2)+b_{12}X_2(n+1). \end{aligned}$$

Como $Y_1(n+2) = Y_1(n+2|n)+X_1'(n+2)$ entonces

$$Y_1(n+2)-Y_1(n+2|n) = X_1(n+2)+(a+b_{11})X_1(n+1) \tag{5}$$

De (3) se obtiene que

$$\begin{aligned} Y_1(n+2|n) = {} & B_o(1)[Y(n+2)-X'(n+2)]+B_1(1)[Y(n+1)-X'(n+1)] \\ & + B_2(1)[Y(n)-X'(n)], \end{aligned}$$

donde $X'(n+k) = [X_1'(n+k), X_2'(n+k)]^t$, $k = 0,1,\dots$.

Como $X'(n+1) = X(n+1)$ y $X'(n) = 0$ (el vector cero) entonces

$$
\begin{aligned}
Y_1(n+2|n) &= B_o(1)Y(n+2)-B_o(1)X'(n+2)+B_1(1)Y(n+1) \\
&\quad - B_1(1)X(n+1)+B_2(1)Y(n) \\
&= B_o(1)Y(n+2)+B_1(1)Y(n+1)+B_2(1)Y(n)-B_o(1)X(n+2) \\
&\quad -B_o(1)DX(n+1)-B_1(1)X(n+1),
\end{aligned}
$$

pues $X'(n+2) = X(n+2)+DX(n+1)$ con $D = \text{diag}\{a+b_{11},b_{12}\}$.

Por lo tanto y usando (5),

$$
\begin{aligned}
Y_1(n+2) - \sum_{m=o}^{2} B_m(1)Y(n+2-m) &= X_1(n+2)+(a+b_{11})X_1(n+1) \\
&\quad - B_o(1)X(n+2)-[B_o(1)D+B_1(1)]X(n+1) \\
&= X_1(n+2)+A_o(1)X(n+2)+A_1(1)X(n+1). \qquad (6)
\end{aligned}
$$

donde $A_o(1) = -B_o(1)$ y $A_1(1) = -B_o(1)D+[a,0]$.

En realidad $B_o(1) = [0,0]$ pero se deja con el fin de generalizar.

Procediendo como antes y con notación análoga, se obtiene

$$
\begin{aligned}
X_2'(n+3) &= X_2(n+3)+Y_2(n+3|n+2)-Y_2(n+3|n) \\
&= X_2(n+3)+b_{12}X_2(n+2)+(b_{12}^2+b_{22})X_2(n+1).
\end{aligned}
$$

Como $Y_2(n+2) = Y_2(n+3|n)+X_2'(n+3)$ entonces

$$Y_2(n+3)-Y_2(n+3\ n) = X_2(n+3)+b_{12}X_2(n+2) + (b_{12}^2+b_{22})X_2(n+1) \tag{7}$$

Ahora, de (4),

$$Y_2(n+3|n) = B_o(2)[Y(n+3)-X'(n+3)]+B_1(2)[Y n+2)-X'(n+2)] + B_2(2)[Y(n+1)-X(n+1)]+B_3(2)Y(n).$$

Para conocer $X'(n+3)$ se debe conocer $X_1'(n+3)$:

$$\begin{aligned} X_1'(n+3) &= X_1(n+3)+Y_1(n+3|n+2)-Y_1(n+3|n) \\ &= X_1(n+3)+(b_{11}+a)X_1(n+2)+(b_{21}+ab_{11}+b_{11}^2)X_1(n+1). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X'(n+3) &= \begin{pmatrix} X_1'(n+3) \\ X_2'(n+3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1(n+3) \\ X_2(n+3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b_{11}+a)X_1(n+2) \\ b_{12}\ X_2(n+2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b_{21}+ab_{11}+b_{11}^2)X_1(n+1) \\ (b_{12}^2+b_{22})X_2(n+1) \end{pmatrix} \\ &= X(n+3) + D_1X(n+2) + D_2X(n+1), \end{aligned}$$

donde

$$D_1 = \begin{pmatrix} b_{11}+a & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_2 = \begin{pmatrix} b_{21}+ab_{11}+b_{11}^2 & 0 \\ 0 & b_{12}^2+b_{22} \end{pmatrix}$$

Luego

$$Y_2(n+3|n) = B_o(2)Y(n+3)-B_o(2)X'(n+3)+B_1(2)Y(n+2)$$

$$- B_1(2)X'(n+2)+B_2(2)Y(n+1)-B_2(2)X(n+1)+B_3(2)Y(n)$$

$$= \sum_{m=o}^{3} B_m(2)Y(n+3-m)-B_o(2)\left[X(n+3)+D_1X(n+2)+D_2X(n+1)\right]$$

$$- B_1(2)\left[X(n+2)+DX(n+1)\right]-B_2(2)X(n+1)$$

$$= \sum_{m=o}^{3} B_m(2)Y(n+3-m)-B_o(2)X(n+3)+\left[-B_o(2)D_1-B_1(2)\right]$$

$$\cdot X(n+2)+\left[-B_o(2)D_2-B_1(2)D-B_2(2)\right]X(n+1)$$

$$= \sum_{m=o}^{3} B_m(2)Y(n+3-m)+A_o(2)X(n+3)+A_1(2)^*X(n+2)$$

$$+ A_2(2)^*X(n+1),$$

donde

$$A_o(2) = -B_o(2)$$

$$A_1(2)^* = -B_o(2)D_1-B_1(2)$$

$$A_2(2)^* = -B_o(2)D_2-B_1(2)D-B_2(2)$$

En consecuencia

$$Y_2(n+3) - \sum_{m=o}^{3} B_m(2)Y(n+3) = X_2(n+3)+A_o(2)X(n+3)$$

$$+ A_1(2)^*X(n+2)+b_{12}X_2(n+2)+(b_{11}^2+b_{22})X_2(n+1)+A_2(2)^*X(n+1)$$

$$= X_2(n+3) + \sum_{m=o}^{2} A_o(2)X(n+3-m), \tag{8}$$

donde $A_1(2) = A_1(2)^*+[0,b_{12}]$ y $A_2(2) = A_2(2)^*+[0,b_{12}^2+b_{22}]$.

De (6) se obtiene que

$$Y_1(n+3) - \sum_{m=o}^{3} B_m(1)Y(n+3-m) = X_1(n+3) + \sum_{m=o}^{2} A_m(1)X(n+3-m) \quad (9)$$

donde $B_3(1) = 0$ y $A_2(1) = 0$.

Por lo tanto, de (8) y (9):

$$Y(n+3) + \sum_{m=o}^{3} \bar{B}_m Y(n+3-m) = X(n+3) + \sum_{m=o}^{2} \bar{A}_m X(n+3-m) \quad (10)$$

donde

$$\bar{B}_m = \begin{pmatrix} -B_m(1) \\ -\bar{B}_m(2) \end{pmatrix}, \quad m = 0,1,2,3,$$

y

$$\bar{A}_m = \begin{pmatrix} A_m(1) \\ A_m(2) \end{pmatrix}, \quad m = 0,1,2.$$

En realidad (10) viene a ser

$$(I+\bar{B}_o)Y(n+3)+\bar{B}_1 Y(n+2)+\bar{B}_2 Y(n+1)+\bar{B}_3 Y(n)$$

$$= (I+\bar{A}_o)X(n+3)+\bar{A}_1 X(n+2)+\bar{A}_2 X(n+1).$$

Como $\bar{B}_o = \begin{pmatrix} -B_o(1) \\ -B_o(2) \end{pmatrix} = 0 = \bar{A}_o$ entonces

$$\begin{aligned} &Y(n+3)+\bar{B}_1 Y(n+2)+\bar{B}_2 Y(n+1)+\bar{B}_3 Y(n) \\ &= X(n+3)+\bar{A}_1 X(n+2)+\bar{A}_2 X(n+1). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\bar{B}_1 = \begin{pmatrix} -B_1(1) \\ -B_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} & 0 \\ 0 & -b_{12} \end{pmatrix} = B_1$$

$$\bar{B}_2 = \begin{pmatrix} -B_2(1) \\ -B_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{21} & 0 \\ 0 & -b_{22} \end{pmatrix} = B_2$$

$$\bar{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b_{32} \end{pmatrix} = B_3$$

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1(1) \\ A_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} A_2(1) \\ A_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{1\times 2} \\ -B_o(2)D_2 - B_1(2)D - B_2(2) + [0, b_{12}^2 + b_{22}] \end{pmatrix}$$

En consecuencia la representación (11) es idéntica al modelo de (1), lo que muestra que del modelo (2) (Modelo de Estados) se puede obtener el modelo (1) (Modelo ARMA) de manera única.

3. Conclusiones.

Se ha ilustrado un método para identificar un modelo ARMA. Este consiste en identificar primero un modelo de estados usando el espacio predictor del proceso que origina la serie y luego obtener el modelo ARMA a partir de ese modelo.

La unicidad del modelo de estados identificado con la estrategia de Akaike asegura la unicidad del modelo ARMA derivado de él. Así, no es necesario utilizar el criterio de Hannan (1969) para verificar la unicidad de la representación ARMA para el proceso. El presente trabajo ha ilustrado estas afirmaciones.

Siguiendo el ejemplo, se destaca la influencia decisiva que tiene la ecuación del sistema (o de estado) en la forma del modelo ARMA. Como a su vez esta ecuación está determinada por una base del espacio predictor (Nieto (1991)) entonces la representación ARMA está completamente caracterizada por tal base.

*

BIBLIOGRAFIA

Akaike, H. (1974). "Markovian Representation of Stochastic Processes and its aplication to the analysis of ARMA Processes". Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 26, 363-387.

Akaike, H. (1976). "Canonical Correlation Analysis of Time Series and the use of an Information Criterion". Mehra R. and Lainiotis D.G. (editors). Advances and Case Studies in System Identification, Academic Press.

Hannan, F.J. (1969). "The identification of vector mixed autoregresive - moving average systems". Biometrika, 56, 223-225.

Nieto, F.H. (1990). "Identificación de un modelo de estados para una serie cronológica usando el espacio predictor", Revista Colombiana de Estadística, Nºs. 21-22 1990 40-59.

SAS Institute Inc., (1984). "SAS/ETS User's Guide, Versión 5 Edition". Cary, N.C., SAS Institute Inc.

*