ECONOMÍA DE LOS RECURSOS AGOTABLES

Harold Hotelling
Stanford University
California. USA[1]

Traductores
Carlos Guillermo Álvarez H.
F. Javier Díaz Serna
Alfredo Olaya A.

RESUMEN

Se analiza la teoría económica clásica frente a la explotación de recursos naturales no renovables como la minería y el petróleo.

Se presentan los principios de la economía minera y la senda óptima de explotación bajo los supuestos de monopolio, duopolio y libre competencia. Se utilizan herramientas matemáticas avanzadas para optimización y se incluyen los efectos de los impuestos y las tasas compensatorias.

ABSTRACT

Classic economic theory is analyzed with respect to the exploitation of renewable natural resources renewable as mining and oil explotation.

The principles of the mining economy and the good path of exploitation are presented under the assunptions of monopoly, duapoly and free competition. Advanced mathematical tools are used for the optimization and the effects of the taxes and the compensatory rates are included.

1 *Tomado de: Journal of Political Economy, Marzo-Abril, 1931, Vol. 39, No. 2.*

Traducido por:
Carlos Guillermo Alvarez H. calvarez@supernet.com.co *Profesor Titular. Facultad de Ciencias Humanas y Económicas. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.*
Francisco Javier Diaz S. javidiaz@perseus.unalmed.edu.co *Profesor Asociado Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellin,*
Alfredo Olaya A alolaya@usurcolombia.com *Profesor Asociado. Facultad de Ingeniería. Universidad Surcolombiana, Neiva.*

1. Los Problemas Peculiares de la Riqueza Mineral

La consideración de la desaparición de reservas mundiales de minerales, bosques y otros activos agotables ha conducido a restricciones para la regulación de su explotación. La sensación de que estos productos son ahora demasiado baratos para el bienestar de generaciones futuras, que están siendo explotados egoístamente a una tasa demasiado rápida y que a consecuencia de su excesiva subvaloración, están siendo explotados y consumidos con despilfarros, ha dado origen al movimiento conservacionista.

El método comúnmente propuesto para detener la devastación masiva de recursos naturales no renovables o de recursos naturales renovables sólo con dificultad y en el muy largo plazo, ha consistido en prohibir su explotación durante ciertos periodos de tiempo y en ciertas regiones o reducirla suponiendo que continuaran utilizando métodos obsoletos e ineficientes. Las prohibiciones contra el desarrollo petrolero y minero y la tala de árboles para el aprovechamiento de madera en ciertas tierras de propiedad pública tienen esta justificación, como también las temporadas de veda para pesca y recreación y los reglamentos prohibiendo ciertos métodos altamente eficientes para la captura de peces.

En lugar de ineficiencia de la administración pública, los impuestos serían un método mas económico en el caso de actividades meramente comerciales tales como la minería y la pesca con ánimo de lucro, así como también para la pesca deportiva. Sin embargo la oposición de quienes están haciendo utilidades, con la apatía de todos los demás, es usualmente suficiente para impedir la desviación del tesoro público de un aporte considerable de los ingresos procedentes de la explotación de los recursos naturales.

En contraste a la creencia conservacionista de que está ocurriendo una explotación demasiado rápida de los recursos naturales, tenemos la influencia moderadora de los monopolios y asociaciones cuyo crecimiento en industrias directamente relacionadas con la explotación de recursos no renovables ha sido sorprendente. Si las «asociaciones en la restricción del comercio» imponen altos precios a los consumidores y restringen la producción ¿puede decirse que sus productos son demasiado baratos y se están vendiendo con demasiada rapidez?.

Puede parecer que la explotación de un recurso natural agotable nunca puede ser demasiado lenta para el interés público; para cada tasa propuesta de producción indudablemente habrá algún punto para el agotamiento final. Pero si se está de acuerdo en que la oferta total no va a ser reservada para nuestros descendientes remotos y que hay una tasa óptima de producción presente, entonces la tendencia del monopolio y del monopolio parcial es mantener la producción por debajo de la tasa óptima y exigir precios excesivos a los consumidores. El movimiento conservacionista, dado que se motiva más por prohibiciones absolutas que por los impuestos o la regulación con el interés de la eficiencia, puede ser acusado de hacerle el juego a quienes están interesados en mantener altos precios para su propio beneficio más que para la posteridad. De otro lado ciertas condiciones técnicas más significativas en la industria petrolera conducen a grandes desperdicios de material y a una costosa perforación competitiva, pérdidas que pueden reducirse con sistemas de control que conlleven retardos en la producción. El gobierno de Estados Unidos bajo la presente administración ha sacado de producción campos petroleros con el fin de conservar este activo y también ha dado pasos hacia el enjuiciamiento de un grupo de compañías petroleras de California por conspiración al mantener precios indebidamente altos restringiendo así la producción. Aunque estas políticas pueden a primera vista parecer contradictorias en su propósito, están realmente inspiradas contra dos distintos males, entre los cuales debe ser conducida la política pública.

Además para estos asuntos públicos, la economía de los activos agotables presenta una completa maraña de problemas complejos. El tipo de equilibrio estático de la teoría económica que actualmente está tan bien desarrollado es claramente inadecuado para una industria en la que el mantenimiento indefinido de una tasa estable de producción es una imposibilidad física, la cual por lo tanto es obligada a descender ¿cuánto de éstos ingresos de una mina deberían ser calculados como renta, y cuánto como rendimiento del capital? ¿cuál es el valor de una mina cuando sus reservas se suponen complemente conocidas, y cuál es el efecto de incertidumbre en su estimación? Si el propietario de una mina produce demasiado rápido, hará descender el precio, quizá hasta cero. Si produce con demasiada lentitud, sus ganancias, aunque mayores, pueden ser pospuestas en el futuro más allá de lo que garantiza la tasa de interés. ¿Dónde está su media ideal? ¿Y cómo varía esta tasa mas rentable de producción cuando se aproxima el agotamiento? ¿Es más rentable completar la extracción dentro de un tiempo finito, prolongarla indefinidamente de tal manera que la cantidad remanente en la mina se aproxime a cero como límite, o explotar tan lentamente que las operaciones de minería no solamente continúen a una tasa permanentemente decreciente sino también dejando en tierra una cantidad que no se aproxime a cero? Suponga que la mina es de propiedad pública. ¿Cómo debería desarrollarse la explotación para el mayor bienestar general, y cómo una política que tiene tal objetivo se compara con la del empresario que busca beneficios económicos? ¿Cuál es la situación de los obreros y de las industrias subsidiarias cuando una mina se agote? ¿Cómo puede el Estado, por regulación o tributación, inducir al propietario de la mina a establecer un programa de producción mas armónico con el bienestar público? ¿Y los impuestos de importación sobre el carbón y el petróleo? ¿Y para estos sistemas dinámicos qué será de las teorías clásicas de monopolio, duopolio y libre competencia?

Los problemas de los activos agotables están peculiarmente destinados a estar involucrados con el infinito. No solamente, se considera el tiempo infinito, sino también la posibilidad de que para una necesidad determinada, el precio podría incrementarse sin límite cuando la oferta tiende a cero. Si no contamos con tener propiedad de valor infinito, al seleccionar formas empíricas para las curvas de costo y demanda debemos tomar precauciones para evitar supuestos, perfectamente naturales en problemas estáticos que conducen a tales condiciones.

Mientras un estudio completo del tema incluiría activos semirenovables tales como bosques y reservas de pesca, ordenando gradualmente en forma descendente tales operaciones de corto plazo como remanentes de cosecha, este documento se limitará al ámbito de activos absolutamente no renovables. Los bosques de un continente ocupado por una nueva población pueden, al menos para los propósitos de una primera aproximación, ser considerados como compuestos de dos partes, de las cuales una será reemplazada después de la tala y la otra será consumida sin reemplazo. La primera parte obedece las leyes de la teoría estática; la segunda, aquellas de la economía de activos agotables. La vida silvestre que puede reponerse por sí misma si no es explotada muy rápidamente, presenta asuntos de un tipo diferente.

Los problemas de los activos agotables no pueden evitar el cálculo de variaciones, incluyendo aún las más recientes investigaciones en esta rama de las matemáticas. Sin embargo, los métodos elementales serán suficientes para resaltar, en las próximas páginas, algunos de los principios de la economía minera, con la ayuda de varios supuestos simplificadores. Estos serán generalizados más tarde examinando una serie de casos que incorporen gradualmente algunas de las complejidades de la situación actual. Asumiremos siempre que el propietario de una oferta agotable desea maximizar el valor presente de todos sus beneficios futuros. La tasa de interés será denotada por γ, así que $e^{-\gamma t}$ es el valor presente de una unidad de beneficio obtenida después de un tiempo t, asumiendo que las tasas de interés permanecen constantes durante ese período. El caso de tasas de interés variables originan modificaciones claramente obvias[2].

2. Libre Competencia

Ya que es indiferente para el propietario de una mina si recibe por una unidad de su producto un precio ρ_0 ahora o un precio $\rho_0 e^{-\gamma t}$ después del tiempo t, no es ilógico esperar que el precio ρ será una función del tiempo de la forma $\rho = \rho_0 e^{\gamma t}$. Esto no se aplicará al monopolio, donde la forma de la función de demanda está destinada a afectar la tasa de producción, pero es característica de la competencia completamente libre. Varias unidades del mineral van a ser entonces tratadas como si fueran igualmente valorables en todo tiempo, exceptuando los costos variables de colocarlas en el mercado. Serán removidas y usadas en orden de accesibilidad, las más baratas disponibles primero. Si las tasas de interés o grados de impaciencia varían entre los propietarios de la mina, este hecho también afectará el orden de extracción. Aquí ρ va a ser interpretado como el precio neto recibido después de pagar el costo de extracción y colocar el producto en el mercado - una convención a la que nos adherimos.

La fórmula:

$$\rho = \rho_0 e^{\gamma t} \qquad (1)$$

fija los precios relativos en diferentes períodos de tiempo

2 *Como en « A General Matematical Theory of Depreciation», por Harold Hotelling, "Journal of the American Statistical Association", Septiembre, 1925.*

bajo libre competencia. El nivel absoluto, o el valor p_0 del precio cuando $t = 0$, dependerá de la demanda y de la oferta total del producto. Denotando esta última por a, y haciendo $q = f(p,t)$ para la cantidad tomada en el tiempo t si el precio es p, tenemos la ecuación:

(2) $$\int_0^T q\,dt = \int_0^T f(p_0 e^{\gamma t}, t)\,dt = a,$$

siendo el límite superior T, el tiempo del agotamiento final. Ya que q será entonces cero, tendremos la ecuación:

(3) $$f(p_0 e^{\gamma T}, T) = 0$$

para determinar T.

La naturaleza de estas soluciones dependerá de la función $f(p,t)$, la cual da q. De acuerdo con las suposiciones usuales, asumiremos que es una función decreciente de p, y depende del tiempo, en una forma tan simple que todas las ecuaciones tienen soluciones únicas.

Suponga, por ejemplo, que la función de demanda es dada por:

$$q = 5 - p \qquad (0 \leq p \leq 5)$$
$$q = 0 \text{ para } p \geq 5,$$

independientemente del tiempo.

Cuando q decrece y se aproxima a cero, p aumenta hacia el valor 5, el cual representa el precio más alto que se pagará. Así en el tiempo T,

$$p_0 e^{\gamma T} = 5$$

La relación (2) entre las incógnitas p_0 y T llega a ser en este caso

$$a = \int_0^T (5 - p_0\, e^{\gamma t})\, dt = 5T - P_0\,(e^{\gamma T} - 1)/\gamma$$

Eliminando p_0, tenemos:

$$a/5 = T + (e^{-\gamma T} - 1)/\gamma$$

esto es:

$$e^{-\gamma T} = 1 + \gamma(a/5 - T)$$

Ahora, si graficamos como funciones de T

$$y_1 = e^{-\gamma T}$$

y

$$y_2 = 1 + \gamma(a/5 - T)$$

tenemos una curva exponencial decreciente cuya pendiente donde corta el eje Y, es $-\gamma$, y una línea recta con la misma pendiente. La línea corta el eje Y en un punto más alto que la curva, ya que, cuando T=0, $y_1 < y_2$. Por lo tanto hay uno y solo un valor positivo de T para el cual $y_1 = y_2$ Este valor de T da el tiempo de agotamiento completo, que claramente es finito.

Si la curva de demanda está determinada, la cuestión de si el tiempo hasta el agotamiento será finito o infinito se transforma en investigar si se necesita un valor finito o infinito de p para hacer q igual a cero. Para la función de demanda $q = e^{-bp}$, donde b es una constante, la explotación continuará para siempre aunque por supuesto a una tasa gradualmente decreciente. Si $q = \alpha - \beta p$, todo será agotado en un tiempo finito. En general, a mayor precio anticipado cuando la tasa de producción llega a ser extremadamente pequeña, comparada con el precio para una producción más rápida, más prolongado será el período de operación.

3. El Máximo Valor Social y la Intervención del Estado

Como en el caso estático, bajo libre competencia y en ausencia de factores complejos existe una cierta tendencia hacia la maximización de lo que podría llamarse la "utilidad total" aunque es más apropiado llamarlo el "valor social del recurso". Para una unidad de tiempo esta cantidad puede ser definida como

(4) $$u(q) = \int_0^q p(q)\,dq,$$

donde el integrando es una función decreciente y el límite superior es la cantidad actualmente colocada en el mercado y consumida. Si el disfrute futuro es descontado con la tasa de interés γ, el valor presente es:

$$V = \int_0^T u\,[q(t)]\; e^{-\gamma t}\; dt$$

Ya que $\int_0^T q\,dt$ está determinada, el programa de producción $q(t)$ que maximiza V deberá ser tal que un incremento unitario en q incrementará el integrando tanto en un tiempo como en otro. Esto es,

$$\frac{d}{dq} u[q(t)]\, e^{-\gamma t},$$

lo cual por (4) es igual a $pe^{-\gamma t}$, va a ser una constante. Llamando esta constante p_0, tenemos:

$$p = p_0 e^{\gamma t}$$

el resultado (1) obtenido al considerar libre competencia. Que ésto proporcione un máximo genuino aparece del hecho de que la segunda derivada es esencialmente negativa, debido a la pendiente decreciente de la curva de demanda.

Esta conclusión, por supuesto, no ofrece más justificación para el laissez faire en la explotación de recursos naturales que con otras actividades. Muestra que la verdadera base del movimiento conservacionista no es una tendencia inherente a la competencia bajo esas condiciones ideales. Sin embargo, en las industrias extractivas hay discrepancias de nuestras condiciones asumidas conduciendo a formas de explotación particularmente despilfarradoras que bien podrían ser reguladas en el interés público. Tácitamente hemos asumido completamente conocidas todas las condiciones. Grandes desperdicios se originan de lo repentino e inesperado de los descubrimientos de mineral, que conducen a precipitaciones salvajes, inmensamente despilfarradoras socialmente, para apropiarse de la propiedad valiosa.

De este carácter es la perforación de "pozos compensados" a lo largo de cada lado de una línea de propiedad sobre un yacimiento petrolero recientemente descubierto. Cada propietario debe perforar y conseguir rápidamente el precioso petróleo, de lo contrario sus vecinos se lo llevarán todo. En consecuencia grandes complejos de torres de perforación se originan de la noche a la mañana a un costo de \$50.000 o más cada uno; mientras un número mucho más pequeño y una explotación más lenta sería más económico. Incidentalmente, se pierden grandes volúmenes de gas natural y petróleo porque lo repentino del desarrollo hace imposible el adecuado almacenamiento.[3]

3 *Cf. George W. Stocking, The Oil Industry and Competitive System, Hart Schaffner and Marx prize essay (Houghton Mifflin, 1928).*

Lo inesperado de los descubrimientos de mineral además del despilfarro provee otra razón para el control gubernamental y para la tributación especial. Grandes beneficios de un carácter completamente ocasional se originan en conexión con descubrimientos de mineral, y no es buena política pública permitir que tales beneficios permanezcan en manos privadas. Por supuesto puede decirse que el explorador ha ganado su recompensa por el esfuerzo y el riesgo; pero puede decirse ésto del propietario de la tierra quien descubre el valor de su subsuelo solamente observando los resultados de la minería y la perforación de sus vecinos?

La tasa de interés del mercado γ debe ser usada por un empresario en sus cálculos, pero ¿debería ser usada para las determinaciones del valor social y la política pública óptima? El uso de $\int_0^q p\,dq$ como una medida de valor social por unidad de tiempo, mientras menor sea la cantidad pq mayor sería el beneficio posible de un propietario por la misma extracción de material, sugiere que una integral similar sea usada en conexión con varias tasas de preferencia temporal. Hay, sin embargo, una diferencia importante entre los dos casos en que la tasa de interés es determinada por una gran variedad de fuerzas, especialmente independientes de la mercancía particular y la industria en cuestión, y no es fuertemente afectada por las variaciones en el producto de la mina o el bien petrolero en cuestión. Es probable, por lo tanto, que al decidir cuestiones de política pública relativa a recursos agotables, no serán cometidos grandes errores al usar la tasa de interés del mercado. Por supuesto, los cambios en esta tasa van a ser anticipados, especialmente al considerar el futuro remoto. Si miramos adelante a un tiempo distante cuando todos los recursos de la tierra estén cerca del agotamiento, y la raza humana reducida a la completa pobreza, podremos esperar en efecto tasas de interés muy altas. Pero el agotamiento de uno o unos pocos tipos de recursos no ocasionará esta condición.

El descuento de valores futuros de u puede ser confrontado con el crecimiento de usufructos futuros que son éticamente equivalentes al disfrute presente de la misma intensidad. La réplica a ésto es que el capital es productivo, que los disfrutes futuros son inciertos en un grado creciente con su lejanía en el tiempo, y que V y u son cantidades concretas, no símbolos de disfrute. Estas miden el valor social de la mina en el sentido relacionado con la producción total de bienes, pero no propiamente su utilidad o la felicidad que conllevan ya que ésto depende de la distribución de la riqueza, y es mayor si los productos de la mina benefician principalmente al pobre que si se convierten en artículos de lujo. Una mina de platino es de mayor utilidad general cuando el platino es usado para propósitos eléctricos y químicos que cuando es pre-vaciado para el comercio de la joyería.

Sin embargo, debemos dejar los asuntos de distribución de la riqueza para ser tratados de otra manera, quizá por ingreso gradual e impuestos de herencia, y considerar los efectos de varios programas de operación sobre el valor total de los bienes producidos. Es por esta razón que estamos interesados en V.

El asunto general de cuánto de su ingreso debería ahorrar una persona ha sido bellamente tratado por F. P. Ramsey[4].

Los metales utilizados como moneda, por supuesto, generan un efecto muy especial para el interés público. No solo la producción de oro tiende a desestabilizar los precios; pero si los usos en las artes pueden ser despreciados, los costos de exploración, extracción y transporte desde la mina son, desde el punto de vista social, despilfarrados.

Sin embargo para deducir una política de *laissez faire* a partir de la maximización teórica de V bajo "libre" competencia, una razón diferente de precaución es que las condiciones actuales, aun cuando existe la competencia, probablemente están lejos de ser removidas del estado ideal que hemos estado postulando. Una gran compañía de producción puede frecuentemente afectar el precio variando su tasa de mercadeo. Existe entonces cierto elemento de monopolio, con una tendencia hacia el retardo indebido de producción y elevación del precio. Esto será considerado posteriormente en nuestra última sesión. El problema del monopolio por supuesto se extiende también a industrias no extractivas; pero tratando con recursos agotables hay algunas características de especial interés, las cuales se examinaran a continuación.

4. Monopolio

La teoría usual de precios de monopolio trata con el punto máximo de la curva: $y = pq$,

4 *" A Mathemátical Theory of Saving", Economic Journal, XXXVIII (1928), 543.*

siendo y graficada como una función de p o de q y cada una de esas variables una función decreciente de la otra (Figura 1). Ahora consideremos el problema de seleccionar q como una función de t, sujeta a la condición

(5) $$\int_0^\infty q\,dt = a$$

de tal manera que maximice el valor presente,

(6) $$J = \int_0^\infty qp(q)e^{-\gamma t}\,dt$$

de los beneficios del propietario de una mina. No restringimos q a una función continua de t, aunque p será considerada una función continua de q con una primera derivada continua que no es positiva en ninguna parte. El límite superior de las integrales puede ser tomado como ∞ a ún si la explotación va a ocurrir sólo durante un tiempo finito T, por lo tanto $q = 0$ cuando $t > T$.

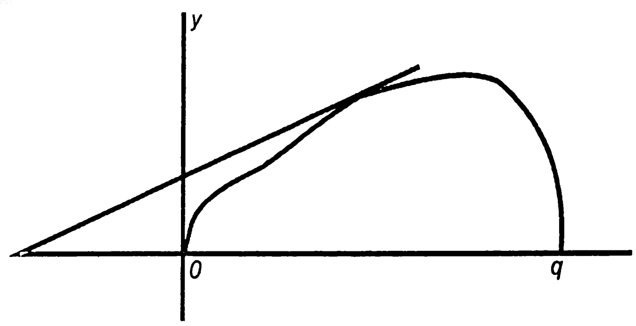

FIGURA 1. $y = pq$.

La tangente gira en sentido opuesto a las manecillas del reloj. El valor de la mina es proporcional a la distancia a O desde la intersección de la tangente con el eje q.

Esto puede ser o no ser considerado un problema en el cálculo de variaciones; algunas definiciones de ese tema excluirían nuestro problema ya que ninguna derivada está involucrada bajo los signos de la integral, aunque los métodos científicos pueden ser aplicados en este caso. Sin embargo, el problema puede ser tratado de manera muy simple observando que

(7) $$qp(q)e^{-\gamma t} - \lambda q$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange, va a ser un máximo para todo valor de t. Debemos por lo tanto tener

(8) $$e^{-\gamma t}\frac{d}{dq}(pq) - \lambda = 0,$$

y también:

$$(9)\qquad e^{-\gamma t}\frac{d^2}{dq^2}(pq)<0$$

Evidentemente (8) también puede ser escrito

$$(10)\qquad y' = \frac{d}{dq}(pq) = p + q\frac{d}{dq} = \lambda e^{\gamma t}$$

El contraste con las condiciones competitivas de la última sección aparecen en el término $q\,dp/dq$.

La constante l es determinada resolviendo **(8)** ó **(10)** para q como una función de l y t y sustituyendo en **(5)**. Al integrar desde 0 hasta T se obtendrá una ecuación para l en términos de T y de la cantidad a inicialmente en la mina, la cual aquí se asume conocida. La ecuación adicional requerida para determinar T es obtenida haciendo $q = 0$ para $t = T$.

En general, si p se toma sobre un valor finito K cuando q se aproxima a cero, $q\,dp/dq$ también permanece finito, **(8)** ó **(10)** pueden ser escritas:

$$\frac{d(pq)}{dq} = ke^{\gamma(t-T)}$$

Suponga, por ejemplo, que la función de demanda es

$$p = (1-e^{-Kq})/q,$$
$$= K - K^2\frac{q}{2!} + K^3\frac{q^2}{3!}\cdots$$

donde K es una constante positiva. Para todo valor positivo de q esta expresión es positiva y tiene una derivada negativa. Cuando q se aproxima a cero, p se aproxima a K. Tenemos

$$y = pq = 1 - e^{-Kq}$$
$$y' = Ke^{-Kq} = \lambda e^{\gamma t}$$

De donde

$$q = (\log K/\Lambda - gt)/K,$$

esta expresión es válida cuando t es menor que T, el tiempo del agotamiento último. Cuando $t = T$, q es por supuesto cero. Tenemos, por lo tanto, haciendo $q = 0$ para $t = T$,

$$\log K/\Lambda = gT;$$

y de **(5)**

$$a = \int_0^T (\log K/\lambda - \gamma t)\,dt/K = \gamma\int_0^T (T-t)\,dt/K$$
$$a = \gamma T^2/2K$$

así que

$$T = \sqrt{2Ka/\gamma}$$
$$\log K/\lambda = \sqrt{2K\gamma a},$$

dando finalmente

$$q = (\gamma\sqrt{2Ka/\gamma} - t/K$$

5. Estudio Gráfico: Soluciones Discontinuas

La interpretación de (10) en términos de la Figura 1 es que la tasa de producción es la abcisa del punto de tangencia de una recta tangente que rota en el sentido opuesto a las manecillas del reloj. La pendiente de esta recta es proporcional a una suma creciente en interés compuesto.

Son posibles otras representaciones gráficas del agotamiento de los recursos naturales. Graficando $y' = d(pq)/dq$ como una función de q (Figura 2), tenemos para la tasa más rentable de extracción la longitud de una línea horizontal **RS** que incrementa como el interés compuesto.

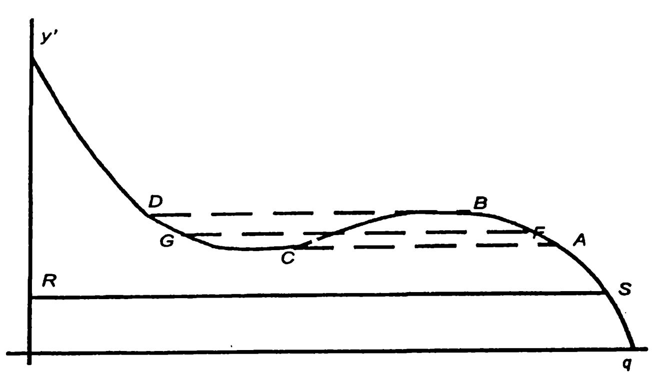

FIGURA 2. RS aumenta con velocidad creciente. Su longitud es la tasa de producción y es decreciente

La ondulación con la que estas curvas han sido dibujadas sugiere que la solución obtenida de esta manera no es inequívoca. Tal ondulación incrementará si la función de demanda es, por ejemplo:

(11) $$p = b - (q - 1)^3,$$

cuya derivada,

$$-3(q - 1)^2,$$

nunca es positiva. Aquí *b* es una constante tomada como 1 para la figura 2. Para esta función de demanda

$$y' = b - (4q - 1)(q-1)^2$$

Cuando la línea creciente **RS** alcanza la posición **AC**, el punto S cuya abcisa representa la tasa de producción podría aparentemente continuar a lo largo de la curva hasta B y luego saltar a D; o podría saltar de A a C y luego moverse hasta D; o podría dejar el arco AB en un punto entre A y B. A primera vista parecería haber otra posibilidad, a saber, saltar de A a C, moverse sobre la curva hasta B, y luego saltar a D. Pero, ésto significaría incrementar la producción por un período. Esto nunca es tan rentable como moverse a través del mismo conjunto de valores de q en orden inverso, para el beneficio total sería lo mismo pero sería recibido en promedio más rápidamente si se efectúa una producción mayor al principio del período. Por tanto aquí podemos considerar *q* como siempre decreciente, aunque en este caso con una discontinuidad.

Los valores de *q* entre los cuales ocurre el salto en este caso serán determinados en el numeral 10; se mostrará que el beneficio máximo será alcanzado si el monopolista se mueve horizontalmente desde un cierto punto F sobre AB hasta un punto G sobre CD.

6. Valor de una Mina Bajo Monopolio

Para encontrar el valor presente

$$j_{t1}^{t2} = \int_{t1}^{t2} pqe^{-\gamma t}\,dt$$

de los beneficios que van a ser realizados en cualquier intervalo de t_1 a t_2 durante el cual el valor maximizante de *q* es una función continua de *t*, integramos por partes:

$$J_{t1}^{t2} = -\frac{pqe^{-\gamma t}}{\gamma}\Big]_{t1}^{t2} + \frac{1}{\gamma}\int_{t1}^{t2} \frac{d(pq)}{dq}\frac{dq}{dt}e^{-\gamma t}\,dt$$

Cuando hacemos

(12) $$y = pq$$

y aplicamos (10), la última integral toma una forma simple admitiendo integración directa. Esto da, después de aplicar (10) y eliminar $e^{-\gamma t}$ del primer término,

(13) $$J_{t1}^{t2} = \frac{\lambda}{\gamma}\left(q - \frac{y}{y'}\right)\Big]_{t1}^{t2}$$

ahora diferenciando (12), encontramos

$$qy' = y + q^2\frac{dp}{dq}$$

De aquí (13) puede ser escrito

(14) $$J_{t1}^{t2} = \frac{\lambda}{\gamma}\frac{q^2}{y'}\frac{dp}{dq}\Big]_{t1}^{t2}$$

Las expresiones (13) y (14) proveen medios muy convenientes de calcular los beneficios descontados. Su validez será mostrada en el numeral 10 para extenderse a los casos en los cuales *q* es discontinuo.

La expresión $q - y/y'$

que aparece en (13) es, en términos de la figura 1, la diferencia entre la abcisa y la subtangente de un punto sobre la curva. Por lo tanto es igual a la distancia a la izquierda del origen del punto donde una tangente a la curva corta el eje *q*.

El valor de la mina cuando $t = 0$ es, en esta notación, J_0^T es $\frac{\lambda}{\gamma}$ veces la distancia del origen al punto de intersección con el eje X negativo de la tangente inicial a la curva de beneficio del monopolio.

7. Postergación de la Producción Bajo Monopolio

Aunque la tasa de producción puede sufrir discontinuidades a pesar de que la función de demanda tenga una derivada continua, estos quiebres siempre ocurrirán durante la producción actual, nunca al final. Eventualmente q tenderá en forma continua hacia cero. Esto significa que el punto más alto de la curva de la figura 2 corresponde a $q = 0$. Para probar ésto, usamos el carácter monotónico decreciente de p como una función de q, la cual muestra que:

$$y'(q) = p(q) + qp'(q)$$

es, para valores positivos de q, menor que $p(q)$, y que ésta en cambio es menor que $p(0)$. De aquí la curva alcanza un valor más alto en el eje y' que para cualquier nivel máximo a su derecha.

La duración de la explotación monopolística es finita o infinita de acuerdo como y' toma un valor finito o infinito cuando q se aproxima a cero. Esta condición es un poco diferente de aquella bajo competencia, donde un valor finito de p cuando q tiende a cero se encontró como condición necesaria y suficiente para un tiempo finito. Las dos condiciones coinciden a menos que p permanezca finito mientras $qp'(q)$ llegue a ser infinito, caso en el cual la curva de demanda alcanza el eje p y es tangente a éste con contacto de orden superior al primero. En tal caso el período de operación es finito bajo competencia pero infinito bajo monopolio. Que este caso aparentemente excepcional es bastante probable que ocurra en efecto es indicado por un estudio de las propiedades generales de las funciones de oferta y demanda aplicando la teoría de curvas de frecuencia, un tema fascinante para el cual no habrá espacio en este artículo.

Un estudio tal indica que es esperado un contacto de orden muy alto de la curva de demanda con el *eje p*, y por lo tanto en la explotación monopolista de un activo agotable probablemente sea inmensamente prolongado más allá de lo que lo haría la competencia o lo que requerirá una maximización del valor social. Esto es simplemente una parte de la tendencia general para que la producción sea postergada bajo condición de monopolio.

8. Producción Acumulada que Afecta el Precio

El precio neto p por unidad de producto recibido por el propietario de una mina depende no sólo de la tasa de producción actual sino también de la producción pasada. La producción acumulada afecta tanto el costo como la demanda. El costo de extracción incrementa cuando la mina es más profunda; y las sustancias duraderas tales como oro y diamantes, por su acumulación influyen sobre el mercado. Considerando este efecto, el cálculo de variaciones no se puede evitar; la siguiente formulación en términos de esta teoría incluirá como casos especiales las situaciones previamente tratadas.

Sea x la cantidad que ha sido extraída de una mina, $q = dx/dt$ la tasa actual de producción, y a la cantidad originalmente en la mina. Luego p es una función tanto de x como de q y t. El beneficio descontado en el tiempo t=0, que iguala el valor de la mina en ese tiempo, es

$$\int_0^\infty p(x,q,t)qe^{-\gamma t}\,dt \tag{15}$$

Si el agotamiento va a ocurrir en un tiempo finito T, podemos suponer que q=0 para t > T, así que T llega a ser el límite superior. Entonces

$$f(x,q,t) = pqe^{-\gamma t}$$

Luego el propietario de la mina (quién es ahora asumido como monopolista) no puede hacer otra cosa mejor que ajustar esta producción de tal forma que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

En caso de que f no dependa de x, el primer término es cero y se llega al caso anterior de monopolio.

En general la ecuación diferencial es de segundo orden en x, ya que $q=dx/dt$, y así requiere dos condiciones de frontera. Una de éstas es x=0 para t=0. La otra frontera de la curva que da x como una función de t puede estar en cualquier sitio sobre la línea $x=a$, o la curva puede tener esta línea como una asíntota. Estas indefiniciones serán establecidas invocando otra vez la condición de que el beneficio descontado es un máximo. La "condición de transversalidad" así obtenida,

$$f - q\frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

ésto es :

$$q^2\frac{\partial p}{\partial q} = 0$$

es equivalente a la proposición de que, si p siempre disminuye cuando q incrementa, la curva es tangente o asintónica a la línea $x = a$. Así finalmente q disminuye continuamente hasta cero.

Supóngase, por ejemplo, que q, x y t afectan el precio neto linealmente. Así

$$p = \alpha - \beta\ q - cx + gt$$

Comúnmente α, β y c serán positivas, pero g puede tener cualquier signo. El crecimiento de la población y los precios crecientes a los consumidores de bienes agotables en competencia conducirían a un valor positivo de g. De otra manera, el progreso de la ciencia podría llevar a la introducción gradual de nuevos sustitutos para la mercancía en cuestión, tendiendo a tornar g negativo. El agotamiento de mercancías complementarias también tendería hacia un valor negativo de g.

La ecuación diferencial se reduce, para esta función de demanda lineal, a la forma lineal

$$2\beta\frac{d^2x}{dt^2} - 2\beta\gamma\frac{dx}{dt} - c\gamma x = -g\gamma t + g - \alpha\gamma$$

ya que β, c y γ son positivas, las raíces de la ecuación auxiliar son reales y de signos opuestos. Denotemos m como la raíz positiva y $-n$ la raíz negativa. Ya que

$$m - n = \gamma,$$

m es numéricamente mayor que n. La solución es:

$$x = Ae^{mt} + Be^{-nt} + \frac{gt}{c} - \frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{c\gamma} + \frac{\alpha}{c}$$

de donde :

$$q = Ame^{mt} - Bne^{-nt} + \frac{g}{c}$$

Ya que $x = 0$ cuando $t = 0$

$$A + B - \frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{c\gamma} + \frac{\alpha}{c} = 0$$

Ya que $x = a$ y $q = 0$ en el tiempo T del agotamiento definitivo,

$$Ae^{mT} + Be^{-nT} + \frac{gT}{c} - \frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{c\gamma} + \frac{\alpha}{c} - a = 0$$

$$Ame^{mT} - Bne^{-nT} + \frac{g}{c} = 0$$

A partir de estas ecuaciones se eliminan A y B igualando a cero el determinante formado por los coeficientes y términos que no contienen A ó B. Después de multiplicar la primera columna por e^{-mT} y la segunda por e^{nT}, se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-mT} & e^{nT} & -\frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{c\gamma} + \frac{\alpha}{c} \\ 1 & 1 & \frac{gT}{c} - \frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{c\gamma} + \frac{\alpha}{c} - a \\ m & -n & \frac{g}{c} \end{vmatrix} = 0$$

Expandiendo y usando las relaciones $m - n = \gamma$, y $mn = c\gamma/2\beta$, tenemos para Δ y su derivada con respecto a T,

$$\Delta = (e^{-mT} - e^{nT})\,g/c + (ne^{-mT} + me^{nT})(gT/c - 2\beta g/c^2$$
$$- g/c\gamma + \alpha\ c - a) + (m+n)(2\beta g/c^2 + g/c\gamma - \alpha/c)$$
$$\Delta' = (e^{nT} - e^{-mT})[T - 1/\gamma + (\alpha - ac)/g]\,g\gamma/2\beta$$

La última expresión es útil para aplicar el método de Newton para encontrar T. Obviamente, la derivada cambia de signo sólo para un valor de T; para este valor Δ tiene un mínimo si g es positivo y un máximo si g es negativo.

Podemos medir el tiempo en unidades tales que γ, la tasa de interés, sea unitaria. Si el valor del dinero es del 4%, compuesto trimestralmente, la unidad de tiempo entonces será aproximadamente 25 años y un mes. Con esta convención consideremos un ejemplo en el cual hay una tendencia secular ascendente en el precio que los consumidores están dispuestos a pagar: tomemos $\alpha=100$, $\beta=1$, $c=4$, $g=16$ y $a=10$. La cantidad neta unitaria recibida es en este caso:

$$p = 100 - q - 4x + 16t.$$

Sustituyendo los valores de las constantes, y notando que $m=2$ y $n=1$, tenemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2T} & e^{T} & 19 \\ 1 & 1 & 4T+9 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (8T+14)e^{T} + (4T+13)e^{-2T} - 57$$

$$\Delta' = (e^{T} - e^{-2T})(8T+22)$$

Evidentemente $\Delta < 0$ para T = 0, $\Delta = +\infty$ para $T = \infty$, y $\Delta' > 0$ para todos los valores positivos de T. De aquí $\Delta=0$ tiene una y sólo una raíz positiva.

Para el valor de prueba T = 1 tenemos:

$\Delta = 5.10$, $\Delta' = 77.5$

Aplicando a T la corrección $-\Delta/\Delta' = -0.07$ aproximadamente, tomamos T = 0,93 como una segunda aproximación. Para este valor de T,

$\Delta = -0.06$,
$\Delta' = 70.0$,

de donde $-\Delta/\Delta' = 0.001$

El programa más rentable de extracción por lo tanto agotará la mina en 0.931 unidades de tiempo, o alrededor de 23 años y 4 meses, quizá un tiempo sorpresivamente corto en vista de la posibilidad de obtener un precio indefinidamente más alto en el futuro a la tasa de incremento de 16 por unidad de tiempo.

Dado que el tiempo de trabajar una mina es infinito, es necesario no sólo que el precio incremente indefinidamente sino que incremente al final al menos tan rápido como el interés compuesto.

Las dos últimas ecuaciones para determinar A y B se vuelven ahora,

$$6.4366\,A + 0.3942\,B + 12.724 = 0$$
$$12.8735\,A - 0.3942\,B + 4 = 0$$

ya que: $e^{2T} = 6.4366$, y también $e^{-T}=0.3942$

De aquí $A = -0.866$, $B = -18.13$; así que

$$x = -0.866\,e^{2t} - 18.13\,e^{-t} + 4t + 19$$

Como una prueba observemos que esta expresión para x se vuelve cero cuando $t = 0$.

Diferenciando, tenemos:

$$q = 1.132\,e^{2t} + 18.13\,e^{-t} + 4,$$

mostrando como la tasa de producción empieza en 20.40 y gradualmente declina hasta cero.

La sustitución en la expresión asumida para el precio neto da:

$$p = 100 - q - 4x + 16t$$
$$= 20 + 5.196\,e^{2T} + 54.39\,e^{-t}$$

mostrando un descenso desde 79.60 al comienzo hasta 74.90 en el agotamiento, debido al mayor costo de extracción en las partes más profundas del depósito. El comprador por supuesto paga un precio creciente, no decreciente, a saber,

$$p + 4x = 100 - q + 16t$$
$$= 96 + 1.732\,e^{2t} - 18.13\,e^{-t} + 16t.$$

Este incremento va desde 79.60 hasta 114.90.

9. La Senda Optima

Para examinar la senda de explotación de una mina que fuera la mejor socialmente, en contraste con el programa que adoptaría un propietario bien informado pero completamente egoísta, generalicemos las consideraciones del numeral 3. En vez de la tasa de beneficios pq, debemos ahora tratar con el retorno social por unidad de tiempo,

$$u = \int_0^q p(x,q,t)dt$$

x y t son constantes en la integración. Tomando otra vez la tasa de interés del mercado como el factor de descuento apropiado para el futuro disfrute, establecemos:

$$F = ue^{-\gamma t}$$

y averiguamos cuál curva de explotación hará máximo el valor social descontado total.

$$V = \int F dt$$

La ecuación característica

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

se reduce a

$$\frac{\partial p}{\partial q}\frac{d^2 x}{dt^2}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \gamma p = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial t}$$

La condición inicial es $x = 0$ para $t = 0$. El otro punto final de la curva es móvil sobre la línea $x - a = 0$, siendo a la cantidad originalmente en la mina. La condición de transversalidad,

$$F - q\frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

Se reduce a $u - pq = 0$

Esta condición se satisface solamente para $q = 0$, de otra manera deberíamos tener la ecuación:

$$p = \frac{1}{q}\int_0^q p dq$$

expresando que el precio último es el promedio de los precios potenciales correspondientes a los menores valores de q. Ya que se asume que p decrece cuando q incrementa esto es imposible. Aun si $\delta p / \delta q$ es cero en puntos aislados, la ecuación será imposible si, como siempre es tomado, esta derivada es negativa en todas partes. Por lo tanto, $q = 0$ en el tiempo de agotamiento.

Si, como en el numeral 8, suponemos la función de demanda lineal,

$$p = \alpha - \beta q - cx + gt$$

la ecuación característica se vuelve

$$\beta\frac{d^2 x}{dt^2} - \beta\gamma\frac{dx}{dt} - c\gamma x = -g\gamma t + g - \alpha\gamma$$

Esto difiere de la ecuación correspondiente para el monopolio solamente en que β es aquí reemplazado por $\beta/2$. En un sentido esto significa que la caída del precio o utilidad marginal, ante un incremento en la oferta al afectar la tasa de producción cuenta dos veces, tanto cuando está bajo el control del monopolista como en el caso de querer garantizar bienestar social.

El análisis del numeral 8 puede ser aplicado a este caso sin ningún cambio cualitativo. Los valores de m y n dependen de b, y por lo tanto son cambiados. El tiempo T hasta el agotamiento final será reducido, si va a ser maximizado más el valor social que la rentabilidad del monopolio. Para el ejemplo numérico dado, se encontró T como 0.931 unidades de tiempo bajo monopolio. Repitiendo el cálculo para el caso en el cual la meta es el máximo valor social, encontramos como el mejor valor es solamente 0.6741 unidades de tiempo.

Para diferentes valores de las constantes, aun con una función de demanda lineal, las matemáticas pueden ser menos simples. Por ejemplo, la ecuación $\Delta = 0$ puede tener dos raíces positivas en vez de una, este será el caso si la ilustración numérica seleccionada es variada suponiendo que el signo de g es invertido, debido al progresivo descubrimiento de substitutos, el efecto directo del paso del tiempo es entonces disminuir en vez de incrementar el precio. En tales casos es necesaria una posterior evaluación de las dos posibles curvas de desarrollo, para determinar lo que producirá mas, la rentabilidad de monopolio ó el valor social descontado, de acuerdo a nuestro objeto.

10. Soluciones Discontinuas

Aún si la tasa de producción q tiene una discontinuidad, como en el ejemplo del numeral 5, la condición que $\int f dt$ será un máximo requiere que cada una de las cantidades

$$\frac{\partial f}{\partial q}, f - q\frac{\partial f}{\partial q}$$

debe sin embargo ser continua[5]. Esto será verdad si f está definida para la rentabilidad del monopolio descontado o la utilidad total descontada.

La ecuación (8), puede ser escrita:

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \lambda$$

la cual muestra, ya que el miembro izquierdo es continuo, que λ debe tener el mismo valor antes y después de la discontinuidad.

Cuando p es una función solo de q, las dos cantidades continuas pueden ser escritas en la notación del numeral 4, $y'e^{-\gamma t}$ y también $(y - qy')e^{-\gamma t}$ la cual muestra que y' e y-qy' son continuas. Así la expresión $\lambda(q - y/y')$ que aparece en (13), es continua. Consecuentemente las expresiones (13) ó (14) pertenecientes a los diferentes intervalos de tiempo pueden simplemente ser agregadas para obtener una expresión de la misma forma. Por lo tanto el valor presente de los beneficios futuros descontados de la mina -y por lo tanto de la mina- es en tales casos la diferencia entre los valores de

$$\lambda (q - y/y') / g$$

en el presente y en el tiempo del agotamiento.

Ahora estamos listos para responder preguntas tales como la presentada al final del numeral 5 como la localización de la discontinuidad existente allí mostrada en el programa más rentable de producción cuando la función de demanda es

$$p = b - (q - 1)^3$$

ya que en este caso

$$f = pqe^{-\gamma t} = \left[bq - q(q-1)^3\right]e^{-\gamma t}$$

las dos cantidades

$$b - (4q-1)(q-1)^2,$$
$$3q^2 (q-1)^2,$$

son continuas. Consecuentemente:

$$(4q-1)(q-1)^2$$

y

$$q^2 (q-1)^2$$

son continuas. Si q_1 denota la tasa de producción justo antes del salto repentino y q_2 la tasa inicial después de éste, significa que

$$(4q_1 - 1)(q_1 - 1)^2 = (4q_2 - 1)(q_2 - 1)^2$$
$$q_1^2 (q_1 - 1)^2 = q_2^2 (q_2 - 1)^2$$

La única solución admisible es:

$$q_1 = (3 + \sqrt{3}) / 4 = 1.1830,$$
$$q_2 = (3 - \sqrt{3}) / 4 = 0.31699$$

11. Pruebas para un Máximo Verdadero

Las ecuaciones que han sido presentadas para encontrar el programa de producción de máximo beneficio o valor social son condiciones necesarias, no suficientes para máximos, como la anulación de la primera derivada en el cálculo diferencial. Debemos también considerar pruebas mas definitivas.

Las integrales que han sido originadas en los problemas de activos agotables van a ser máximas, no necesariamente, para el tipo mas general de variación concebible para una curva, sino sólo para las llamadas variaciones *"débiles especiales" ("special weak")*. La naturaleza de la situación económica parece impedir todas las variaciones que involucran el retroceso en el tiempo, incrementando la tasa de producción, manteniendo dos tasas de producción diferentes al mismo tiempo ó variando la producción con infinita rapidez. Los incrementos extremadamente repentinos en la producción usualmente involucran costos especiales los cuales serán soportados solamente bajo condiciones inesperadas, y deben ser evitados en la planeación de largo plazo. Así mismo los repentinos decrecimientos involucran pérdidas sociales de gran magnitud tales como desempleo, que aún un monopolista egoísta frecuentemente tratará de evitar. Esto será considerado en la próxima sección. En efecto es posible que en algunos casos especiales estas variaciones *"fuertes" ("strong")* podrán tomar alguna significancia económica, pero una situación tal

5 C. Caratheodory, Uber die diskontinuirlichen Losungen in ther Variationsrechnung," tesis, Gottingen, 1904, p.11. La condición de que la primera de esas cantidades debe ser continua es dada en el texto, pero por alguna razón la segunda es generalmente omitida.

involucraría fuerzas de una categoría diferente de aquellas con las cuales ordinariamente está relacionada la teoría económica.

Las pruebas críticas que deben ser aplicadas son por las consideraciones precedentes reducidas a dos -las de Leggendre y Jacobi-[6]. Dado que la utilidad descontada total o valor social (numeral 9) será un máximo, la prueba de Legendre requiere que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{\partial p}{\partial q} < 0$$

una condición que siempre es tomada para obtener ahorros en casos excepcionales. Dado que la curva seleccionada producirá un máximo genuino para la utilidad de un monopolista, la prueba de Legendre requiere que

$$\frac{\partial^2 (pq)}{\partial q^2} = 2\frac{\partial p}{\partial q} + q\frac{\partial^2 p}{\partial q^2} < 0$$

Esto significa que la curva de la figura 1 es convexa hacia arriba en todos los puntos tocados por la tangente de cambio. Las porciones re-entrantes, si existen, son pasadas por alto, produciendo discontinuidad en la tasa de producción.

Cuando la solución de la ecuación característica ha sido encontrada en la forma

$$x = \phi\ (t, A, B),$$

siendo A y B constantes arbitrarias, la prueba de Jacobi requiere que

$$\frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial A}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial B}}$$

no tome el mismo valor para dos valores diferentes de t. Para el ejemplo del numeral 8 esta cantidad crítica es simplemente $e^{(m+n)t}$, que obviamente satisface la prueba. La solución representa un máximo real, no ilusorio para la utilidad del monopolista. Lo mismo es verdad para el programa de producción que maximiza la utilidad descontada total con la misma función de demanda. Cada caso debe, sin embargo, ser examinado separadamente, ya que la prueba puede mostrar en algunos casos que un máximo aparente puede ser mejorado.

12. La Necesidad de Estabilidad en la Peoducción

La función de demanda de la que se obtiene p puede involucrar no sólo la tasa de producción q, sino también la tasa de cambio q' de q. Una condición tal mostraría una dualidad con la considerada por C. F. Roos[7] y G. C. Evans[8], quienes sostuvieron que la cantidad de una mercancía que puede ser vendida por unidad de tiempo depende ordinariamente tanto de la tasa de cambio del precio, como del mismo precio. Si p es una función de x, q, q', y de t, el máximo del beneficio del monopolio o del valor social solamente puede ser obtenido si la senda de explotación satisface una ecuación diferencial de cuarto orden.

Mas generalmente podemos suponer que p y su tasa de cambio p' están conectadas con x, q, q', y con t por una relación

$$\phi(p,\ p',\ x,\ q,\ q',\ t) = 0\ .$$

Esto presenta un problema de Lagrange, que puede ser tratado con los métodos conocidos[9] Una posterior generalización es suponer que el precio, la cantidad y sus derivadas están sujetas a una relación en la naturaleza de una función de demanda que también involucra una integral o integrales que dan el efecto de los precios pasados y las tasas de consumo[10]

La inversión de capital para desarrollar la mina y sus industrias esenciales es un requisito necesario para una producción estable; el otro es la deseabilidad del empleo

[6] *A. R. Forsyth, Calculus of Variations (Cambridge, 1927), pp. 17-28*

7 *" A Dynamical Theory of Economics, " Journal of Political Economy, XXXV (1927), 632, y referencias; también " A Mathematical Theory of Depreciation and Replacement, " American Journal of Mathematics, L (1928), 147.*

8 *" The Dynamics of Monopoly, " American Mathematical Montly, Vol. XXXI (1924); también " Mathematical Introduction to Economics (McGraww-Hill Book Co, 1930).*

9 *CF.G.A Bliss, "the prolem of lagrange in the calculus of variations" ,(mimeografiado por O.E. Brown), (University of Chicago Bookstore).*

10 *Ver "Generalized Lagrange Problems in the Calculus of variations", por C.F. Roos, Transations of the American Mathematical Society, XXX, (1927), 360.*

regular del trabajo. Bajo el término "*capital*" posiblemente pueden estar incluidos los costos, para empleadores y trabajadores, para atraer trabajadores a la mina desde otros lugares y ocupaciones. El retorno de estos trabajadores a otras ocupaciones cuando la producción baja tendría que ser calculada como parte del costo social. Si éste entrara en los costos del propietario de la mina probablemente dependería de si los trabajadores tienen al principio suficiente información y poder de negociación para insistir sobre la compensación de sus costos de indemnización por retiro.

Los problemas en los cuales la rigidez de inversión de capital juegan un papel para determinar los programas de producción pueden ser tratados introduciendo nuevas variables $x_1, x_2, \ldots$, para representar los varios tipos de inversión de capital involucrados. En la medida en que estas variables sean continuas, el problema es el de maximizar una integral que incluya $x, x_1, x_2, \ldots$, y sus derivadas, usando métodos bien conocidos. Las ecuaciones simultáneas

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$i = 0,1,2,\ldots, x_0 = 0; x_1 = dx_i \ dt$$

son necesarias para un máximo. La depreciación del equipo de minería origina consideraciones de esta clase.

Todos los casos considerados en la primera parte de este documento conducen a soluciones en las cuales la tasa de producción de una mina siempre disminuye. Considerar la influencia de las inversiones fijas y el costo de acelerar la producción, al principio puede llevarnos a curvas de producción que incrementan continuamente desde cero hasta un máximo, y luego caen más lentamente cuando el agotamiento se aproxima. Se han encontrado estadísticamente ciertas curvas de producción en industrias de tipo extractivo como la producción de petróleo[11]

11 C.E Van Orstrand, "On the Empirical Representatión of certain Production curves, Journal Of the Washinton Acade my of Sciencies, Xv, (1925), 19.

13. Impuestos al Valor del Capital y Tasas Compensatorias

Un impuesto no anticipado sobre el valor de una mina no tendrá efecto distinto al de transferir a la tesorería gubernamental una parte del ingreso del propietario. Un impuesto anticipado a la tasa anual α y pagadero continuamente tendrá los mismos efectos sobre el valor de la mina y el programa de producción que un incremento α en la tasa de interés. Esto lo probaremos ahora.

Del ingreso pq de la mina en el tiempo t ahora debe ser deducido el impuesto, $\alpha J(t)$. Consecuentemente el valor en el tiempo $\Im$ es:

$$J(\Im) = \int_{\Im}^{T} [pq - \alpha J(t)] e^{-\gamma(t-\Im)} dt$$

Por diferenciación esta ecuación integral en J se reduce a la ecuación diferencial:

$$J'(\Im) = -pq + \alpha J(\Im) + \gamma J(\Im).$$

La solución es encontrada por métodos bien conocidos. La constante de integración es evaluada por medio de la condición según la cual $J(T) = 0$.

Tenemos: $$J(\Im) = \int_{\Im}^{T} pq e^{-(\alpha+\gamma)(t-\Im)} dt$$

Así que α es simplemente agregado a γ.

Una clase bastante diferente de tributo es representada por las "*tasas compensatorias*"[12] * Un impuesto tal, de

12 A variant. Una variante es un impuesto ad valorem. Una gran cantidad de información y discusión concerniente a estos impuestos está contenido en la bienal "Report of the Minnesota State Tax Comisión", 1928, (St. Paul). A partir de la página 111 de este reporte aparece que Alabama desde 1927 ha tenido una tasa compensatoria de 2 ¼ centavos por tonelada de carbón, 4 ½ por tonelada de minerales ferrosos y 3% sobre productos de cantera; Montana impone al carbón extraído 5 centavos por tonelada ; Arkansas impone una tasa de 21/2 por ciento sobre el valor bruto de todos los recursos naturales excepto carbón y madera, 1% sobre el carbón y 7 centavos por 1000 listones de madera. Minnesota impone al material ferroso extraído el 6% sobre el valor menos el costo de mano de obra y materiales usados en al minería y también avalúa las tierras auríferas a una tasa superior que otras propiedades para el impuesto de propiedad en general. Estos impuestos no están basados completamente en la idea de la conservación, sino animadas también en la imposición a extranjeros, o sea "retener para el estado su patrimonio natural". Ya que Minnesota produce cerca de 2/3 del material ferroso de los Estados Unidos, la incidencia exterior es dudosamente cumplida. Los impuestos del petróleo mexicano tienen el mismo objetivo. La Comisión de Minnesota cree que las prospectivas para el metal virtualmente han casado a causa de los altos impuestos.

**Los traductores consideran que "severances taxes" en este caso es mas o menos equivalente al de tasa compensatoria, témino que se ha introducido en al legislación ambiental Colombiana (Ley 99n de 1993).*

un monto por unidad de material extraído de la mina tiende a la conservación. La teoría ordinaria de monopolio de una mercancía inagotable sugiere que la incidencia de un impuesto tal sea dividido entre el monopolista y el consumidor, igualmente en el caso de una función de demanda lineal. Sin embargo, para una oferta agotable la división está en una proporción diferente, que varía con el tiempo y la oferta remanente. En efecto, la imposición del impuesto conducirá eventualmente a un precio realmente más bajo que si no hubiera habido impuesto.

Consideremos la función de demanda lineal

$$p = \alpha - \beta q$$

y por simplicidad, sin costo de producción. La tasa de beneficio neto, después de pagar un impuesto υ por unidad extraída, será

$$(p - \upsilon)\, q = (\alpha - \upsilon) q - \beta q^2$$

Como en el numeral 4, la derivada aumenta en el mismo sentido del interés compuesto:

$$\alpha - \upsilon - 2\beta q = \lambda e^{\gamma t}$$

Ya que finalmente $q = 0$ y $t = T$, obtenemos:

$$\alpha - \upsilon = \lambda e^{\gamma T}$$

de aquí eliminando λ y resolviendo para q,

$$q = \left[1 - e^{\gamma(t-T)}\right](\alpha - \upsilon)/2\beta$$

El tiempo de agotamiento T está relacionado con la cantidad original de la mina a través de la ecuación

$$\mathrm{a} = \int_0^T q\,dt = \left(\gamma T + e^{-\gamma T} - 1\right)(\alpha - \upsilon)/2\beta\gamma$$

de aquí:

$$dT = \frac{2\beta\, \mathrm{a}\, d\upsilon}{(\alpha - \upsilon)^2 (1 - e^{-\gamma T})}$$

mostrando cuánto es el incremento en el tiempo de explotación como resultado de la imposición de una pequeña tasa compensatoria. El efecto sobre la tasa de producción en el tiempo t es

$$dq = \frac{\partial q}{\partial \upsilon} d\upsilon + \frac{\partial q}{\partial T} dT$$
$$= d\upsilon\left\{-1 + e^{\gamma(t-T)}\left[1 + 2\beta\gamma\ \mathrm{a}/(\alpha - \upsilon)(1 - e^{-\gamma T})\right]\right\}/2\beta$$

Por la forma de la función de demanda se deduce que el incremento en precio en el tiempo t es

$$dp = -\beta dq = d\upsilon\left\{\tfrac{1}{2} - e^{\gamma(t-T)}\left[\tfrac{1}{2} + \beta\gamma\, \mathrm{a}/(\alpha - \upsilon)(1 - e^{-\gamma T})\right]\right\}$$

Si **a** es muy grande, entonces así mismo será también T; la expresión en paréntesis cuadrados, para valores moderados de t, diferirá infinitesimalmente desde 1/2, reduciéndose al caso de monopolio con ofertas ilimitadas. Sin embargo, dp siempre será menor que $\tfrac{1}{2}\, d\upsilon$ y, cuando el agotamiento se aproxima, declinará y se volverá negativo. Finalmente, cuando $t = T$, el precio de los artículos incluido el impuesto a los compradores es menor por

$$\frac{\beta\gamma\, \mathrm{a}\, \upsilon}{(\alpha - \upsilon)(1 - e^{-\gamma T})}$$

que el precio final si no hubiera tenido impuesto. El precio, sin embargo será tan alto que muy pocas de las mercancías se comprarán. Un impuesto sobre un monopolista que lo condujera a reducir sus precios es una reminiscencia de la paradoja de Edgeworth según la cual un impuesto sobre los tiquetes del ferrocarril de primera clase hace que la acción más rentable del propietario monopolístico (y no regulado), sea la reducción de los precios tanto de primera como de tercera, a más de pagar el impuesto mismo[13]. El caso de una mina es, sin embargo, de un tipo distinto al de Edgeworth y no puede ser asimilado a este caso paradójico considerando el mineral extraído en diferentes períodos como si fueran diferentes mercancías. En efecto en el caso simple de la economía de la mina que estamos considerando, las demandas en diferentes períodos no están correlacionadas; las ofertas que se colocan en el mercado ahora y en el futuro no se complementan, ni compiten unas con otras. La demanda correlacionada de un tipo particular era, de otro lado, una característica esencial del fenómeno de Edgeworth.

La última baja del precio y la extensión de la vida de una

13 Economic Journal, VII (1897), 231 y varios pasajes en Edgeworth's Papers Relating to Political Economy mina como resultado de una tasa compensatoria no son peculiares a la función de demanda lineal, sino que funciona similarmente para cualquier función de demanda decreciente *p(q)* cuya pendiente es siempre finita. Esta proposición general no depende de que el impuesto sea pequeño.

La conclusión alcanzada en el caso lineal de que la división de la incidencia del impuesto es más favorable al consumidor que para una oferta inagotable es probablemente verdadera en general; al menos ésto es indicado por una evaluación de un número de curvas de demanda. Sin embargo, la proposición general parece muy difícil de probar.

Ya que la tasa compensatoria pospone el agotamiento, recae considerablemente sobre el monopolista y conduce finalmente a una caída del precio, parecería ser un buen impuesto. Particularmente va a ser recomendado si el monopolista es considerado un propietario inequitativo, y no es factible otro medio de separarlo de una porción tan grande de ella como lo haría la tasa compensatoria. Sin embargo, la riqueza total de una comunidad se puede disminuir más bien que aumentar por tal impuesto. Considerando como en el numeral 3 la integral u de los precios p que los compradores están dispuestos a pagar por cantidades por debajo de las que actualmente se ponen en el mercado, y la integral de tiempo U del valor de u descontado por el interés, tenemos en el caso de la demanda lineal discutida,

$$u = \int_0^q (\alpha - \beta q)dq = \alpha q - \frac{1}{2}\beta q^2$$

Si estuviéramos considerando la fracción de este beneficio social que se aplica a los consumidores, tendríamos que sustraer la porción *pq* que ellos pagan al monopolista, una cantidad de la que él tendría que sustraer el impuesto, que beneficia al Estado. Pero la suma de todos estos beneficios es u, la cual es afectada por el impuesto solamente cuando éste afecta la tasa de producción q.

Si, por simplicidad, medimos el tiempo en unidades tales que $\gamma = 1$, la tasa de producción determinada antes en esta sección llega a ser

$$q = (1-e^{t-T})(\alpha - \upsilon) / 2\beta$$

Sustituyendo ésta en la expresión para u y el resultado en U, obtenemos

$$U = \int_0^T ue^{-t}dt$$
$$= (\alpha-\upsilon)\left[4\alpha\left(1-e^{-T}-Te^{-T}\right)-(\alpha-\upsilon)\left(1-2Te^{-T}-e^{-2T}\right)\right]/8\beta$$

Diferenciando U y luego, para examinar el efecto de un impuesto pequeño, hacemos $\upsilon = 0$. Los resultados se simplifican a:

$$\frac{\partial U}{\partial \upsilon} = -\left(1-e^{-T}\right)^2 \alpha/4\beta$$
$$\frac{\partial U}{\partial T} = \left[(T+1)e^{-T} - e^{-2T}\right]\alpha^2/4\beta$$

De la cantidad inicialmente en la mina, $a = (T + e^{-T} - 1)/2\beta$,

Obtenemos, como anteriormente,

$$\frac{dT}{d\upsilon} = \frac{2\beta a}{\alpha^2\left(1-e^{-T}\right)}$$

Cuando $\upsilon = 0$. Sustituyendo aquí el valor precedente para **a** encontramos, después de simplificar,

$$\frac{dU}{d\upsilon} = \frac{\partial U}{\partial \upsilon} + \frac{\partial U}{\partial T}\frac{dT}{d\upsilon} = -\frac{\alpha}{4\beta}\frac{e^T + e^{-T} - 2 - T^2}{e^T - 1}$$

El numerador de la última fracción puede ser expandido en una serie convergente de potencias de T en las cuales todos los términos son positivos. Por tanto $dU/d\upsilon$ es negativa.

Así un impuesto pequeño sobre un recurso monopolizado reducirá su valor social total, al menos si la función de demanda es lineal. Si ésto es verdad para funciones de demanda en general es un problema no resuelto.

Aquí hemos supuesto el impuesto u constante, permanente y completamente previsible. Ya que un impuesto imprevisible tendrá resultados imprevisibles raramente podemos construir una teoría general de tales impuestos. Sin embargo, cualquier impuesto de cantidad variable en el tiempo de una manera definitivamente fijada por anticipado traerá resultados predecibles. De esta forma un problema interesante es fijar un programa de tributación u, que pueda involucrar la tasa de producción q y la producción acumulada x, así como el tiempo, tal que, cuando el monopolista entonces seleccione su programa de producción para maximizar su beneficio, el valor social U será mayor que si cualquier otro programa de tributación hubiera sido adoptado. Esto conduce a un problema de tipo Lagrange en el cálculo de variaciones, siendo variable un punto final. Haciendo $q = dx/dt$ y

$$J = \int_0^T f(x,q,\upsilon,t)dt, \qquad U = \int_0^T F(x,q,t)dt$$

el problema es seleccionar υ,
sujeto a la relación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \upsilon} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial \upsilon} + \frac{\partial \upsilon}{\partial q}\right) = 0$$

Así que U será un máximo. En general, por supuesto, se puede lograr un mayor valor de U, al menos en teoría, por propiedad y operación pública.

14. Ingreso y Agotamiento de la Mina

De los impuestos del ingreso no estamos preocupados excepto por la determinación de la cantidad del ingreso de una mina. El problema de la tasa por agotamiento ha sido complejo. Se ha dicho que si el valor del mineral removido de la tierra podría ser reclamado como una deducción del ingreso, por tanto una compañía minera que no tiene ingreso excepto por la venta del mineral podría evadir completamente el pago de los impuestos. La falacia de esta controversia puede ser examinada considerando el valor de la mina en el tiempo t,

$$J(t) = \int^T pqe^{-\gamma(\mathfrak{I}-t)}d\mathfrak{I}$$

En esta integral p y q tienen los valores correspondientes al tiempo $\mathfrak{I}$, después de t asignado para cualquier programa de producción adoptado, si ésto resulta de la competencia, de un deseo de maximizar el beneficio de monopolio o de cualquier otro conjunto de condiciones. El ingreso neto consiste en el beneficio de las ventas del material removido (los costos de producción y venta como es usual han sido deducidos), menos el decremento en el valor de la mina. Por lo tanto iguala, por unidad de tiempo,

$$pq + dJ/dt;$$

y de la expresión para J, ésto es exactamente γJ. En otras palabras, cualquier programa de producción particular fija el valor de la mina en una forma tal que el ingreso en cualquier tiempo, después de tener en cuenta el agotamiento, es exactamente igual al interés sobre el valor de la inversión en ese tiempo.

Pero, aunque la tasa de declinación en el valor de una mina parece una cantidad lógica para definirla como agotamiento y deducir del ingreso, ésta no es la práctica de las administraciones tributarias, al menos en los Estados Unidos. El valor de la propiedad en adquisición, para marzo primero, 1913, una fecha poco antes del establecimiento del impuesto, si hubiera sido adquirida antes de esa fecha, se toma como base y se divide por el número de unidades de material estimadas en la mina en esa época. La *"unidad de agotamiento"* resultante, una cantidad de dinero, se multiplica por el número de toneladas, libras u onzas de material removido en un año para dar el agotamiento para ese año. El total de la tasa por agotamiento no debe exceder el valor original de la propiedad.

La diferencia entre los dos métodos de calcular el agotamiento se origina de las incertidumbres de valoración y los pronósticos de precio, demanda, producción, costos, tasas de interés y cantidad de material remanente. Si el método teórico fuera aplicado, un año en que la mina dejara de operar aún sería todavía considerada como generadora de un ingreso igual al interés sobre el valor de la inversión. Esto parece anómalo solamente a causa de otro defecto, desde el punto de vista teórico, en la legislación tributaria: la no tributación del incremento en el valor de una propiedad hasta su venta. Durante un año de paro, si es previsto, el valor de la propiedad está actualmente incrementando, para el año de ocio ha sido considerado fijando el valor al inicio del año.

Una enmienda hecha a la Legislación Tributaria Federal de Estados Unidos en 1918 estima que la valoración sobre la que tal agotamiento es calculado puede bajo ciertas circunstancias ser tomado, no como el valor de la propiedad cuando fue adquirida o en 1913, sino el valor superior que posteriormente tomó cuando su contenido mineral fue descubierto. Esta consideración tiene el efecto de incrementar materialmente las tasas por agotamiento, y así reducir los pagos de impuesto. El repentino incremento en el valor cuando el mineral es descubierto bien puede ser considerado como ingreso gravable, pero no es considerado así por la ley a menos que la propiedad se venda inmediatamente. Los marcos del estatuto parecen efectivamente, de acuerdo a su lenguaje, haber considerado este incremento en valor como una recompensa por los esfuerzos y riesgos de prospección lo cual sugeriría que es una posición razonable dada la naturaleza del ingreso. Sin embargo, el objeto de la enmienda es tratar este incremento como un valor de capital pre-existente, que debe ser retornado al propietario por la venta del mineral. La enmienda parece ser inconsistente y también bastante generosa para los propietarios particularmente afectados.

15. Duopolio

Intermedio entre el monopolio y la competencia perfecta y más estrechamente relacionada que ambos al mundo económico real, es la condición en la cual hay unos pocos vendedores en competencia. En un documento más formal[14] esta situación fue discutida para el caso, con especial referencia a un factor usualmente ignorado, la existencia con respecto a cada vendedor de grupos de compradores que tienen una ventaja especial en negociar con él a pesar de posibles menores precios. Más de un precio en el mismo mercado es entonces posible y con una clase de cuasi-estabilidad que fija un límite inferior a los precios, así como el conocido límite superior del precio de monopolio.

Para los recursos agotables los problemas correspondientes de competencia entre un pequeño número de empresarios puede ser estudiado en primera instancia por medio de los valores estacionarios conjuntos de varias integrales que representan ingresos descontados. No necesitamos confinarnos, como lo hemos hecho por conveniencia al tratar con el monopolio, a una sola mina para cada competidor. Sean m competidores, y el número i controla n_i minas, cuyas tasas de producción y contenido inicial denotaremos por $q_{i1}, \ldots, q_{in}$, y también $a_{i1}, \ldots, a_{in}$, respectivamente. Las funciones de demanda serán intercorrelacionadas, entre las minas poseídas por cada competidor y entre las minas de diferentes características. Consecuentemente las m integrales J_i que representan los beneficios descontados involucrarán en sus integrandos f_i todos los q_{ij}, así como al menos algunas de las producciones acumuladas $x_{ij} = \int q_{ij}\, dt$. Si el i-ésimo propietario desea maximizar su beneficio, asumiendo que las tasas de producción de los otros han sido fijadas, él ajustará sus n_i tasas de producción de tal manera que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{ij}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_i}{\partial q_{ij}} = 0$$

$$j = 1,2,\ldots,n_i$$

Continuando la analogía con el caso estático vamos a imaginar que los otros competidores, sabiendo los planes, hacen lo mismo, alterando sus programas para conformar ecuaciones parecidas a las anteriores. Cuando el *i-ésimo* propietario aprende de sus planes modificados, él a su vez los reajustará. El único equilibrio final posible con un programa de producción establecido para cada mina será determinado por la solución del conjunto de ecuaciones diferenciales de este tipo, las cuales son exactamente iguales al número de minas, y por lo tanto igual al número de variables por ser determinadas. Todo ésto es una generalización directa del caso de ofertas inagotables. Pero mostraremos que la solución tiende a sobrestimar las tasas de producción y subestimar los precios de las minas en competencia.

Sobre la abundancia han sido manifestadas dudas respecto al resultado en el caso más simple, y las razones que puede aducirse en favor de la solución son aún más claramente inadecuadas cuando las ofertas son de cantidades limitadas. La principal dificultad con el problema de un pequeño número de vendedores consiste en el hecho de que cada uno, al modificar su conducta de acuerdo con lo que él piensa que los otros van a hacer puede o no tener en cuenta el efecto sobre sus precios y políticas de sus propios actos prospectivos. Hay un *"punto de equilibrio"*, tal que ninguno de los dos vendedores puede, al cambiar su precio, incrementar su tasa de rentabilidad mientras el precio de los otros permanece inalterado. Sin embargo, si un vendedor incrementa su precio moderadamente, haciendo algún sacrificio inmediato, el otro encontrará que su senda más rentable es incrementar su propio precio; y entonces, si el incremento original no es demasiado grande, ambos obtendrán beneficios superiores que en el *"equilibrio"*. Pero esa tendencia a cortar los precios por debajo del equilibrio es menos importante de lo que se ha supuesto como es mostrado en el artículo referido.

14 Harold Hotelling, "Stability in Competition", Economic Journal of Mathematics, XLVII (1925), 163.

Con una oferta agotable, y por lo tanto con menos pérdidas por una reducción temporal en las ventas, un vendedor estará particularmente inclinado a experimentar incrementando su precio por encima del nivel teórico con la esperanza que sus competidores también incrementarán sus precios. Por las pérdidas de negocios incurridas mientras espera que ellos lo hagan él puede en este caso estar tranquilo, no solamente a la expectativa de aproximarse a sus antiguas ventas al precio superior en el futuro cercano sino también por el hecho de que conserva sus ofertas para el tiempo cuando el agotamiento general estará más cercano y aún el precio teórico será superior. Así una condición general puede ser esperada de precios superiores y tasas inferiores de producción que son dadas por la solución de las ecuaciones características simultáneas.

Para productos complementarios tales como hierro y carbón, la situación es de alguna manera invertida. Edgeworth en su *Papers Relating to Political Economy* señala que cuando dos bienes complementarios son monopolizados por separado el consumidor está peor que si ambos estuvieran bajo el control del mismo monopolista. Esto supone la solución de equilibrio. Las desviaciones tentativas del equilibrio hechas para influenciar la otra parte puede estar ahora en otra dirección, según la naturaleza de la función de la demanda y otras condiciones que hacen más rentable moverse hacia precios inferiores y ventas superiores caracterizando el máximo beneficio conjunto o incrementar el precio de uno en un esfuerzo para forzar al competidor a bajar el suyo para conservar las ventas. Cuando las ofertas de los bienes complementarios son agotables, existe la misma indeterminación.

Un problema muy diferente de duopolio que involucra el cálculo de variaciones ha sido estudiado por C. F. Roos[15] quien encuentra[16] que los beneficios respectivos toman verdaderos valores máximos. Sin embargo, como en el caso estático, el equilibrio estable definitivamente no es asegurado por el hecho de que cada beneficio es un máximo cuando el otro es considerado fijo, ya que los actos de un competidor afectan los del otro. El cálculo de variaciones es usado por Roos y G. C. Evans[17] para tratar con funciones de costo y demanda que involucran la tasa de cambio del precio así como el precio. Tales funciones las hemos evitado para concreción y simplicidad, pero si se probara su importancia en la economía minera el tratamiento previsto puede ser generalizado a éllas (Cf. numeral 12). Evans y Roos no están interesados en activos agotables y asumen que en cualquier tiempo todos los competidores venden al mismo precio.

Los problemas de los recursos agotables involucran el tiempo de una manera distinta además de involucrar el agotamiento y los precios más altos, trayendo información adicional, tanto para la extensión física y condición del recurso como para los fenómenos económicos que se refieren a su extracción y venta. En las discusiones más elementales de intercambio, como en el trueque de nueces por manzanas, así como en las discusiones del duopolio, un elemento de tiempo siempre es introducido para mostrar un acercamiento gradual al equilibrio o un alejamiento de él. Tales efectos de tiempo están igualmente o aún en mayor medida involucrados en la explotación de activos irremplazables, complicándose con las tendencias seculares peculiares a esta clase de bienes. Con el duopolio en la venta de recursos agotables las posibilidades de negociación, regateo, y artimañas llegan a ser notablemente complejas.

Las guerras de precios periódicos que quiebran la monotonía de los precios de la gasolina en la Costa Pacífica Americana son un fenómeno interesante. Al oeste de la franja de las mil quinientas millas de las sierras unas pocas grandes compañías dominan el negocio del petróleo. En los campos petroleros de California del Sur, sin embargo, numerosas empresas pequeñas venden gasolina a precios rebajados. La gasolina barata es en gran parte no destilada del petróleo sino filtrada del gas natural, y puede ser de calidad ligeramente inferior; sin embargo, es un combustible aceptable para motor. La movilidad extrema de los compradores de gasolina reduce a un mínimo el elemento de gradualidad en el cambio de la demanda entre vendedores con el cambio del precio. Ordinariamente, el precio fuera de la parte sur de California es estabilizado por acuerdo entre las cinco o seis principales compañías, se fija en cada una de las grandes áreas de acuerdo a la distancia de los campos petroleros. Pero cada uno o dos años se presenta una guerra de precios, en la cual éstos caen día a día a niveles extremadamente bajos, algunas veces casi al punto de

15 "A Mathematical Theory of Competition", American Journal of Mathematics, XLVII (1925), 163.

16 "Generalized Lagrange Problems in the Calculus of Variations", Transactions of the Americans Mathematical Society, XXX (1927), 360.

17 A Mathematical Introduction to Economics (Mc Graw-Hill, 1930).

regalar la gasolina, y ciertamente por debajo del costo de distribución. Desde un precio normal de 20 a 23 centavos por galón el precio algunas veces cae a 6 o 7 centavos, incluyendo el impuesto de 3 centavos. Se hace la paz y se restaura el alto precio anterior después de unas pocas semanas de júbilo universal de los compradores por los precios bajos y el almacenamiento en cada contenedor disponible, aún en las bañeras. Lo interesante es la lentitud de la propagación de esas competencias, que usualmente empiezan en California del Sur. Las compañías pelean entre sí violentamente allí, y a unas pocas semanas más tarde en California del Norte, mientras en algunos casos se mantienen los precios en Oregon y Washington. Estas refriegas dan un ejemplo de la inestabilidad de la competencia cuando las variaciones del precio con la localización así como con el tiempo complican el comercio de un activo agotable.

Harold Hotelling
Stanford University