

Nueva metodología para el diseño de índices de calidad ambiental basada en extensiones difusas de funciones de transformación

New methodology based on fuzzy extensions of transformation functions for the design of environmental quality indexes

Roberto Peche G.¹

RESUMEN

El propósito de este artículo es presentar una metodología nueva y rigurosa, basada en el concepto de extensión difusa de una función de transformación para el diseño de índices de calidad ambiental. Una extensión difusa es una generalización de una función clásica extendida al campo de los conjuntos difusos en R . Las funciones de transformación se utilizan para convertir los valores que toman los indicadores ambientales en un emplazamiento, en sus contribuciones al índice de calidad ambiental. Para diseñar el índice de calidad ambiental se define un conjunto de atributos que debe incluir todos los factores significativos en lo concerniente a la calidad ambiental objeto de valoración. Para cuantificar cada atributo se selecciona un indicador ambiental, junto con su rango de valores. A continuación, se define una extensión difusa para cada indicador ambiental. Seguidamente, se calcula una matriz de comparación por pares de las importancias relativas de los atributos, a partir de la cual se determina su correspondiente vector de prioridades normalizado. Los valores que toman los indicadores en el emplazamiento objeto de estudio se describen en términos difusos, y la contribución difusa al índice de calidad ambiental se obtiene como la imagen del valor del indicador a través de la extensión difusa de la función de transformación. El valor difuso del índice de calidad ambiental es el resultado de agregar las contribuciones difusas, teniendo en cuenta sus importancias relativas. Finalmente, por desborrosificación del valor difuso del índice de calidad ambiental, se calculan los estimadores clásicos, puntual y de intervalo del índice de calidad ambiental.

PALABRAS CLAVE: índice de calidad ambiental; matemática difusa; extensión difusa; función de transformación; gestión ambiental.

ABSTRACT

The aim of this paper is to introduce a new and rigorous methodology based on the concept of a fuzzy extension of a transformation function for the design of environmental quality indexes. A fuzzy extension is a generalisation of a classical function extended to the field of the fuzzy sets defined in R . Transformation functions are used to convert the values taken by the environmental indicators on the site into the values that represent their contributions to the environmental quality index. For the design of the index, a set of attributes is defined, which should include all the significant factors of the environmental quality under consideration. In addition, an environmental indicator is selected to quantify each attribute, together with its range of values. Next, a fuzzy extension is defined for each environmental indicator and subsequently, a pair-wise comparison matrix of the relative importance of the attributes is calculated, and a standardized priority vector is determined. The values taken by the environmental indicators on the site are described in fuzzy terms. The fuzzy contribution to the environmental quality index is the image of the indicator's value through the fuzzy extension of the transformation function. The fuzzy value of the environmental quality index is the result of adding the fuzzy contributions according to their relative importance. Finally, punctual and interval classic estimators of the environmental quality index are calculated by the defuzzification of the fuzzy value of the environmental quality index.

KEYWORDS: environmental quality index; fuzzy mathematics; fuzzy extension; transformation function; environmental management.

¹ Escuela Universitaria de Ingeniería de Vitoria-Gasteiz, Universidad del País Vasco. Vitoria-Gasteiz, España. ORCID Peche, R.: 0000-0002-4411-4590; roberto.peche@ehu.eus

Introducción

Matemática difusa y lógica difusa constituyen herramientas de utilidad para el tratamiento de información afectada de incertidumbre. Tal es el caso del campo medioambiental, en el que frecuentemente se trabaja con información imprecisa y que, en muchas ocasiones, conlleva una carga importante de subjetividad. Por tal motivo, la aritmética difusa así como la inferencia difusa han sido aplicadas con éxito durante los últimos años en distintos tipos de valoraciones medioambientales, como son: la evaluación de los impactos ambientales de actividades o proyectos (Duarte, 2000; Peche, 2006; Peche y Rodríguez, 2009; Kaya y Kahraman, 2011; Peche y Rodríguez, 2011; Sánchez, 2015; Wieland y Gutzler, 2014; Zulueta et al., 2016); los modelos de ayuda de toma de decisiones en reciclado de residuos (Nasiri y Huang, 2008); la clasificación de residuos peligrosos (Musee et al., 2008); la evaluación de la calidad de suelos recuperados (Kaufmann et al., 2009); la gestión de áreas protegidas (Prato, 2009); la valoración y análisis de riesgos ambientales (Hu et al., 2016; Martins et al., 2016); las alternativas de reducción de contaminación acústica (Ruiz-Padillo et al., 2016); y valoraciones agrícolas (Sami et al., 2014).

En particular, la lógica difusa también ha sido aplicada al desarrollo de índices destinados a cuantificar la calidad ambiental, ya sea en algún aspecto particular, o con un enfoque más generalista. Así, se han desarrollado índices destinados a valorar la sostenibilidad de la energía nuclear (Abouelnaga et al., 2010), las consecuencias ambientales asociadas a sustancias tóxicas o peligrosas en industrias químicas (Arunraj y Maiti, 2009), la calidad del agua (Gharibi et al., 2012), y en particular de aguas de ríos (Lermontov et al., 2009), las condiciones ambientales (Marchini et al., 2009), la sostenibilidad de sistemas de energía renovable (Liu et al., 2012), o la monitorización ambiental (Stroppiana et al., 2009). Igualmente, la lógica difusa también ha permitido desarrollar metodologías destinadas al diseño de índices de calidad ambiental (Peche y Rodríguez, 2012) o índices de calidad dinámica de suelos agrícolas (Rodríguez et al., 2016).

Las valoraciones ambientales que emplean lógica difusa se basan generalmente en modelar el conocimiento sobre la relación entre los diferentes

factores del sistema objeto de valoración y la propiedad representativa de su calidad ambiental por medio de un conjunto de reglas difusas, o base de conocimiento (Genske y Heinrich, 2009, Adriaenssens et al., 2004, Icaga, 2007). Mediante inferencia difusa –usualmente, *modus ponens generalizado*– se determinan, a partir de los valores difusos de los antecedentes en el emplazamiento a valorar y de las reglas difusas, las conclusiones difusas de todas las reglas, y por agregación de las conclusiones difusas se calcula el valor difuso de la calidad ambiental en ese emplazamiento. Una alternativa al conjunto de reglas difusas para describir el conocimiento sobre la relación entre los factores ambientales y la calidad ambiental consiste en expresar dicho conocimiento por medio de un conjunto de extensiones difusas de funciones de transformación (Peche y Rodríguez, 2015). Una función de transformación f_i definida para un indicador ambiental I establece una correspondencia entre los valores de I y los valores de una magnitud Q_i , que cuantifica la contribución de dicho indicador a la calidad ambiental del sistema o emplazamiento objeto de valoración. Q_i es adimensional y su rango de valores es $[0,1]$, de modo que el valor cero corresponde a calidad ambiental mínima y el valor 1 corresponde a calidad ambiental máxima. De este modo, indicadores ambientales de naturalezas dispares pueden “traducirse” mediante sus funciones de transformación a una escala única de calidad ambiental. La finalidad de dicha conversión es llevar a cabo una valoración conjunta de la calidad ambiental del emplazamiento por medio de la agregación de los Q_i correspondientes a los diferentes indicadores ambientales.

Los aspectos y/o componentes ambientales a ser evaluados por medio de indicadores ambientales pueden ser muy dispares entre sí (de tipo físico, social o económico), lo que da lugar a una gran diversidad de indicadores ambientales. Además, la información representada por el indicador puede corresponder tanto a magnitudes medibles, tal es el caso de las concentraciones de contaminantes en el aire o agua, como a valoraciones que no se corresponden con mediciones propiamente dichas, y que generalmente vienen afectadas por la subjetividad del evaluador.

El modelo matemático de una f_i es una función real, continua en todo su dominio (D), cuya variable independiente es el indicador I y cuya variable dependiente es su contribución a la calidad ambiental Q_i . Su dominio es el intervalo de posibles valores del indicador $D = [I_{\min}, I_{\max}]$ donde I_{\min} e I_{\max} son, respectivamente, los valores mínimo y máximo que puede tomar el indicador. Asimismo, su codominio (B) es el rango de posibles valores de Q_i . Por lo tanto, $B = [0, 1]$. Cabe destacar que, de acuerdo con su definición, mediante una f_i , a cada valor de $I \in D$ corresponde un único valor de $Q_i \in B$.

Sin embargo, aún a pesar de su aplicabilidad en valoraciones ambientales, los criterios para establecer la correspondencia entre I y Q_i proceden, en gran medida, de las opiniones particulares de expertos. Además, es frecuente que el conocimiento en el que se basa la elaboración de dichas funciones sea incompleto y/o impreciso. De ello se desprende que la correspondencia $I \rightarrow Q_i$ es inherentemente imprecisa, y en consecuencia, asignar un único valor de Q_i a cada valor del indicador puede resultar excesivamente drástico. En otras palabras, establecer la correspondencia entre los valores del indicador y los de calidad ambiental mediante una f_i comporta una simplificación que obvia la imprecisión inherente de dicha correspondencia. Con el fin de disponer de una alternativa a la f_i que sea consistente con la imprecisión de las correspondencias del tipo $I \rightarrow Q_i$, se desarrolló el concepto de extensión difusa \bar{f} de una función clásica f , y se particularizó para el caso en que dicha función es una función de transformación f_i , obteniéndose así la extensión difusa de una función de transformación \bar{f}_i (Peche y Rodríguez, 2015). Mediante una \bar{f}_i se establece una correspondencia imprecisa entre las variables I y Q_i , de modo que a cada valor de I corresponden

todos los valores de un único intervalo cerrado de valores de Q_i . El grado en que cada valor de Q_i perteneciente a dicho intervalo se corresponde con el valor de I , viene dado por la función de pertenencia de \bar{f}_i ($\mu_{\bar{f}_i}(I, Q_i)$) y varía entre un valor máximo (al que se asigna el valor 1) y un valor mínimo (al que se asigna el valor 0), siendo $f_i(I)$ el valor de Q_i que corresponde a I en grado máximo a través de \bar{f}_i . Para establecer los límites de dicho intervalo se definen dos funciones denominadas límite de borrosidad por abajo (f_{il}) y límite de borrosidad por arriba (f_{iu}), de manera que, $\forall I \in [I_{\min}, I_{\max}]$ $\mu_{\bar{f}_i}(I, Q_i) = 0 \quad \forall Q_i \in [0, f_i(I)]$, $\mu_{\bar{f}_i}(I, Q_i)$ aumenta desde 0 hasta 1 cuando Q_i aumenta desde $f_{il}(I)$ hasta $f_i(I)$, $\mu_{\bar{f}_i}(I, Q_i)$ disminuye desde 1 hasta 0 cuando Q_i aumenta desde $f_i(I)$ hasta $f_{iu}(I)$, y $\mu_{\bar{f}_i}(I, Q_i) = 0 \quad \forall Q_i \in [f_{iu}(I), 1]$. En notación conjuntista, una extensión difusa de una función de transformación viene dada por la siguiente expresión:

$$\bar{f}_i = \left\{ \left((I, Q_i), \mu_{\bar{f}_i}(I, Q_i) \right) : (I, Q_i) \in D \times B, \mu_{\bar{f}_i}(I, Q_i) \in [0, 1] \right\} \quad (1)$$

En la Figura 1 se recoge la representación tridimensional de $\mu_{\bar{f}_i}(I, Q_i)$ frente a I y Q_i , se muestran las representaciones de f , f_{il} y f_{iu} sobre el plano $I \times Q_i$, y se ilustra la correspondencia entre las variables I y Q_i para un valor particular del indicador I_p .¹

A la vista de estas consideraciones, el propósito de este artículo es formular una nueva metodología de diseño de índices de calidad ambiental (EQI) basada en extensiones difusas de funciones de transformación. La metodología aquí propuesta constituye una alternativa a los procedimientos de diseño de índices

¹ Para más información sobre el concepto, propiedades y aplicaciones de la extensión difusa de una función de transformación \bar{f}_i consultar Peche y Rodríguez (2015).

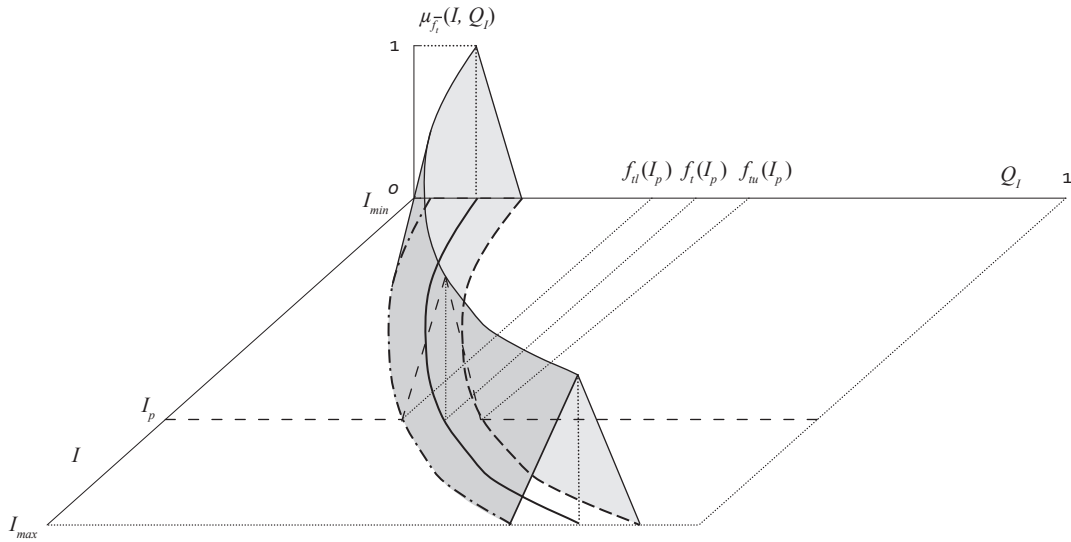


Figura 1. Representación gráfica de la función de pertenencia $\mu_{\overline{f}_i}(I, Q_i)$ de una extensión difusa \overline{f}_i de una función de transformación: f_{il} : -•-•-; f_t : -; f_{tu} : --. Fuente: elaboración propia.

de calidad ambiental basados en conjuntos de reglas difusas. Su diferencia esencial consiste en que la correspondencia entre los indicadores ambientales y el índice de calidad ambiental *EQI* se establece mediante extensiones difusas de funciones de transformación, en lugar de conjuntos de reglas difusas. En consecuencia, este procedimiento no incluye inferencia difusa, sino cálculo de imágenes difusas a partir de extensiones difusas de funciones de transformación y valores difusos de los indicadores ambientales. Por ello, se considera que puede aportar un nuevo enfoque para el desarrollo de índices de calidad ambiental.

Metodología de diseño de los índices de calidad ambiental (EQI)

En esta sección se describen secuencialmente las etapas a seguir para el diseño de un índice de calidad ambiental (*EQI*) desarrollado mediante la

metodología propuesta. Cabe señalar que su puesta en práctica requiere de la participación de un panel de expertos en todos los aspectos relativos a la calidad ambiental a valorar y de un equipo ambientalista. El panel debe aportar los conocimientos necesarios para la elaboración del *EQI*, y el equipo ambientalista debe coordinar la labor del panel y llevar a cabo la adquisición y el tratamiento de la información aportada por el panel en cada una de las etapas del procedimiento.

Selección de atributos ambientales e indicadores

En primer lugar, se establece el conjunto de los atributos del *EQI* $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$. Dicho conjunto debe incluir todos los aspectos con influencia significativa sobre la calidad ambiental objeto de valoración. A continuación, se selecciona un indicador ambiental convencional I_i para cuantificar cada uno de los atributos ambientales a_i , así

como su rango de valores $[I_{i,\min}, I_{i,\max}]$. Entre los criterios de selección de los indicadores ambientales cabe destacar la representatividad del componente ambiental a cuantificar y su sensibilidad a posibles cambios de las condiciones ambientales.

Definición de las extensiones difusas de las funciones de transformación

Para cada indicador ambiental I_i , donde $i = 1, 2, \dots, n$, se define la extensión difusa de la función de transformación clásica correspondiente (\overline{f}_i) . Para ello, en primer lugar se define la función de transformación clásica f_{ii} y los límites de borrosidad por abajo f_{lli} y por arriba f_{tli} , teniéndose en cuenta que f_{tli} , f_{lli} y f_{ii} son funciones reales, cuyo dominio es $D = [I_{i,\min}, I_{i,\max}]$, cuyo codominio es $B = [0, 1]$, y que cumplen la siguiente condición:

$$f_{lli}(I_i) \leq f_{ii}(I_i) \leq f_{tli}(I_i) \quad \forall I_i \in [I_{i,\min}, I_{i,\max}] \quad (2)$$

Dado que la función de pertenencia de un conjunto difuso determina dicho conjunto, para establecer \overline{f}_i debe definirse su función de pertenencia $\mu_{\overline{f}_i}(I_i, Q_{li})$. Esta función de pertenencia cuantifica el grado en que Q_{li} corresponde a I_i a través de \overline{f}_i , es decir, es la función que modela el grado de correspondencia entre el indicador ambiental y su correspondiente contribución al índice de calidad ambiental. De acuerdo con la definición de extensión difusa de una función de transformación, $\mu_{\overline{f}_i}(I_i, Q_{li})$ debe cumplir las siguientes especificaciones (Peche y Rodríguez, 2015):

$$(a) \mu_{\overline{f}_i}(I_i, Q_{li}) = 0 \quad \forall (I_i, Q_{li}) : I_i \in D_i, Q_{li} \in [I_{i,\min}, f_{lli}(I_i)] \quad (3)$$

$$(b) \mu_{\overline{f}_i}(I_i, Q_{li}) = 0 \quad \forall (I_i, Q_{li}) : I_i \in D_i, Q_{li} \in [f_{tli}(I_i), I_{i,\max}] \quad (4)$$

$$(c) \mu_{\overline{f}_i}(I_i, Q_{li}) = 1 \quad \forall (I_i, Q_{li}) : I_i \in D_i, Q_{li} = f_{ii}(I_i) \quad (5)$$

$$(d) \forall I_i \in D_i, \forall Q_{li}, Q_{li}' \in (f_{lli}(I_i), f_{tli}(I_i)) : Q_{li}' > Q_{li} \Rightarrow \mu_{\overline{f}_i}(I_i, Q_{li}') > \mu_{\overline{f}_i}(I_i, Q_{li}) \quad (6)$$

Puesto que $\mu_{\overline{f}_i}(I_i, f_{lli}(I_i)) = 0$ y $\mu_{\overline{f}_i}(I_i, f_{tli}(I_i)) = 1$, esta propiedad implica que cuando I_i toma valores en $[f_{lli}(I_i), f_{tli}(I_i)]$ desde $f_{lli}(I_i)$ hasta $f_{tli}(I_i)$, $\mu_{\overline{f}_i}(I_i, Q_{li})$ toma valores en $[0, 1]$ desde 0 hasta 1 $\forall (I_i, Q_{li}) : I_i \in D_i$.

$$(e) \forall I_i \in D_i, \forall Q_{li}, Q_{li}' \in (f_{li}(I_i), f_{mi}(I_i)): Q_{li}' > Q_{li} \Rightarrow \mu_{\overline{f_i}}(I_i, Q_{li}') < \mu_{\overline{f_i}}(I_i, Q_{li}) \quad (7)$$

Dado que $\mu_{\overline{f_i}}(I_i, f_{li}(I_i)) = 1$ y $\mu_{\overline{f_i}}(I_i, f_{mi}(I_i)) = 0$, esta propiedad implica que cuando I_i toma valores en $[f_{li}(I_i), f_{mi}(I_i)]$ desde $f_{li}(I_i)$ hasta $f_{mi}(I_i)$, $\mu_{\overline{f_i}}(I_i, Q_{li})$ toma valores en $[0,1]$ desde 1 hasta 0 $\forall (I_i, Q_{li}): I_i \in D_i$.

Para un valor particular de I_i , $\mu_{\overline{f_i}}(I_i, Q_{li})$ depende únicamente Q_{li} , y puede corresponder a una función lineal, parabólica o exponencial. La función de pertenencia de perfil lineal es el caso más simple en cuanto a su modelado matemático. El ejemplo representado en la Figura 1 corresponde a dicho perfil. Por último cabe señalar que, para el caso particular en que $f_{li}(I_i) = f_{li}(I_i) = f_{mi}(I_i) \forall I_i \in [I_{i,\min}, I_{i,\max}]$, $\overline{f_i}$ corresponde a la función de transformación clásica f_{li} , es decir, al caso de no borrosidad.

Estimación de las importancias relativas de los atributos

Para cuantificar las importancias relativas de los diferentes atributos incluidos en el *EQI*, se utiliza un vector de prioridades $W = \{w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n\}$ cuyas componentes w_i son los pesos específicos o importancias relativas de dichos atributos. A continuación se describe el procedimiento utilizado para calcular el vector de prioridades W . Si Q es el número de expertos que componen el panel, se solicita a cada panelista una matriz triangular superior $T^{(q)} = [t_{ij}^{(q)}]$ ($q = 1, 2, \dots, Q$) tal que el elemento $t_{ij}^{(q)}$ correspondiente a la fila i y columna j , se estima como el número de veces que, según el criterio del panelista q -ésimo, el atributo i es más importante que el atributo j . Así se obtienen Q matrices triangulares superiores, de modo que cada matriz representa el criterio del panelista en cuanto a las importancias relativas de los atributos ambientales. A partir de cada $T^{(q)}$, se calcula la correspondiente matriz recíproca $X^{(q)} = [x_{ij}^{(q)}]$ de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$x_{ij}^{(q)} = t_{ij}^{(q)} \quad \forall j > i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$x_{ij}^{(q)} = \frac{1}{t_{ji}^{(q)}} \quad \forall j < i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$x_{ij}^{(q)} = 1 \quad \forall j = i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

Con el propósito de obtener la valoración conjunta del panel, a continuación se calcula la matriz media geométrica $\overline{X} = [\overline{x_{ij}}]$ de las matrices recíprocas, donde:

$$\bar{x}_{ij} = \left(\prod_{q=1}^Q x_{ij}^{(q)} \right)^{1/Q} \quad \forall i, j = 1, 2 \dots n \quad (11)$$

Determinación del vector de prioridades

El vector de prioridades no normalizado $W' = \{w'_1, w'_2, \dots, w'_i, \dots, w'_n\}$ se calcula mediante el método de la media geométrica por filas (Crawford, 1987), de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$w'_i = \left(\prod_{j=1}^n \bar{x}_{ij} \right)^{1/n} \quad \forall i, j = 1, 2 \dots n \quad (12)$$

Por lo tanto, la componente w'_i de dicho vector de prioridades es la media geométrica de los elementos de la fila i -ésima de la matriz media geométrica $\bar{X} = [\bar{x}_{ij}]$.

Por último, por normalización de W' se calcula el vector de prioridades normalizado:

$W = \{w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n\}$, donde:

$$w_i = \frac{w'_i}{\sum_{i=1}^n w'_i} \quad (13)$$

Obsérvese que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ y que $\frac{w'_i}{w'_j} = \frac{w_i}{w_j} \quad \forall i, j = 1, 2 \dots n$

Mediante este procedimiento, se calcula el peso específico w_i de cada atributo del *EQI*.

Estimación de los valores difusos de los indicadores ambientales en el emplazamiento $\bar{I}_i^{(est)}$

El estado de calidad ambiental del sistema o emplazamiento objeto de estudio en lo que concierne a cada uno de los atributos del *EQI*, se cuantifica mediante el valor del correspondiente indicador ambiental en dicho sistema. Los valores de los indicadores pueden ser o puntuales (*crisp*) o intervalos. Para determinar sus contribuciones al valor del *EQI* a través de las extensiones difusas \bar{f}_{i_i} , dichos valores deben ser expresados previamente en términos difusos $\bar{I}_i^{(est)}$. Si la estimación del indicador es puntual, su modelado en términos difusos corresponde a un *fuzzy Singleton (FS)*, mientras que si es un intervalo, dicha estimación puede ser adecuadamente modelada

mediante un número difuso triangular (*TFN*). De acuerdo con estas consideraciones, si el valor del indicador en el emplazamiento es *crisp*, su modelado en términos difusos es el FS $\overline{I_i^{(est)}}$, cuya función de pertenencia $\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i)$ es:

$$\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i) = 1 \text{ si } I_i = I_i^{(est)} \quad (14)$$

$$\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i) = 0 \text{ si } I_i \neq I_i^{(est)} \quad (15)$$

En la Figura 2(A) se recoge la representación gráfica de $\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i)$ frente a I_i para el caso en que $\overline{I_i^{(est)}}$ es un FS. Si el estimador del indicador es de intervalo $(I_{li}^{(est)}, I_{ri}^{(est)})$, su modelado en términos difusos se representa mediante el número difuso triangular *TFN* $(I_{li}^{(est)}, I_{ci}^{(est)}, I_{ri}^{(est)})$ donde:

$$I_{ci}^{(est)} = \frac{I_{li}^{(est)} + I_{ri}^{(est)}}{2} \quad (16)$$

$\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i)$ viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i) = \frac{I_i - I_{li}^{(est)}}{I_{ci}^{(est)} - I_{li}^{(est)}} \quad \forall I_i \in [I_{li}^{(est)}, I_{ci}^{(est)}] \quad (17)$$

$$\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i) = \frac{I_{ri}^{(est)} - I_i}{I_{ri}^{(est)} - I_{ci}^{(est)}} \quad \forall I_i \in [I_{ci}^{(est)}, I_{ri}^{(est)}] \quad (18)$$

$$\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i) = 0 \quad \forall I_i \in [I_{i,\min}, I_{li}^{(est)}], \forall I_i \in [I_{ri}^{(est)}, I_{i,\max}] \quad (19)$$

En la Figura 2(B) se muestra la representación gráfica de $\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i)$ frente a I_i para el caso en que $\overline{I_i^{(est)}}$ es un *TFN*.

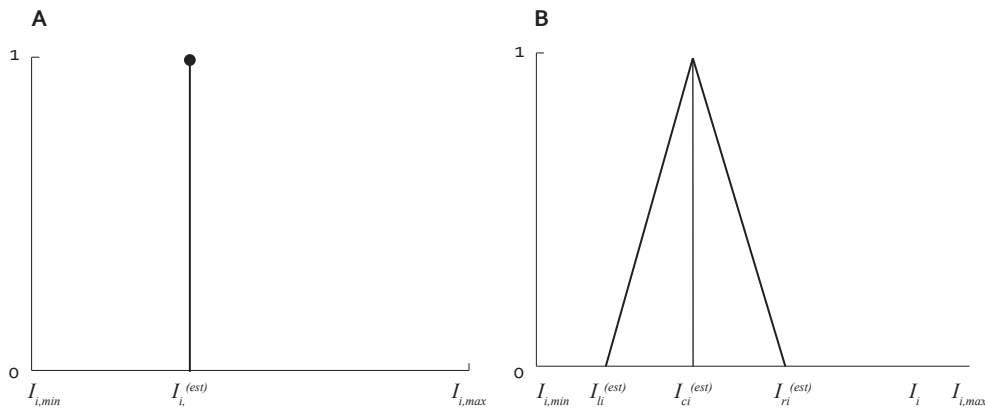


Figura 2. Representaciones gráficas de las funciones de pertenencia de las estimaciones difusas del indicador ambiental. (a) *Fuzzy Singleton* FS; (b) número difuso triangular *TFN*. Fuente: elaboración propia.

Cálculo de las contribuciones de los indicadores \overline{Q}_i al índice de calidad ambiental

Una vez que se dispone de las extensiones difusas de las funciones de transformación de todos los indicadores ambientales \overline{f}_{i_i} , ($i=1,2,\dots,n$), así como de las estimaciones de dichos indicadores en el emplazamiento expresadas en términos difusos $\overline{I}_i^{(est)}$, es el momento de calcular las contribuciones \overline{Q}_i de los indicadores al índice de calidad ambiental. Para ello, debe calcularse para cada uno de los indicadores ambientales la imagen de $\overline{I}_i^{(est)}$ a través de \overline{f}_{i_i} .

De los diferentes operadores de composición difusa que pueden ser aplicados para calcular \overline{Q}_i , se ha seleccionado la composición difusa estándar (Zadeh, 1965), dado que ha sido utilizada con éxito en un gran número de aplicaciones de procedimientos de inferencia difusa. De acuerdo con dicha composición difusa, \overline{Q}_i viene dado por la siguiente ecuación:

$$\overline{Q}_i = \left\{ (Q_i, \mu_{\overline{Q}_i}(Q_i)) : Q_i \in [0,1], \mu_{\overline{Q}_i}(Q_i) \in [0,1] \right\} \quad (20)$$

Donde su función de pertenencia es:

$$\mu_{\overline{Q}_i}(Q_i) = \max - \min_{I_i \in [I_{i,\min}, I_{i,\max}]} \left[\mu_{\overline{I}_i^{(est)}}(I_i), \mu_{\overline{f}_{i_i}}(I_i, Q_i) \right] \quad (21)$$

Cálculo de \overline{Q}_i cuando $\overline{I}_i^{(est)}$ es un fuzzy Singleton

Si $\overline{I}_i^{(est)}$ es un FS, para calcular $\mu_{\overline{Q}_i}(Q_i)$ mediante la ecuación (21) se consideran las dos opciones siguientes:

I. $I \neq I_i^{(est)}$. En tal caso, de acuerdo con la ecuación (15), $\mu_{\overline{I}_i^{(est)}}(I_i) = 0$, y por lo tanto:

$$\min_{I_i \neq I_i^{(est)}} \left[\mu_{\overline{I}_i^{(est)}}(I_i), \mu_{\overline{f}_{i_i}}(I_i, Q_i) \right] = 0 \quad (22)$$

En consecuencia, el máximo de dicha función no corresponde al caso en que $I \neq I_i^{(est)}$

II. $I = I_i^{(est)}$. En este caso, de acuerdo con la ecuación (14), $\mu_{\overline{I}_i^{(est)}}(I_i^{(est)}) = 1$, y por lo tanto:

$$\min_{I_i = I_i^{(est)}} \left[\mu_{\overline{I}_i^{(est)}}(I_i), \mu_{\overline{f}_{i_i}}(I_i, Q_i) \right] = \min_{I_i = I_i^{(est)}} \left[1, \mu_{\overline{f}_{i_i}}(I_i, Q_i) \right] = \mu_{\overline{f}_{i_i}}(I_i^{(est)}, Q_i) \quad (23)$$

Por lo tanto, el máximo de $\min_{I_i \neq I_i^{(est)}} \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i), \mu_{\overline{f_{t_i}}}(I_i, Q_{li}) \right]$ se obtiene para $I = I_i^{(est)}$:

$$\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li}) = \max - \min_{I_i \in [I_{i,min}, I_{i,max}]} \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i), \mu_{\overline{f_{t_i}}}(I_i, Q_{li}) \right] = \mu_{\overline{f_{t_i}}}(I_i^{(est)}, Q_{li}) \quad (24)$$

En otras palabras, $\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li})$ se obtiene particularizando $\mu_{\overline{f_{t_i}}}(I_i, Q_{li})$ para $I_i = I_i^{(est)}$:

El soporte de $\overline{Q_{li}}$ es el intervalo abierto $]Q_{lli}, Q_{lri}[$ donde:

$$Q_{lli} = f_{lli}(I_i^{(est)}) \text{ y } Q_{lri} = f_{lri}(I_i^{(est)}) \quad (25)$$

El center de $\overline{Q_{li}}$ es:

$$Q_{lci} = f_{lci}(I_i^{(est)}) \quad (26)$$

En la Figura 3 se muestra gráficamente el cálculo de $\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li})$ para el caso en que $\overline{I_i^{(est)}}$ es un FS.

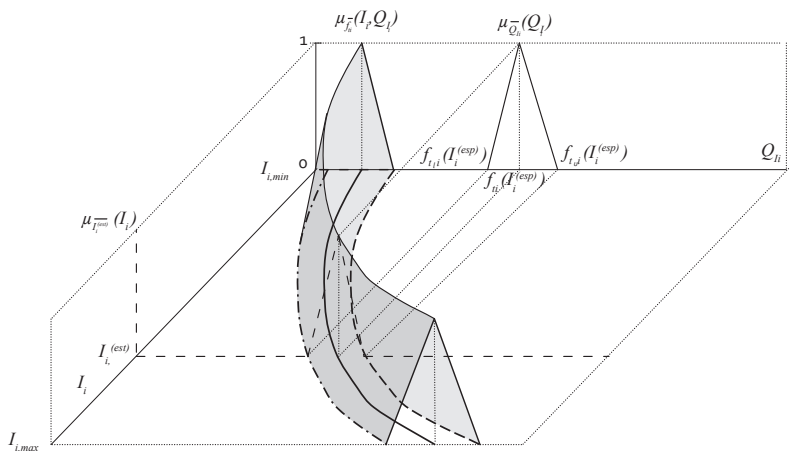


Figura 3. Estimación gráfica de $\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li})$ cuando $\overline{I_i^{(est)}}$ es un FS. Fuente: elaboración propia.

Cálculo de $\overline{Q_{li}}$ cuando $\overline{I_i^{(est)}}$ es un TFN $(I_{li}^{(est)}, I_{ci}^{(est)}, I_{ri}^{(est)})$

Con el propósito de calcular $\overline{Q_{li}}$ ($i=1,2..n$) como la imagen de $\overline{I_i^{(est)}}$ a través de $\overline{f_{t_i}}$ para el caso en que $\overline{I_i^{(est)}}$ es un TFN, a continuación se propone un procedimiento que permite obtener una serie de valores $\Omega(\mu_{\overline{Q_{li}}})$ que describe $\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li})$ en variable discreta. Dicha serie de valores representa una aproximación de $\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li})$, tanto mejor, cuanto mayor sea el número de valores que la integran.

Para ello, a partir de $I_i, \mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i), f_{ti}(I_i), f_{lli}(I_i),$ y $f_{lri}(I_i)$, se definen las series de valores muestreados $\Omega(I_i), \Omega(\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}), \Omega(f_{ti}), \Omega(f_{lli}),$ y $\Omega(f_{lri})$, de acuerdo con el siguiente procedimiento:

Definición de $\Omega(I_i)$

En primer lugar, se definen las siguientes series:

$$\Omega_L(I_i) = \{I_{i0}, I_{i1}, \dots, I_{ij}, \dots, I_{iN'}\} \tag{27}$$

$$\Omega_R(I_i) = \{I_{iN'}, I_{iN'+1}, \dots, I_{iN'+j}, \dots, I_{i2N'}\} \tag{28}$$

Siendo:

$$I_{i0} = I_{ii}^{(est)} ; I_{iN'} = I_{ci}^{(est)} ; I_{i2N'} = I_{ri}^{(est)} \tag{29}$$

Los valores I_{ij} de la serie se calculan del siguiente modo:

$$I_{ij} = I_{i0} + j\Delta I_{iL} \quad \forall j = 1, 2, \dots, N' \tag{30}$$

$$\text{donde } \Delta I_{iL} = \frac{I_{iN'} - I_{i0}}{N'} \tag{31}$$

$$I_{ij} = I_{iN'} + (j - N')\Delta I_{iR} \quad \forall j = N'+1, N'+2, \dots, 2N' \tag{32}$$

$$\text{donde } \Delta I_{iR} = \frac{I_{i2N'} - I_{iN'}}{N'} \tag{33}$$

Obsérvese que $\Omega_L(I_i)$ está formada por $N' + 1$ valores de I_i equiespaciados que recorren el soporte de $\overline{I_i^{(est)}}$ en el tramo ascendente de $\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i)$. Análogamente, $\Omega_R(I_i)$ está formada por $N'+1$ valores de I_i equiespaciados, recorriendo el soporte de $\overline{I_i^{(est)}}$ en el tramo descendente de $\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i)$.

$\Omega(I_i)$ se define como la unión de $\Omega_L(I_i)$ y $\Omega_R(I_i)$:

$$\Omega_{I_i} = \Omega_{L I_i} \cup \Omega_{R I_i} \tag{34}$$

Por lo tanto, si $N = 2N'$ resulta finalmente:

$$\Omega(I_i) = \{I_{i0}, I_{i1}, \dots, I_{iN'}, I_{iN'+1}, \dots, I_{iN}\} \tag{35}$$

Definición de $\Omega\left(\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}\right)$

$\Omega\left(\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}\right)$ se define como el conjunto formado por los valores de $\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i)$ para $I_i = I_{i0}, I_{i1}, \dots, I_{iN'}, I_{iN'+1}, \dots, I_{iN}$, de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\Omega\left(\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}\right) = \left\{ \mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_{i0}), \mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_{i1}), \dots, \mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_{iN'}), \mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_{iN'+1}), \dots, \mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_{iN}) \right\} \tag{36}$$

Definición de $\Omega(f_{ii}), \Omega(f_{li}),$ y $\Omega(f_{ui})$

$$\Omega(f_{ii}) = \{f_{ii}(I_{i0}), f_{ii}(I_{i1}), \dots, f_{ii}(I_{iN'}), f_{ii}(I_{iN'+1}), \dots, f_{ii}(I_{iN})\} \tag{37}$$

$$\Omega(f_{li}) = \{f_{li}(I_{i0}), f_{li}(I_{i1}), \dots, f_{li}(I_{iN'}), f_{li}(I_{iN'+1}), \dots, f_{li}(I_{iN})\} \quad (38)$$

$$\Omega(f_{tui}) = \{f_{tui}(I_{i0}), f_{tui}(I_{i1}), \dots, f_{tui}(I_{iN'}), f_{tui}(I_{iN'+1}), \dots, f_{tui}(I_{iN})\} \quad (39)$$

Definición de $\Omega(Q_{li})$

Para definir $\Omega(Q_{li})$, previamente se definen las siguientes series de valores:

$$\Omega_L(Q_{li}) = \{Q_{li0}, Q_{li1}, \dots, Q_{lik}, \dots, Q_{liM'}\} \quad (40)$$

$$\Omega_R(Q_{li}) = \{Q_{liM'}, Q_{liM'+1}, \dots, Q_{liM'+k}, \dots, Q_{li2M'}\} \quad (41)$$

donde:

$$Q_{li0} = \min[\Omega(f_{li})]; \quad Q_{liM'} = f_{li}(I_{ci}^{(est)}); \quad Q_{li2M'} = \max[\Omega(f_{tui})] \quad (42)$$

Los valores Q_{lik} se calculan del siguiente modo:

$$Q_{lik} = Q_{li0} + k\Delta Q_{liL} \quad \forall k = 1, 2, \dots, M' \quad (43)$$

$$\text{donde } \Delta Q_{liL} = \frac{Q_{liM'} - Q_{li0}}{M'} \quad (44)$$

$$Q_{lik} = Q_{liM'} + (k - M')\Delta Q_{liR} \quad \forall k = M'+1, M'+2, \dots, 2M' \quad (45)$$

$$\text{donde } \Delta Q_{liR} = \frac{Q_{li2M'} - Q_{liM'}}{M'}$$

$\Omega(Q_{li})$ se define como la unión de $\Omega_L(Q_{li})$ y $\Omega_R(Q_{li})$:

$$\Omega(Q_{li}) = \Omega_L(Q_{li}) \cup \Omega_R(Q_{li}) \quad (46)$$

Si $M = 2M'$, resulta finalmente:

$$\Omega(Q_{li}) = \{Q_{li0}, Q_{li1}, \dots, Q_{liM'}, \dots, Q_{liM}\} \quad (47)$$

Cálculo de la matriz $\left[\mu_{\bar{f}_{li}}(I_i, Q_{li}) \right]$

A partir de $\mu_{\bar{f}_{li}}(I_i, Q_{li})$ se calcula la matriz $\left[\mu_{\bar{f}_{li}}(I_i, Q_{li}) \right]$, de modo que el elemento de la fila j y columna k es $\mu_{\bar{f}_{li}}(I_{ij}, Q_{lik})$ donde $j = 0, 1, \dots, N$ y $k = 0, 1, 2, \dots, M$.

Por lo tanto:

$$\left[\mu_{\bar{f}_{li}}(I_i, Q_{li}) \right] = \begin{bmatrix} \mu_{\bar{f}_{li}}(I_{i0}, Q_{li0}) \dots \mu_{\bar{f}_{li}}(I_{i0}, Q_{lik}) \dots \mu_{\bar{f}_{li}}(I_{i0}, Q_{liM}) \\ \dots \\ \mu_{\bar{f}_{li}}(I_{ij}, Q_{li0}) \dots \mu_{\bar{f}_{li}}(I_{ij}, Q_{lik}) \dots \mu_{\bar{f}_{li}}(I_{ij}, Q_{liM}) \\ \dots \\ \mu_{\bar{f}_{li}}(I_{iN}, Q_{li0}) \dots \mu_{\bar{f}_{li}}(I_{iN}, Q_{lik}) \dots \mu_{\bar{f}_{li}}(I_{iN}, Q_{liM}) \end{bmatrix} \quad (48)$$

Como observación de interés, cabe destacar que, de acuerdo con las expresiones (29) y (42), el elemento de $\left[\mu_{\overline{f_{ii}}} (I_i, Q_{li}) \right]$ situado en la fila N' (j=N') y columna M' (k=M') es:

$$\mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{iN'}, Q_{liM'}) = \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{ci}^{(est)}, f_{ii} (I_{ci}^{(est)})) \tag{49}$$

De acuerdo con la propiedad (c) de la extensión difusa de una función de transformación, dada por la ecuación (5):

$$\mu_{\overline{f_{ii}}} (I_i, f_{ii} (I_i)) = 1 \quad \forall I_i \in D_i \tag{50}$$

Por lo tanto:

$$\mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{iN'}, Q_{liM'}) = 1 \tag{51}$$

Cálculo de la matriz $\left[\mu_{\overline{f_{ii}}} (I_i, Q_{li}) \right]_{MIN}$

La matriz $\left[\mu_{\overline{f_{ii}}} (I_i, Q_{li}) \right]_{MIN}$ se calcula de modo que el elemento de la fila j y columna k es el mínimo de $\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{ij})$ y $\mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{ij}, Q_{lik})$. Dicha matriz viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \left[\mu_{\overline{f_{ii}}} (I_i, Q_{li}) \right]_{MIN} = \\ & \left[\begin{array}{l} \min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{i0}), \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{i0}, Q_{li0}) \right] \dots \min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{i0}), \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{i0}, Q_{lik}) \right] \dots \min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{i0}), \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{i0}, Q_{liM}) \right] \\ \dots \\ \min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{ij}), \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{ij}, Q_{li0}) \right] \dots \min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{ij}), \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{ij}, Q_{lik}) \right] \dots \min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{ij}), \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{ij}, Q_{liM}) \right] \\ \dots \\ \min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{iN}), \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{iN}, Q_{li0}) \right] \dots \min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{iN}), \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{iN}, Q_{lik}) \right] \dots \min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{iN}), \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{iN}, Q_{liM}) \right] \end{array} \right] \tag{52} \end{aligned}$$

A modo de observación de interés, cabe reseñar que el elemento de $\left[\mu_{\overline{f_{ii}}} (I_i, Q_{li}) \right]_{MIN}$ situado en la fila N' (j=N') y columna M' (k=M') es:

$$\min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{iN'}), \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{iN'}, Q_{liM'}) \right] \tag{53}$$

Puesto que $\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{iN'}) = \mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{ci}^{(est)}) = 1$ (ecuación (14)) y $\mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{iN'}, Q_{liM'}) = 1$ (ecuación (51)), resulta finalmente:

$$\min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}} (I_{iN'}), \mu_{\overline{f_{ii}}} (I_{iN'}, Q_{liM'}) \right] = 1 \tag{54}$$

Cálculo de $\Omega \left(\mu_{\overline{Q_{li}}} \right)$

$\Omega \left(\mu_{\overline{Q_{li}}} \right)$ es la serie de valores que representa $\mu_{\overline{Q_{li}}} (Q_{li})$ en variable discreta, y viene dada por la siguiente expresión:

$$\Omega \left(\mu_{\overline{Q_{li}}} \right) = \left\{ \mu_{\overline{Q_{li}}} (Q_{li0}), \mu_{\overline{Q_{li}}} (Q_{li1}), \dots, \mu_{\overline{Q_{li}}} (Q_{lik}), \dots, \mu_{\overline{Q_{li}}} (Q_{liM}) \right\} \tag{55}$$

donde $\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{lik})$ con $k = 0, 1, 2, \dots, M$ se calcula como el máximo de los valores de la columna k-ésima de la matriz $\left[\mu_{\overline{f_{li}}}(I_i, Q_{li}) \right]_{MIN}$, dada por la ecuación (52):

$$\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{lik}) = \max_{j=0,1,\dots,M} \left\{ \min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_{ij}), \mu_{\overline{f_{li}}}(I_{ij}, Q_{lik}) \right] \right\} \quad (56)$$

Para $k = M'$, el elemento de $\Omega(\mu_{\overline{Q_{li}}})$ es $\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{liM'})$. De acuerdo con la ecuación (56), dicho elemento es el máximo de la columna M' de la matriz $\left[\mu_{\overline{f_{li}}}(I_i, Q_{li}) \right]_{MIN}$. Dado que $\min \left[\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_{iN'}), \mu_{\overline{f_{li}}}(I_{iN'}, Q_{liM'}) \right] = 1$ es el elemento de la fila N' y columna M' , dicho elemento pertenece a la columna M' . Por lo tanto:

$$\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{liM'}) = 1 \quad (57)$$

Propiedades de $\Omega(\mu_{\overline{Q_{li}}})$

Las propiedades que caracterizan la serie $\Omega(\mu_{\overline{Q_{li}}})$ son las siguientes:

$$I. \quad \mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li0}) = 0; \mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{liM'}) = 1; \mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{liM}) = 0 \quad (58)$$

$$II. \quad \Omega(\mu_{\overline{Q_{li}}}) \text{ es creciente en } [Q_{li0}, Q_{liM'}] \text{ y decreciente en } [Q_{liM'}, Q_{liM}]$$

$$III. \quad \mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li}) = 0 \quad \forall Q_{li} \in [0, Q_{li0}] \text{ y } \forall Q_{li} \in [Q_{liM}, 1] \quad (59)$$

IV. El soporte de $\overline{Q_{li}}$ es el intervalo abierto $]Q_{lii}, Q_{lri}[$ donde:

$$Q_{lii} = Q_{li0} \text{ y } Q_{lri} = Q_{liM} \quad (60)$$

V. El center de $\overline{Q_{li}}$ es:

$$Q_{lci} = Q_{liM'} \quad (61)$$

Asimismo, cabe destacar que a mayor valor, tanto de N como de M , mayor es la resolución del modelo discreto, y por lo tanto, $\Omega(\mu_{\overline{Q_{li}}})$ representa con mayor exactitud a $\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li})$.

En la Figura 4 se ilustra gráficamente el cálculo de $\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li})$ a partir de $\mu_{\overline{I_i^{(est)}}}(I_i)$ y $\mu_{\overline{f_{li}}}(I_i, Q_{li})$ para el caso en que $\overline{I_i^{(est)}}$ es un *TFN* $(I_{li}^{(est)}, I_{ci}^{(est)}, I_{ri}^{(est)})$. Puesto que en este ejemplo, $f_{li}(I_i)$, $f_{lci}(I_i)$ y $f_{lri}(I_i)$ son funciones crecientes, resulta que $\min[\Omega(f_{li})] = f_{lci}(I_{li}^{(est)})$ y $\max[\Omega(f_{lri})] = f_{lri}(I_{ri}^{(est)})$.

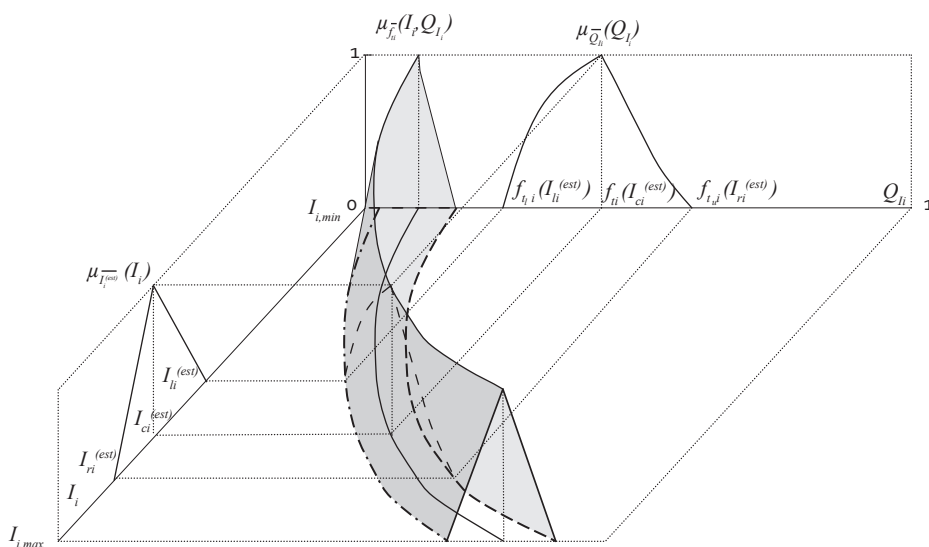


Figura 4. Determinación de $\overline{Q_{li}}$ a partir de $\overline{I_i^{(est)}}$ y $\overline{f_{li}}$ cuando $\overline{I_i^{(est)}}$ es un TFN. Fuente: elaboración propia.

Por último, a partir del modelo discreto de $\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li})$, puede obtenerse su correspondiente modelo continuo mediante la siguiente ecuación:

$$\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li}) = \mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{lik+1}) - \frac{\mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{lik+1}) - \mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{lik})}{Q_{lik+1} - Q_{lik}} (Q_{lik+1} - Q_{li}) \quad \forall Q_{li} \in [Q_{lik}, Q_{lik+1}] \quad (62)$$

Donde $k = 0, 1, 2, \dots, M', M'+1, \dots, M-1$ y $M = 2M'$.

Este modelo continuo corresponde a la concatenación de los segmentos de recta que unen los puntos: $(Q_{li0}, \mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li0}))$, $(Q_{li1}, \mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{li1}))$, \dots , $(Q_{liM'}, \mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{liM'}))$, $(Q_{liM'+1}, \mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{liM'+1}))$, \dots , $(Q_{liM}, \mu_{\overline{Q_{li}}}(Q_{liM}))$.

Determinación del valor difuso del índice de calidad ambiental \overline{EQI}

Una vez que se dispone de la contribución $\overline{Q_{li}}$ de cada indicador ambiental, es el momento de llevar a cabo la agregación de dichas contribuciones, teniendo en consideración sus importancias relativas, cuantificadas mediante el vector de prioridades normalizado $W = \{w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n\}$. El resultado de dicha agregación es el valor difuso del índice de calidad ambiental \overline{EQI} en el emplazamiento objeto de estudio. El procedimiento utilizado requiere la definición de un operador de composición difusa destinado a calcular la función de pertenencia de \overline{EQI} : $\mu_{\overline{EQI}}(EQI)$.

Definición del operador de composición difusa para el cálculo de $\mu_{\overline{EQI}}(EQI)$

Para calcular $\mu_{\overline{EQI}}(EQI)$, se propone la aplicación del operador de composición difusa max-min de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\mu_{\overline{EQI}}(EQI) = \max - \min_{\substack{Q_{I1}, Q_{I2}, \dots, Q_{In} \in [0,1] \\ :EQI = \sum_{i=1}^n w_i Q_{Ii}}} \left(\mu_{\overline{Q_{I1}}}(Q_{I1}), \mu_{\overline{Q_{I2}}}(Q_{I2}), \dots, \mu_{\overline{Q_{Ii}}}(Q_{Ii}), \dots, \mu_{\overline{Q_{In}}}(Q_{In}) \right) \quad (63)$$

EQI es la variable *crisp* que describe el índice de calidad ambiental y su rango de valores es $[0,1]$. El valor difuso del índice de calidad ambiental \overline{EQI} es el conjunto difuso dado por la siguiente ecuación:

$$\overline{EQI} = \left\{ \left(EQI, \mu_{\overline{EQI}}(EQI) \right); EQI \in [0,1], \mu_{\overline{EQI}}(EQI) \in [0,1] \right\} \quad (64)$$

Por lo tanto, de acuerdo con las ecuaciones (63) y (64), \overline{EQI} es la media aritmética ponderada de los $\overline{Q_{Ii}}$ cuyos coeficientes de ponderación son los w_i , es decir, los componentes del vector de prioridades normalizado $W = \{w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n\}$.

A partir de la ecuación (63) puede demostrarse que, para el tramo creciente -superíndice (c)- de las funciones de pertenencia, dado un valor $\alpha_z^{(c)} \in [0,1]$ tal que $\alpha_z^{(c)} = \mu_{\overline{Q_{I1}}}(Q_{I1z}^{(c)}) = \dots = \mu_{\overline{Q_{Ii}}}(Q_{Iiz}^{(c)}) = \dots = \mu_{\overline{Q_{In}}}(Q_{Inz}^{(c)})$, el valor $EQI_z^{(c)}$ para el que se cumple que $\mu_{\overline{EQI}}(EQI_z^{(c)}) = \alpha_z^{(c)}$, viene dado por la siguiente ecuación:

$$EQI_z^{(c)} = \sum_{i=1}^n w_i Q_{Iiz}^{(c)} \quad (65)$$

Análogamente, para el tramo decreciente -superíndice (d)- de las funciones de pertenencia, dado un valor $\alpha_z^{(d)} \in [0,1]$ tal que $\alpha_z^{(d)} = \mu_{\overline{Q_{I1}}}(Q_{I1z}^{(d)}) = \dots = \mu_{\overline{Q_{Ii}}}(Q_{Iiz}^{(d)}) = \dots = \mu_{\overline{Q_{In}}}(Q_{Inz}^{(d)})$, el valor $EQI_z^{(d)}$ para el que se cumple que $\mu_{\overline{EQI}}(EQI_z^{(d)}) = \alpha_z^{(d)}$, viene dado por la siguiente ecuación:

$$EQI_z^{(d)} = \sum_{i=1}^n w_i Q_{Iiz}^{(d)} \quad (66)$$

En la Figura 5 se muestra la determinación gráfica de $\mu_{\overline{EQI}}(EQI)$.² El soporte de \overline{EQI} es $]EQI_l, EQI_r[$ donde $EQI_l = \sum_{i=1}^n w_i Q_{Ili}$ y $EQI_r = \sum_{i=1}^n w_i Q_{Iri}$. El center de \overline{EQI} es $EQI_c = \sum_{i=1}^n w_i Q_{Ici}$.

2 Dado que la formulación matemática requerida para explicar el procedimiento de cálculo de $\mu_{\overline{EQI}}(EQI)$ es excesivamente extensa, se ha optado por mostrar su determinación gráfica, omitiendo su demostración.

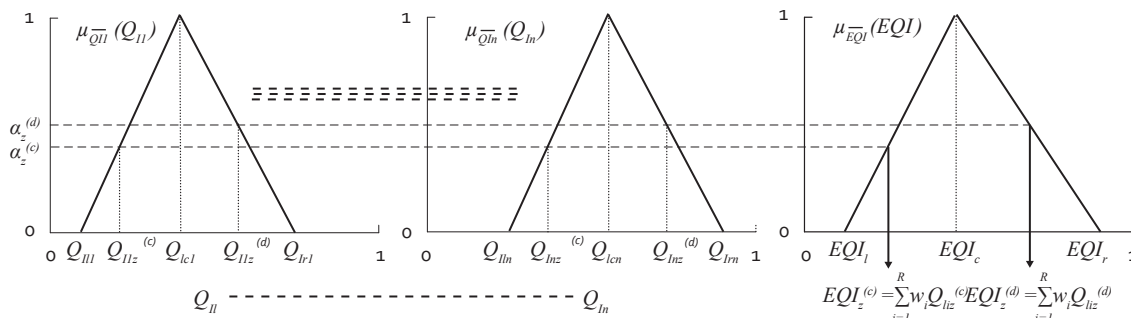


Figura 5. Estimación gráfica de $\mu_{EQI}(EQI)$ para los tramos creciente ^(c) y decreciente ^(d). Fuente: elaboración propia

Si $\alpha_z^{(c)}$ recorre el intervalo $[0,1]$ de modo que $\alpha_0^{(c)} = 0$, $\alpha_{M'}^{(c)} = 1$ y $\alpha_{z+1}^{(c)} - \alpha_z^{(c)} = 1/M'$, $\forall z = 0, 1 \dots M'-1$, a mayor valor de M' mayor es el número de valores $EQI_z^{(c)}$, y por lo tanto, mayor es la resolución del modelo discreto de $\mu_{EQI}(EQI)$ en su tramo creciente. El modelo continuo de $\mu_{EQI}(EQI)$ para el tramo creciente se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$\mu_{EQI}(EQI) = \alpha_{z+1}^{(c)} - \frac{\alpha_{z+1}^{(c)} - \alpha_z^{(c)}}{EQI_{z+1}^{(c)} - EQI_z^{(c)}} (EQI_{z+1}^{(c)} - EQI) \quad \forall z = 0, 1, 2, \dots, M'-1 \quad (67)$$

Este modelo corresponde a la sucesión de los segmentos que unen los puntos $(EQI_0^{(c)}, \alpha_0^{(c)})$, $(EQI_1^{(c)}, \alpha_1^{(c)})$, ..., $(EQI_z^{(c)}, \alpha_z^{(c)})$, ..., $(EQI_{M'}^{(c)}, \alpha_{M'}^{(c)})$.

Análogamente, si $\alpha_z^{(d)}$ recorre el intervalo $[0,1]$ de modo que $\alpha_0^{(d)} = 0$, $\alpha_{M'}^{(d)} = 1$ y $\alpha_{z+1}^{(d)} - \alpha_z^{(d)} = 1/M'$, con $z = 0, 1 \dots M'-1$, a mayor valor de M' mayor es el número de valores $EQI_z^{(d)}$, y por lo tanto, mayor es la resolución del modelo discreto de $\mu_{EQI}(EQI)$ en su tramo decreciente. El modelo continuo de $\mu_{EQI}(EQI)$ para el tramo decreciente se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$\mu_{EQI}(EQI) = \alpha_{z+1}^{(d)} - \frac{\alpha_{z+1}^{(d)} - \alpha_z^{(d)}}{EQI_{z+1}^{(d)} - EQI_z^{(d)}} (EQI_{z+1}^{(d)} - EQI) \quad \forall z = 0, 1, 2, \dots, M'-1 \quad (68)$$

Este modelo, de forma análoga al del tramo creciente, corresponde a la sucesión de los segmentos que unen los puntos $(EQI_0^{(d)}, \alpha_0^{(d)})$, $(EQI_1^{(d)}, \alpha_1^{(d)})$, ..., $(EQI_z^{(d)}, \alpha_z^{(d)})$, ..., $(EQI_{M'}^{(d)}, \alpha_{M'}^{(d)})$.

Desborrosificación de \overline{EQI}

Para obtener una estimación del índice de calidad ambiental en términos clásicos, es decir, no difusos, debe llevarse a cabo la desborrosificación de \overline{EQI} . El procedimiento que se describe a continuación permite calcular, a partir de \overline{EQI} , una estimación clásica del índice de calidad ambiental formada por un estimador puntual y un estimador de intervalo.

Se establece que el estimador puntual del índice de calidad ambiental es el valor de EQI tal que $\mu_{\overline{EQI}}(EQI) = 1$. En otras palabras, el estimador puntual de calidad ambiental es el valor de EQI que pertenece en mayor grado a \overline{EQI} . Dado que dicho valor es su center EQI_c , se concluye que el estimador puntual del índice de calidad ambiental es EQI_c .

El estimador de intervalo se define como el par de valores de EQI ($EQI_c - \delta_l(\overline{EQI}), EQI_c + \delta_r(\overline{EQI})$), donde $\delta_l(\overline{EQI})$, es la desviación media por la izquierda de \overline{EQI} , y $\delta_r(\overline{EQI})$ es la desviación media por la derecha de \overline{EQI} . Estas desviaciones se calculan mediante las siguientes expresiones:

$$\delta_l(\overline{EQI}) = \int_0^1 \Delta^{(c)} d\alpha \quad (69)$$

donde $\Delta^{(c)} = EQI_c - EQI$, $EQI \in [EQI_l, EQI_c]$

$$\delta_r(\overline{EQI}) = \int_0^1 \Delta^{(d)} d\alpha \quad (70)$$

donde $\Delta^{(d)} = EQI - EQI_c$, $EQI \in [EQI_c, EQI_r]$

Ambas desviaciones puede estimarse aplicando el método trapezoidal de integración numérica, de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$\delta_l(\overline{EQI}) = \sum_{z=0}^{M'-1} \left[\frac{\Delta_z^{(c)} + \Delta_{z+1}^{(c)}}{2} \times (\alpha_{z+1}^{(c)} - \alpha_z^{(c)}) \right] = \frac{\sum_{z=0}^{M'-1} (\Delta_z^{(c)} + \Delta_{z+1}^{(c)})}{2M'} \quad (71)$$

donde: $\alpha_z^{(c)} = \mu_{\overline{EQI}}(EQI_z^{(c)})$; $\Delta_z^{(c)} = EQI_c - EQI_z^{(c)}$

Igualmente:

$$\delta_r(\overline{EQI}) = \sum_{z=0}^{M'-1} \left[\frac{\Delta_z^{(d)} + \Delta_{z+1}^{(d)}}{2} \times (\alpha_{z+1}^{(d)} - \alpha_z^{(d)}) \right] = \frac{\sum_{z=0}^{M'-1} (\Delta_z^{(d)} + \Delta_{z+1}^{(d)})}{2M'} \quad (72)$$

donde: $\alpha_z^{(d)} = \mu_{\overline{EQI}}(EQI_z^{(d)})$; $\Delta_z^{(d)} = EQI_c - EQI_z^{(d)}$

Mediante este procedimiento, tras calcular el valor difuso del índice de calidad ambiental \overline{EQI} , se obtiene finalmente una estimación clásica de dicho índice. No obstante, cabe señalar que, aunque la estimación clásica del índice de calidad ambiental presenta como ventaja su sencillez descriptiva, el resultado borroso, es decir, el valor borroso del índice de calidad ambiental, constituye una descripción más acorde con la naturaleza del procedimiento de estimación y más rica en cuanto a la información incluida. Asimismo, los valores borrosos de calidad ambiental pueden considerarse como valores de la variable lingüística *calidad ambiental*, lo que posibilita su interpretación y discusión en términos lingüísticos.

Conclusiones

En este artículo se propone una nueva metodología destinada al desarrollo de índices de calidad ambiental (EQI) basada en funciones de transformación difusas (\overline{f}_i), alternativa a las metodologías de valoración ambiental basadas en conjuntos de reglas difusas. Se trata de una metodología versátil que permite desarrollar índices de calidad ambiental destinados a valorar diferentes aspectos del medio ambiente, ya sean de carácter físico o socioeconómico, así como índices de sostenibilidad ambiental. Su puesta en práctica implica la participación de un panel de expertos, cuya función es aportar la información necesaria en todos los aspectos relativos a la calidad ambiental a valorar, y de un equipo ambientalista, encargado de coordinar la labor del panel y de llevar a cabo la recopilación y tratamiento de la información. De acuerdo con la metodología propuesta, el diseño de un EQI comienza con la selección de un conjunto de atributos $A = \{a_i\}$ $i = 1, 2, \dots, n$ en el que se recogen todos los aspectos con influencia significativa sobre la calidad ambiental objeto de valoración, junto con la selección de un indicador ambiental convencional I_i para cuantificar cada atributo a_i . A continuación, para cada I_i se define la extensión difusa de la función de transformación correspondiente \overline{f}_{i_i} , cuyo cometido es establecer la correspondencia inherentemente imprecisa entre I_i y su contribución al índice de calidad ambiental Q_i . Los pesos específicos de los atributos que componen el EQI se cuantifican mediante un vector de prioridades normalizado $W = \{w_i\}$. Dicho vector se calcula por normalización del vector

de prioridades obtenido mediante el método de la media geométrica por filas, a partir de la matriz conjunta de las valoraciones proporcionadas por los expertos $\overline{X} = [\overline{x}_{ij}]$. La calidad ambiental del emplazamiento viene dada por los valores de los indicadores ambientales en dicho emplazamiento, que pueden ser puntuales o intervalos. Para determinar sus contribuciones al valor del EQI , dichos valores deben expresarse en términos difusos $\overline{I}_i^{(est)}$. Si el indicador viene dado por un valor *crisp*, su descripción difusa es un *fuzzy singleton FS*, mientras que si es un intervalo, se expresa por medio de un número difuso triangular *TFN*. La contribución \overline{Q}_{i_i} de cada indicador al valor del índice de calidad se obtiene como la imagen de $\overline{I}_i^{(est)}$ a través de \overline{f}_{i_i} , siendo la composición difusa estándar el operador de composición utilizado para calcular $\mu_{\overline{Q}_{i_i}}$. El valor difuso del índice de calidad ambiental \overline{EQI} se obtiene como la combinación lineal de los \overline{Q}_{i_i} cuyos coeficientes son los pesos de los atributos correspondientes, dados por el vector de prioridades normalizado $W = \{w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n\}$. Para ello, $\mu_{\overline{EQI}}$ se calcula mediante un operador de composición difusa max-min a partir de las $\mu_{\overline{Q}_{i_i}}$, con la siguiente restricción: $EQI = \sum_{i=1}^n w_i Q_{i_i}$. Los estimadores clásicos —puntual y de intervalo— se calculan por desborrosificación de \overline{EQI} . El estimador puntual del índice de calidad ambiental es el center \overline{EQI} , es decir, el valor de EQI tal que $\mu_{\overline{EQI}}(EQI) = 1$, mientras que el estimador de intervalo es $(EQI_c - \delta_l(\overline{EQI}), EQI_c + \delta_r(\overline{EQI}))$, donde $\delta_l(\overline{EQI})$ y $\delta_r(\overline{EQI})$ son las desviaciones medias de \overline{EQI} por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Finalmente, cabe señalar que los cálculos requeridos para el desarrollo e implementación de los índices de calidad ambiental a desarrollar mediante esta metodología pueden ser realizados mediante programación, utilizando rutinas en *Visual Basic Application (VBA)* incluidas en documentos Excel.

Agradecimientos. El autor agradece los comentarios y sugerencias propuestas por los revisores que han participado en la evaluación de este artículo.

Conflicto de intereses. El manuscrito fue preparado y revisado por el autor, quien declara no tener algún conflicto de interés que coloque en riesgo la validez de los resultados aquí presentados.

Bibliografía

- Abouelnaga, A., Metwally, A., Aly, N., Nagy, M., Agamy, S., 2010. Assessment of nuclear energy sustainability index using fuzzy logic. *Nucl. Eng. Des.* 240, 1928-1933. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2010.03.010
- Adriaenssens, V., De Baets, B., Goethals, P., De Pauw, N., 2004. Fuzzy rule-based models for decision support in ecosystem management. *Sci. Total Environ.* 319, 1-12. DOI: 10.1016/S0048-9697(03)00433-9
- Arunraj, N., Maiti, J., 2009. Development of environmental consequence index (ECI) using fuzzy composite programming. *J. Hazard. Mater.* 162, 29-43. DOI: 10.1016/j.jhazmat.2008.05.067
- Crawford, G., 1987. The geometric mean procedure for estimating the scale of a judgment matrix. *Math. Modelling* 9, 327-334. DOI: 10.1016/0270-0255(87)90489-1
- Duarte, O., 2000. Técnicas difusas en la evaluación del impacto ambiental. Tesis de doctorado. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática, Departamento de ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Granada, Granada, España.
- Genske, D., Heinrich, K., 2009. A knowledge-based fuzzy expert system to analyse degraded terrain. *Expert Syst. Appl.* 36, 2459-2472. DOI: 10.1016/j.eswa.2007.12.021
- Gharibi, H., Mahvi, A., Nabizadeh, R., Arabalibeik, H., Yunesian, M., Sowlat, M., 2012. A novel approach in water quality assessment based on fuzzy logic. *J. Environ. Manage.* 112, 87-95. DOI: 10.1016/j.jenvman.2012.07.007
- Hu, Y., Wang, Z., Wen, J., Li, Y., 2016. Stochastic fuzzy environmental risk characterization of uncertainty and variability in risk assessments: a case study of polycyclic aromatic hydrocarbons in soil at a petroleum-contaminated site in China. *J. Hazard. Mater.* 316, 143-150. DOI: 10.1016/j.jhazmat.2016.05.033
- Icaga, Y., 2007. Fuzzy evaluation of water quality classification. *Ecol. Indic.* 7, 710-718. DOI: 10.1016/j.ecolind.2006.08.002
- Kaufmann, M., Tobias, S., Schulin, R., 2009. Quality evaluation of restored soils with a fuzzy logic expert system. *Geoderma* 151, 290-302. DOI: 10.1016/j.geoderma.2009.04.018
- Kaya, T., Kahraman, C., 2011. An integrated fuzzy AHP-ELECTRE methodology for environmental impact assessment. *Expert Syst. Appl.* 38, 553-8562. DOI: 10.1016/j.eswa.2011.01.057
- Lermontov, A., Yokoyama, L., Lermontov, M., Soares, M., 2009. River quality analysis using fuzzy water quality index: Ribeira do Iguape river watershed, Brazil. *Ecol. Indic.* 9, 1188-1197. DOI: 10.1016/j.ecolind.2009.02.006
- Liu, G., Baniyounes, A., Rasul, M., Amanullah, M., Khan, M., 2012. Fuzzy logic based environmental indicator for sustainability assessment of renewable energy system using life cycle assessment. *Procedia Engineering* 49, 35-41. Energy-IEF International Energy Congress (IEF-IEC2012). DOI: 10.1016/j.proeng.2012.10.109
- Marchini, A., Facchinetti, T., Mistri, M., 2009. F-IND: A framework to design fuzzy indices of environmental conditions. *Ecol. Indic.* 9, 485-496. DOI: 10.1016/j.ecolind.2008.07.004
- Martins Gurgat, B., Carvalho-Oliveira, R., Canavese de Oliveira, D., Jucoski, E., Antoniaconi, G., Saldiva, P., Arantes Reis, R., 2016. Atmospheric metal pollutants and environmental injustice: A methodological approach to environmental risk analysis using fuzzy logic and tree bark. *Ecol. Indic.* 71, 428-437. DOI: 10.1016/j.ecolind.2016.07.028
- Musee, N., Lorenzen, L., Aldrich, C., 2008. New methodology for hazardous waste classification using fuzzy set theory. Part I. Knowledge acquisition. *J. Hazard. Mater.* 154, 1040-1051. DOI: 10.1016/j.jhazmat.2007.11.011
- Nasiri, F., Huang, G., 2008. A fuzzy decision aid model for environmental performance assessment in waste recycling. *Environ. Modell. Softw.* 23, 677-689. DOI: 10.1016/j.envsoft.2007.04.009
- Peche, R., 2006. Valoración cualitativa de impactos ambientales mediante lógica difusa. *Gest. Ambient.* 9, 99-113.
- Peche, R., Rodríguez, E., 2009. Environmental impact assessment procedure: A new approach based on fuzzy logic. *Environ. Impact Assess. Rev.* 29, 275-283. DOI: 10.1016/j.eiar.2009.01.005
- Peche, R., Rodríguez, E., 2011. Environmental impact assessment by means of a procedure based on fuzzy logic: a practical application. *Environ. Impact Assess. Rev.* 31, 87-96. DOI: 10.1016/j.eiar.2010.03.006

- Peche, R., Rodríguez, E., 2012. Development of environmental quality indexes based on fuzzy logic. a case study. *Ecol. Indic.* 23, 555-565. DOI: 10.1016/j.ecolind.2012.04.029
- Peche, R., Rodríguez, E., 2015. Fuzzy extension of a classical function: an alternative to the knowledge base for modelling imprecise relations. *Appl. Math. Model.* 39, 3024-3049. DOI: 10.1016/j.apm.2014.11.030
- Prato, T., 2009. Fuzzy adaptive management of social and ecological carrying capacities for protected areas. *J. Environ. Manage.* 90, 2551-2557. DOI: 10.1016/j.jenvman.2009.01.015
- Rodríguez, E., Peche, R., Garbisu, C., Gorostiza, I., Epelde, L., Artetxe, U., Irizar, A., Soto, M., Becerril, J., Etxebarria, J., 2016. Dynamic quality index for agricultural soils based on fuzzy logic. *Ecol. Indic.* 60, 678-692. DOI: 10.1016/j.ecolind.2015.08.016
- Ruiz-Padillo, A., Ruiz, D., Torija, A., Ramos-Ridao, A., 2016. Selection of suitable alternatives to reduce the environmental impact of road traffic noise using a fuzzy multi-criteria decision model. *Environ. Impact Assess. Rev.* 61, 8-18. DOI: 10.1016/j.eiar.2016.06.003
- Sami, M., Shiekhdavoodi, M., Pazhohanniya, M., Pazhohanniya, F., 2014. Environmental comprehensive assessment of agricultural systems at the farm level using fuzzy logic: a case study in cane farms in Iran. *Environ. Model. Softw.* 58, 95-108. DOI: 10.1016/j.envsoft.2014.02.014
- Sánchez, L., 2015. Control difuso para la valoración del impacto ambiental generado por contaminantes emergentes en aguas residuales hospitalarias. *Gest. Ambient.* 18, 81-93.
- Stroppiana, D., Boschetti, M., Brivio, P., Carrara, P., Bordogna, G., 2009. A fuzzy anomaly indicator for environmental monitoring at continental scale. *Ecol. Indic.* 9, 92-106. DOI: 10.1016/j.ecolind.2008.02.002
- Wieland, R., Gutzler, C., 2014. Environmental impact assessment based on dynamic fuzzy simulation. *Environ. Model. Softw.* 55, 235-241. DOI: 10.1016/j.envsoft.2014.02.001
- Zadeh, L., 1965. Fuzzy sets. *Inform. Control* 8, 338-353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
- Zulueta, Y., Rodríguez, D., Bello, R., Martínez, L., 2016. A linguistic fusion approach for heterogeneous environmental impact significance assessment. *Appl. Math. Model.* 40, 1402-1417. DOI: 10.1016/j.apm.2015.07.016