HORIZONTE Y SENDERO ÓPTIMOS

Yolanda Alvarez Ríos
Estudiante Posgrado en Economía de los Recursos Energéticos y Naturales

RESUMEN

¿Porqué la economía de los recursos naturales es importante? Las matemáticas son útil en Física y Química. Ahora, en Economía.

Este artículo muestra el modelo de Hotelling y su desarrollo por el tiempo. Explica conceptos matemáticos usados por este autor en el orden demostrar la racionalidad de los dueños públicos y privados, y explorar qué manera sería mejor para conservar recursos naturales.

ABSTRACT

¿Why natural resources economics is important? Mathematics is useful in Physics and Chemistry. Now, in Economics.

This paper shows Hotelling's model and its development across the time. It explains mathematical concepts used by that author in order to demonstrate the rationality of public and private owners and to explore which way would be best one in the of preserving natural resources.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este artículo es mostrar el desarrollo analítico del modelo propuesto por Hotelling, para develar el instrumental matemático allí usado, y juzgar qué tipo de herramienta construyó el autor, qué tan útil puede ser para explicar la racionalidad de los propietarios (privados o públicos), y cuestionar que tan óptima es la senda que se puede hallar bajo los supuestos considerados.

El artículo lo conforman cuatro partes: en la primera se incluyen dos conceptos centrales en el modelo propuesto por Hotelling; ellos son el de equimarginalidad (sobre el cual descansa la microeconomía) y el de valor actual neto, indicador que permite decidir sobre la bondad de una inversión al homogeneizar en el presente flujos netos de dinero causados en diferentes períodos de tiempo.

La segunda parte desarrolla un modelo económico para la explotación de un recurso natural no renovable considerando tres escenarios. Inicialmente los supuestos son ideales y posteriormente se modifican para tratar de explicar de manera más adecuada la realidad. Actualmente una medida de los cambios en el bienestar de los consumidores se obtiene calculando el cambio en el excedente del los mismos. La parte tres muestra gráfica y analíticamente el significado de endogenizar el costo que para la sociedad representa el consumo y explotación de un recurso. Finalmente, se presenta a manera de conclusión algunas observaciones sobre el modelo.

I. DOS CONCEPTOS

A. Equimarginalismo:

La piedra angular sobre la cual cimienta sus desarrollos Hotelling, se encuentra en el principio de equimarginalidad de Jevons, a saber:

Supongamos que un agente económico posee una cantidad X de un determinado recurso, entendiendo por recurso una renta monetaria, una mercancía o un recurso natural. El recurso en cuestión puede dedicarse a dos usos distintos x_1 y x_2, entonces: $X = x_1 + x_2$.
Luego la máxima utilidad se conseguirá cuando la utilidad marginal del primer uso iguale a la utilidad marginal del segundo uso $\delta U/\delta x_1 = \delta U/\delta x_2$[1]

La decisión del agente será sobre que valores dar a $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ para maximizar su utilidad. Se trata entonces de maximizar la función de utilidad:

$U(X) = U(x_1 + x_2)$

Usando el criterio de la primera derivada tenemos $\delta U/\delta x_1 = 0 \quad \delta U/\delta x_2 = 0$

Con el criterio de la segunda derivada para que U alcance un máximo tiene que cumplirse las condiciones:

$\delta^2 U/\delta x^2_1 < 0 \quad \delta^2 U/\delta x^2_2 < 0$,

es decir, la utilidad marginal de cada uso, tiene que ser decreciente.

B. El Valor Actual Neto (VAN):

El Modelo parte de suponer que el propietario de un recurso agotable trata de maximizar el valor actual neto de los beneficios futuros. Para ello elige un indicador de rentabilidad, el VAN que da cuenta de la ganancia neta generada por un capital K a una tasa de interés compuesto.
El rendimiento a obtener por unidad de recurso a una tasa de interés compuesto **i**, acumulando intereses **m** veces al año durante **t** años, es:
$(1 + i/m)^{mt}$ para el caso discreto. Analicemos la relación existente entre este factor de descuento y el factor de descuento continuo e^{it}.

Para el caso continuo tenemos: El capital se acumula a un tipo de interés continuo **i** cuando **m** tiende a infinito, calculemos entonces el límite: $\lim_{m\to\infty}(1+i/m)^{mt} = Z$

$$\mathrm{Log}Z = \mathrm{Log}\lim_{m\to\infty}(1+i/m)^{mt} = \lim_{m\to\infty}\mathrm{Log}(1+i/m)^{mt}$$
$$= \lim_{m\to\infty} mt\,\mathrm{Log}(1+i/m)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{\mathrm{Log}(1+i/m)}{1/m} = _{L'Hop^*} = \lim_{m\to\infty}\frac{(-i/m)/(1+i/m)}{-1/m^2t}$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left[m^2ti/m(m+i)\right]$$

$$\lim_{m\to\infty}[mti/(m+i)] = \lim_{m\to\infty}\left[it/(1+i/m)\right] = it$$

Tenemos entonces Log Z = it
o equivalentemente: $e^{\mathrm{Log}\,Z} = e^{it}$

$$\therefore\ \mathbf{Z = e^{it}}$$

El valor actualizado es $\mathbf{e^{-it}}$. Con el desarrollo anterior probamos la equivalencia entre el factor de descuento continuo y el discreto. El autor utiliza en su artículo el factor continuo.

II. EL MODELO

El modelo considera tres escenarios. El primero es el más simple, los demás modifican los supuesto iniciales para acercarnos a la realidad. En ellos se trata de maximizar la función VAN (Valor actual neto), con una tasa de interés compuesto (i) que no varía a lo largo de todo el período. Se encuentra entonces, el sendero óptimo de extracción de un recurso no renovable, este sendero estará determinado por precios y cantidades óptimas en un horizonte temporal también óptimo. La definición de lo óptimo en el sentido de Pareto y bajo el principio de equimarginalidad de Jevons

[1] *Carlos Romero realiza una exposición detallada del principio de equimarginalidad de Jevons en su texto "Economía de los recursos ambientales y naturales" Alinaza Editorial. Madrid, 1996.*

* *Regla debida a Guillermo Francisco Antonio de L'Hopital, la cual permite salvar la indeterminación y calcular el límite. Para un desarrollo de esta regla ver APOSTOL, M Tom "Calculus: Cálculo con función de una variable, con introducción al Algebra Lineal" Vol 1 2ª edición. De Reverté. Barcelona 1982.*

A. Escenario 1

Supuestos:

- Las existencias o stock ($\bar{q}$) se conocen con exactitud.
- Costos de extracción nulos.
- La cantidad extraída no depende del precio.
- El precio P(t) es una función conocida del tiempo.

$$\textbf{Maximizar VAN} = \bar{q}\, P(t)\, e^{-it}$$

$dVAN/dt = \bar{q}\, P'(t)\, e^{-it} - i\, \bar{q}\, P(t)\, e^{-it}$

Puntos críticos[3]: $dVAN/dt = 0 = \bar{q}\, P'(t)\, e^{-it} - i\, \bar{q}\, P(t)\, e^{-it}$, esto es: $\bar{q}\, e^{-it}\, [\, P'(t) - iP(t)] = 0$.
Como $\bar{q} \neq 0$ y $e^{-it} \neq 0$ necesariamente tenemos:
$P'(t) - iP(t) = 0$.

Esta función es máxima cuando $P'(t)/P(t) = i$, ecuación diferencial en P(t), para resolverla supongamos que φ es solución luego:

$\varphi'(t) - i\varphi(t) = 0$ multiplicando a ambos lados por el factor de integración e^{-it} tenemos: $e^{-it}\,(\varphi'(t) - i\varphi(t)) = 0 = (e^{-it}\,\varphi(t))' = 0$ una función cuya derivada es igual a cero, por tanto dicha función debe ser constante, en efecto $e^{-it}\,\varphi(t) = C$

$\therefore\ \varphi(t) = C\, e^{it}$ obtenemos entonces $\mathbf{P(t) = P_0 e^{it}}$

El criterio de la segunda derivada nos dice la función alcanza un máximo en un punto crítico si $d^2VAN/dt^2 < 0$, debe suceder entonces que

$d^2VAN/dt^2 = \bar{q}\, e^{-it}\, [\, P''(t) - iP'(t)] - \bar{q}\, ie^{-it}\, [\, P'(t) - iP(t)] < 0$

$\therefore\ P''(t) - iP'(t) < 0 \Rightarrow P'(t) > 0 \Rightarrow P(t)$ es una función creciente.

Se requiere entonces que el precio del recurso crezca con el paso del tiempo pero de una manera menos que proporcional, pues, $P''(t) < 0$

El resultado obtenido del primer criterio de la derivada $\mathbf{P'(t) - iP(t) = 0}$

fue deducido por Hotelling en 1931. Se conoce como la ***Regla de Hotelling*** y brinda un criterio de decisión especificado así:

- Si $P'(t)/P(t) < i$ Extraer el recurso
- Si $P'(t)/P(t) > i$ No extraer el recurso

Significa que si $P'(t) < P(t)\, i$ el valor marginal de no extraer es menor que el valor financiero de la cantidad marginal del recurso no extraído, por lo cual interesa la extracción del recurso, en caso contrario no interesa.

B. Escenario 2

Supuestos:

- Las existencias o stock ($\bar{q}$) se conocen con exactitud.
- Costos de extracción son constantes (c).
- La cantidad extraída no depende del precio.
- El precio P(t) es una función conocida del tiempo.

$$\textbf{Maximizar VAN} = \bar{q}\, P(t)\, e^{-it} - c\, \bar{q}\, P(t)\, e^{-it}$$

Con un desarrollo análogo al realizado en el escenario anterior la función VAN alcanza el máximo cuando $P'(t)/[P(t) - c] = i$

Este resultado puede verse como una ampliación de la regla de Hotelling donde el término del denominador $P(t) - c$ suele denominarse renta o costo del usuario[4]

Más adelante al maximizar el valor social del recurso haremos un trabajo más detallado con el costo del usuario.

C. Escenario 3

Supuestos:

- Las existencias o stock ($\bar{q}$) se conocen con exactitud.
- Costos de extracción nulos.
- Existe una relación inversa entre la cantidad q_t extraída en el año t y el precio P_t en dicho año.
- El precio P_t es una función conocida del tiempo, tal que $P_t = f(q_t)$ con $f'(q_t) < 0$

$$\textbf{Maximizar VAN} = \bar{q} P_t\, e^{-it} = \bar{q}\, f(q_t)\, e^{-it}$$

El valor máximo de esta función se alcanza cuando: $\mathbf{P'_t - iP_t = 0}$, resolviendo esta ecuación diferencial, de manera completamente análoga a la del escenario 1 obtenemos que $\mathbf{P_t = P_0 e^{it}}$ donde $\mathbf{P_0}$= Precio del recurso en el primer día de extracción.

[3] *Un punto crítico es aquel en el cual la derivada se anula o no está definida, son cruciales en el análisis, pues brindan los posibles puntos donde la función toma valores máximos o mínimos. En nuestro caso interesa hallar el (los) punto(s) donde el VAN se hace máximo.*

[4] *Nombre dado por Scott (1953). El disfrute de una unidad del recurso en el presente supone, sin duda, un costo para las generaciones futuras.*

Si T = Horizonte de extracción entonces $\int q_t\, dt = \bar{q}$, es decir, tendrá que verificarse que la extracción desde el primer día hasta el último es igual al stock total del recurso.

Las ecuaciones:

$$P_t = f(q_t) = P_0 e^{it}$$
$$\int q_t\, dt = \bar{q}$$

forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas P_0 y T. Al resolverlo obtenemos el horizonte óptimo de extracción o agotamiento del recurso (T) y el precio inicial (P_0), iterando el valor de P_t obtenemos el sendero óptimo en cantidades físicas y en precios.

Suponiendo una función de demanda $P_t = a - b\, q_t \quad b > 0$

El sistema a resolver será:

(1) $P_0 e^{iT} = a$ pues si $t \to T$ entonces $P_t \to a - b\,(0)$

(2) $aT/b + P_0(1 - e^{iT})/bi = \bar{q}$ solución de la integral $\int (a - P_0 e^{it})/b\, dt = \bar{q} = \int q_t\, dt$

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$aT/b + P_0/bi - a/bi = \bar{q}$$
$$T = [b\,(\bar{q} - P_0/bi)/a] - i/b$$

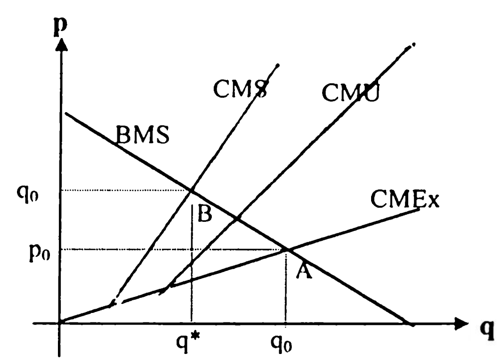
Reemplazando este valor en (1) se obtienen los valores deseados[5]

Para este tipo de funciones lineales $q_t = a - b\, P_t$ el recurso se agotará en un tiempo finito. Si la función es $q_t = e^{-bp}$ con b=Constante, la explotación continuará indefinidamente aunque a una tasa gradualmente decreciente.

III. COSTO SOCIAL

En este apartado se analizará la variación en el excedente del consumidor, calculado como la diferencia entre los que éste está dispuesto a pagar y lo que realmente paga, pues los deseos de la sociedad por el recurso se estiman por medio del deseo marginal a pagar (DaP) y el sacrificio que representa para la sociedad extraer el recurso medidos por la curva de costos marginales de extracción (CMEx). El óptimo paretinao de extracción y consumo presente se logra en (q_0, p_0) de un stock $\bar{q}$ cuando los beneficios marginales sociales (BMS) = CMEx, sin embargo incluyendo los intereses de las generaciones futuras, existe un nivel de extracción a partir del cual se generan costos para las generaciones futuras, el costo marginal social (CMS) será entonces el costo que soporta la generación presente (CMEx) más el costo el que soportaran las generaciones futuras o costo marginal del usuario (CMU).

La nueva curva de costos tendrá entonces una pendiente mayor y por tanto la cantidad óptima será menor a la anterior y el precio mayor, el nuevo óptimo
(q^*, p^*) con $q^* < q_0$ y $p^* > p_0$



A = (q_0, p_0) B= (q^*, p^*)

Incluir los intereses de las generaciones futuras implica necesariamente una disminución de la cantidad consumida en el presente, o análogamente una pérdida en el excedente del consumidor del presente igual al área del paralelogramo p_0p^*BA.

El costo marginal del usuario (CMU) usado en el anterior desarrollo, es exógeno, es fijado a priori, analicemos ahora un escenario en el cual el CMU sea endógeno:

Supuesto:

- T = Horizonte de extracción

[5] *Para un ejemplo numérico con funciones de demanda lineales, véase Hotelling, Harold. "La Economía de los Recursos Agotables". Traducción de José Manuel de la Torre y Miguel. Pág 9 y Romero, Carlos. "Economía de los Recursos Ambientales y Naturales". Alianza Editorial. Pág 75*

- P_t = Precio del recurso en el año t ; t = 0,1,2,3,...,T
- q_t = Cantidad extraída en el año t; t= 0,1,2,3,...,T
- $\bar{q}$ = Stock inicial del recurso
- C = Costo marginal de extracción
- i = Tasa de interés

$$\textbf{Maximizar} \quad VAN = \sum (P_t q_t - C q_t)(1+i)^{-t}$$
$$\textbf{Sujeto a} \sum q_t = \bar{q}$$

Para resolver este problema definamos el Lagrangiano

$$L = \sum (P_t q_t - C q_t)(1+i)^{-t} + \lambda(\bar{q} - \sum q_t)$$

Donde λ es el multiplicador o valor en el que se incrementa la función VAN si el stock del recurso se incrementa en una unidad. También se define como el ***precio sombra*** del recurso en cuestión y es una medida del costo de extraer y consumir una unidad del recurso.

$(*)\ \delta L/\delta q_0 = (P_0 - C) - \lambda = 0$
$\delta L/\delta q_1 = (P_1 - C)(1+i)^{-1} - \lambda = 0 \ldots$
$(**)\ \delta L/\delta q_t = (P_t - C)(1+i)^{-t} - \lambda = 0 \ldots$
$\delta L/\delta q_T = (P_T - C)(1+i)^{-T} - \lambda = 0$
$\delta L/\delta \lambda = \bar{q} - \sum q_t = 0$

Despejando λ en (*) y (**) e igualando tenemos:
$(P_t - C)/(1+i)^t = \lambda = P_0 - C$

$$\therefore P_t = C + (P_0 - C)(1+i)^t \quad t = 0,1,2,\ldots T$$

Obtenemos así el sendero de precios óptimos, donde se recoge de manera implícita el regla de Hotelling.

IV. CONCLUSIONES:

- Aplicar la regla de Hotelling supone conocer: Precios, costos y tasas de interés futuros, conocer las reservas totales del recurso en cuestión, la demanda futura de todas las generaciones y los futuros cambios tecnológicos. Exigencias mucho más que fuertes, tal vez irreales.
- La tasa de interés es un parámetro supremamente importante en el modelo, pues determina toda la inclinación de la secuencia de producción de equilibrio.
- Según los supuestos manejados no existen efectos externos cuando varios propietarios pueden explotar una reserva, no hay incertidumbre en los procesos de exploración.
- La regla de Hotelling o condición de equilibrio dice que el precio neto aumenta como la tasa de interés compuesto vigente. Si los productores supusieran que los precios aumentaran en forma muy lenta, los depósitos del recurso natural no son atractivos para los inversionistas, pensando sólo en términos de flujos de caja su mejor opción será aumentar la producción corriente y convertir el recurso (petróleo, carbón, esmeraldas..) en dinero; pero el aumento de la producción bajará el precio corriente y generará una expectativa de crecimiento de precios mucho más lenta. Análogamente si las expectativas respecto al precio futuro son de un aumento rápido habrá una retención especulativa de las existencias. Se trata entonces de un equilibrio inestable.
- Calculando iterativamente los precios y cantidades óptimas de extracción se tiene información sobre el stock disponible, con lo cual debe tenerse en cuenta el punto (precio, cantidad) que implica una tecnología de sustitución, pues el precio de mercado habrá aumentado tanto que hacen competitiva esta nueva tecnología [6].
- El sendero y el horizonte óptimos obtenidos en el modelo, como ya se ha dicho, son el resultado de hallar el valor máximo de la función VAN, sin embargo esta optimalidad es muy cuestionable, pues en el mejor de los casos se asume una función de costos constante que obviamente no incluye una valoración de los impactos causados por la extracción del recurso ni ningún criterio de sostenibilidad.
- La decisión de extraer o no depende de **i**, entonces es claro que la asignación intergenacional de un recurso agotable requiere de un análisis sobre la tasa de interés o tasa de descuento[7] ¨Cuál sería la tasa adecuada para comparar el valor social del consumo presente y futuro de un recurso no renovable? ¨Será igual la tasa de actualización social a la individual? Algunos autores han propuesto que para corregir el egoísmo o la

[6] *Ver Solow, Robert. "La Economía de los Recursos o los Recursos de la Economía". En Aguilera y Alcántara. "De la Economía Ambiental a la Economía Ecológica". FUHEM. Economía Crítica. Pág 143.*

[7] *Una posición crítica sobre el modelo de Hotelling puede encontrarse en Martinez, Alier Juán. "Curso de Economía Ecológica"Serie de textos básicos para la formación ambiental. No. 1 PNUMA Méjico 1995. Pág 103.*

miopía de la generación presente se debe adoptar una tasa social de descuento inferior a la determinada por el mercado, y eso produciría un ritmo más lento de agotamiento de los recursos[8].

- No existe una valoración social del recurso, sólo se está analizando un indicador de rentabilidad privado. ¨Será entonces esta metodología una guía apropiada para la explotación de los recursos agotables? La respuesta tal vez la encontremos en la propuesta de Nicholas Georgescu Roegen "...Quizás en lugar de basar las recomendaciones en el archisabido principio de maximizar la utilidad, tendríamos que minimizar el arrepentimiento futuro"[9] O principio de Precaución que se erige como el rector de la Economía Ecológica.

V. BIBLIOGRAFÍA

ROMERO, Carlos. "Economía de los Recursos Ambientales y Naturales". Alianza Editorial. Madrid 1996

APOSTOL, M Tom. "Calculus: Cálculo con función de una variable, con introducción al Algebra Lineal". Vol . Segunda edición. De Reverté. Barcelona 1982.

HOTELLING, Harold. "La Economía de los Recursos Agotables". The Journal of political economy. Traducción de José Manuel de la Torre y Miguel.

SOLOW, Robert. "La Economía de los Recursos o los Recursos de la Economía". En Aguilera y Alcántara. "De la Economía Ambiental a la Economía Ecológica". FUHEM. Economía Crítica.

MARTINEZ, Alier Juán. "Curso de Economía Ecológica". Serie de textos básicos para la formación ambiental. No. 1 PNUMA Méjico 1995.

POSADA, Luis Guillermo y VARGAS, P Elkin. "Desarrollo económico sostenible, relaciones internacionales y recursos minero - energéticos. Tesis. Universidad Nacional. Medellín. Facultad de ciencias humanas y económicas. Medellín. 1997.

---

[8] *Ibid pág 108.*
[9] *Ibid pág 109.*