Alberto Campos
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional
Bogotá.

# EXPERIENCIA, INTUICION Y AXIOMATIZACION

## I. INTRODUCCION

Es fácil advertir, cuando reflexionamos sobre la adquisición progresiva de una determinada disciplina de naturaleza deductiva, tres tipos de aserciones bastante diferentes: las que se basan en la experiencia, las forjadas por la intuición, las que son tales que pueden deducirse unas a partir de otras. Haremos una descripción de cada tipo con el fin de destacar como tesis la diferencia entre ellos y una ruptura de lo axiomático respecto a lo experimental y lo intuitivo.

## II. EXPERIENCIA

Llamaremos conocimientos experimentales a los de la práctica, de los sentidos, a los así llamados del sentido común, a los de laboratorio... En general, a todos aquellos que son hechos o casos particulares de alguna relación. Y que sirva esto último como característica, si alguna se puede dar. Así son los conocimientos de la vida diaria: la cantidad anual de lluvia en algún lugar dado del planeta, el número de accidentes sobre una ruta de vacaciones, el de los habitantes del mundo, el de los millones dilapidados en la teoría de la destrucción, o el de las rosas que vimos florecer en una primavera si es que cultivamos bien nuestro jardín.

Una relación matemática, quiero decir, una relación expresada en el lenguaje que usualmente emplean los matemáticos, es verdadera experimentalmente, cuando apenas sabemos que ella es caso particular de una teoría, que no conocemos como tal, es decir, en su desarrollo interno, sino solamente como información de diccionario. Así es cualquier dato que se haya obtenido por substitución en una relación, de la que podemos saber por testimonio ajeno que es teorema, aunque ignoremos cómo sea teorema porque no tenemos ninguna idea de la manera de insertarla en una teoría axiomatizada.

Otra verdad matemática experimental es la obtenida por comparación con un modelo. Por ejemplo, la escuadra es un triángulo rectángulo universalmente aceptado y que figura entre los utensilios de trabajo de quienes, por oficio, practican la geometría, casi siempre sin conocerla. Tres segmentos de longitudes respectivas, tres, cuatro, cinco, (cualquiera sea la unidad de medida), forman, de manera única, un triángulo rectángulo verificable con la escuadra. También pueden utilizarse provisionales patrones de medida. Se sabía ya antes de los griegos que el volumen de un cono circular recto es la tercera parte del del cilindro circular recto en el que pueda inscribirse: lo cual había sido obtenido experimentalmente por medición de las capacidades respectivas.

Las aproximaciones efectivamente calculadas de números reales son verdades de tipo experimental para la absoluta mayoría de la gente. Sólo quien sabe cómo se construyen las sucesiones aproximantes de las que las aproximaciones en cuestión son términos, tiene de ellas un conocimiento axiomático.

Desde muy antiguo se sabe experimentalmente que la relación entre las longitudes de una circunferencia y su diámetro es un número comprendido entre 3,1 y 3,2. Tal vez el primer hombre en saberlo axiomáticamente haya sido Hipócrates de Quíos.

Históricamente, fueron verdades matemáticas, experimentalmente conocidas, las de civilizaciones anteriores a los griegos de los tiempos de Pitágoras, o las análogamente sabidas posteriormente.

En matemática, la experiencia por excelencia es el cálculo.

Los resultados son de tipo experimental lo mismo que los que se obtienen en la escuela primaria con las cuatro operaciones del campo racional, o en la secundaria mediante la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, o por aplicación de la noción de límite. En la enseñanza universitaria, el cálculo sigue teniendo marcada importancia: el aprendizaje de la teoría se atestigua gracias al cálculo y se hace con miras a aplicaciones, que se reducen simplemente a cálculos. Al tratar de resolver ecuaciones algebraicas o diferenciales se puede proceder por tanteo, lo cual es una especie de experimentación. En la exposición de una teoría, por abstracta que sea, se recurre frecuentemente a ejemplos como a una experiencia que ayude a poner el pie en un terreno desconocido, tanto más eficaces cuanto más próximos a hechos o conocimientos primitivos. Investigaciones avanzadas pueden comenzar por el análisis de una situación bien concreta de la cual se han estudiado todos los pormenores; de este modo, ella sirve como experiencia motivadora.

Para los griegos, para el mismo Aristóteles, la matemática se ocupaba ante todo de relaciones. Sin embargo, durante los siglos posteriores, quiso reservársele el estudio de la categoría aristotélica de la cantidad, opinión de la cual participaban inclusive muchos matemáticos, por lo menos todos aquellos que eran reacios a una matemática que podríamos llamar cualitativa. La tendencia que domina actualmente comenzó a manifestarse desde hace más de un siglo con la divisa de Lejeune-Dirichlet: "Substituir el cálculo por las ideas". Una manera de expresar esa tendencia es la de Poincaré en la frase siguiente: "Los matemáticos no estudian los objetos sino las relaciones entre los objetos; por lo tanto, les es indiferente reemplazar estos objetos por otros, con tal que no cambien las relaciones. La materia no les importa, sólo les interesa la forma". Eddington expresa mejor la concepción actual de la matemática al pensar que ella se ocupa de relaciones entre relaciones entre objetos, pues no otra cosa son las estructuras, gracias a las cuales se la expone hoy en día.

Aun desde el punto de vista meramente cuantitativo, raras son las fórmulas, por ejemplo, a las que puede llegarse por la sola experiencia; se necesita la intuición para haber de generalizarla como conviene y la axiomatización para saber cuáles son las condiciones de validez.

## III. INTUICION

Según Bourbaki (*L'architecture des mathématiques,* pág. 42. Les grands courants de la pensée mathématique. F. le Lionnais. Nouvelle édition. Albert Blanchard. Paris. 1962): "El matemático no trabaja maquinalmente como el obrero en la fábrica; nunca se insistirá demasiado sobre el papel fundamental que juega, en sus investigaciones, una intuición particular (intuición que por cierto se equivoca frecuentemente como toda intuición), que no es la intuición vulgar y sensible, sino más bien una especie de adivinición directa (anterior a todo razonamiento) del comportamiento normal que parece tener el derecho de esperar, de parte de los seres matemáticos que una prolongada frecuentación le ha hecho casi tan familiares como los seres del mundo real".

Bourbaki expresa la misma idea (en *Théorie des ensembles.* E. I. 8. Hermann. Paris, 1970) así: "...la intuición del matemático... no es necesariamente de naturaleza espacial o sensible, como se cree a veces, sino... más bien, un cierto conocimiento del comportamiento de los seres matemáticos, apoyado frecuentemente por imágenes de naturaleza muy variada, fundado primordialmente en la cotidiana frecuentación de ellos". En el mismo texto, un poco antes, Bourbaki apunta que "se está expuesto a fallas de razonamiento que arriesgan a conllevar, por ejemplo, el abusivo uso de la intuición, o el razonamiento por analogía".

Según Kant "la metafísica es el conocimiento racional por conceptos, la matemática es el conocimiento racional por construcción de conceptos" donde "construir un concepto" es "exponer la intuición a priori que le corresponde". Claramente esta intuición es de carácter espacial contra la opinión de Bourbaki de que la intuición matemática no se traduce forzosamente en imágenes de cuerpos situados en el espacio.

Etimológicamente "intuir" significa "ver dentro". De aquí que se haya llegado a emplear la voz intuición en el sentido de contemplación directa, casi de representación visual, tendiendo a confundirla con la imaginación, como capacidad de representación mental. Algunos de los filósofos llamados intuicionistas han merecido este calificativo por haber dado la preferencia, en teoría del conocimiento, a la intuición sobre el raciocinio. Puede verse un rastro de la divulgación de esta idea en la descripción del Larousse. "Intuición: conocimiento claro, directo, inmediato, de la verdad, sin ayuda del razonamiento". En esta acepción, la intuición es desde luego infalible, pues es el conocimiento de la verdad, una especie de revelación, que según algunos matemáticos eminentes que comparten con aquellos filósofos, sería el único método para descubrir.

Lo que sí es cierto es que quien ha pensado intensamente en un problema, si su concentración es coronada por el éxito, es decir, por la solución, verá a ésta manifestarse como una iluminación súbita que le permite ver en un instante y con claridad, aquello que había buscado largamente y como tanteando en las tinieblas. La intuición así entendida es el momento culminante en cualquier creación humana de valor: el poeta cuando inventa la imagen apropiada a su quimera o Arquimedes cuando se da cuenta de que el agua no empuja su cuerpo como el de los otros mortales, en cuanto que él sabrá medir, el primero, esa fuerza.

En este sentido muy pocos investigadores suscribirían el apotegma de Picasso: "Yo no busco, encuentro", sino más bien los siguientes: "el genio es noventa y nueve por ciento de transpiración y uno por ciento de inspiración", "el genio es una larga paciencia". Porque la intuición es falible, sobre todo cuando es afectada por el entusiasmo, compañero indispensable para acometer muchas obras humanas, pero débil consejero. Muchos han creído haber echado al suelo alguno de los desafíos a la razón cuando habían únicamente sido engañados por la euforia de un pretendido descubrimiento. O por la imaginación. Por lo general, toda labor creadora, es a saber, toda labor tendiente a obtener una obra humana nueva, una manera de hacer o de ver las cosas diferentemente a como se ha aprendido, requiere una gran imaginación, llamada ella también creadora. Puede decirse, tal vez, que es lo nuevo lo que la requiere; un camino trillado lo recorremos de memoria; es un paraje donde nos encontramos por primera vez el que incita nuestros sentidos y el que solicita nuestra faena imaginativa. Para comprender una deducción, un argumento de novela, una página literaria, al entendimiento se le facilita el trabajo con imágenes diversas, claras y apropiadas.

Quienes menos discuten acerca de la naturaleza de los seres matemáticos son los matemáticos; quizá, como pensaba Aristóteles, estas cuestiones conciernen más bien a quienes estudian el ser en cuanto ser. Algunos de ellos piensan que el saber matemático no tiene más valor que el experimental. Antes de aducir ciertos hechos a este respecto quiero recordar las opiniones de Platón y Aristóteles.

Dice Platón: "Tú sabes también que se sirven de figuras visibles y que, sobre estas figuras, construyen razonamientos, sin tener las figuras ellas mismas en el espíritu sino las figuras perfectas de las que aquellas son imágenes; razonan sobre el cuadrado en sí, sobre la diagonal en sí, no sobre la diagonal que trazan; e igualmente para las otras figuras. Todas las que ellos modelan o dibujan, las que producen sombras o que se reflejan en el agua, ellos las tratan a su vez como otras tantas imágenes que les sirven para conocer aquéllas que no pueden serlo sino por el pensamiento". (*República*, VI, 510 d-511 a).

Dice Aristóteles: "Tampoco es exacto que la medición sea una ciencia de magnitudes sensibles y perecederas, porque en este caso perecería ella cuando pereciesen las magnitudes. La astronomía misma, la ciencia del cielo que cae bajo el dominio de nuestros sentidos, no es una ciencia de magnitudes sensibles. Ni las líneas sensibles son las líneas del geómetra, porque los sentidos no nos dan ninguna línea recta, ninguna curva, que satisfaga a la definición; el círculo no encuentra a la tangente en un solo punto, sino en muchos como observaba Protágoras en sus ataques contra los geómetras; ni los movimientos reales ni las revoluciones del cielo concuerdan completamente con los movimientos y las revoluciones que dan los cálculos astronómicos; últimamente, las estrellas no son de la misma naturaleza que los puntos". [*Metafísica,* B (III), 2, 998 a].

No vamos a considerar aquí el problema de las interacciones entre matemática y realidad, pero sí a subrayar fuertemente el hecho de que los objetos matemáticos no son simples copias de los objetos reales.

A Aristóteles debemos la noción de abstracción, que consiste en la elaboración de una representación mental, una idealización, se dice a veces, de un objeto o de una relación, a partir de lo sensible, aislando ciertas propiedades. Pero si se tratara solamente de esto, se obtendría por la abstracción una descomposición de las propiedades del objeto, análoga a la que de la luz obtuvo Newton por un prisma. Es mucho más lo que el matemático ha menester. Afortunadamente, como ha recalcado Piaget en la *Introducción a la epistemología genética,* "en su origen, las operaciones lógico-matemáticas proceden de las acciones que podemos ejercer sobre los objetos". Así la mente no es solamente pasiva sino que produce un objeto que no siempre es simple prolongación del objeto inicial.

Es cierto que en matemática se habla de puntos, rectas, planos y espacio como en el lenguaje corriente, es decir, como en la experiencia; pero aunque podemos interpretar los primeros en el caso particular de los segundos, es decir, aunque los objetos matemáticos puedan interpretarse en particular como los objetos físicos del mismo nombre, lo primero que debe hacer quienquiera entender algo en geometría es declarar una nítida diferencia entre los dos tipos de objetos. Los objetos matemáticos tienen más propiedades que los objetos sensibles correspondientes. En la realidad no se puede alcanzar un punto con las propiedades de punto matemático. Ni hay en ella rectas, sólo segmentos; ni un solo plano, sólo secciones planas como un espejo. Ni lo que llamamos el espacio ordinario es realización de algún espacio matemático. La noción de esfera, la más inmediata, que parece experimental, no lo es, pues nadie puede ver al mismo tiempo toda la superficie esférica; es intuitiva, por ser la intuición la que completa la parcela de esfera que la visión puede captar. Es también la intuición la que alarga un segmento en los dos sentidos para forjar la representación mental de la recta. Más complicada todavía es la construcción de las rectas paralelas, o la del plano, o la del espacio.

Alguien podría pensar que estamos muy atareados tratando de exhibir para cada objeto matemático la intuición correspondiente y dándole por consiguiente razón a Kant. Sin embargo, esto no pasa de ser un recurso pedagógico, una contribución de la imaginación adiestrada matemáticamente al trabajo de comprensión. Pero toda intuición está desterrada de los desarrollos formalizados tal como se los concibe, con Hilbert, desde 1899. En cambio, en Euclides, que era toda la geometría para Kant, la intuición desempeña un papel considerable; lo cual, en cierta manera, justifica al filósofo.

El impulso a la generalización en matemática es un oficio de la intuición que puede extenderse a todas las ciencias deductivas y que tiene su contraparte en aquellas ciencias cuya materia prima es sacada directamente de la experiencia. Cuando un experimentador tabula sus datos, aspira a conseguir una función tal que los puntos que ha podido calcular pertenezcan a la gráfica de la función o que por lo menos los que no estén sobre ella se acerquen lo más posible a puntos que a ella le pertenecen. Cuando lo haya logrado habrá descubierto el comportamiento del fenómeno, es decir, una ley de la naturaleza. En esta búsqueda consiste la inducción, que es un trabajo eminentemente intuitivo. Posteriormente, cuando se conozcan ya muchas de tales leyes, es posible tal vez construir un sistema deductivo donde la mayoría de ellas aparezcan como teoremas. Fue, por ejemplo, el caso de Tico Brahe y Kepler, cuyos trabajos culminaron en la exposición deductiva de Newton.

En resumen, diremos con Piaget que "aún una verdad eterna como dos más dos igual a cuatro puede ser estudiada genéticamente pues hay gentes pensantes que no la poseen. Una cosa es la constatación empírica sobre un ábaco, una más la concepción que de ella tenían los pitagóricos, muy otra es la de los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead" (I. E. G. pág. 13).

Una relación matemática intuitivamente verdadera es una verdad experimental generalizable o una explicación que parece cobijar otros casos particulares fuera de los ya constatados o una relación matemática para la cual parece posible una demostración en el sentido de que se tiene una idea de cómo insertarla en un contexto demostrativo.

Por ejemplo, por cada semicircunferencia existe un único triángulo rectángulo isósceles inscriptible. Es fácil verificarlo experimentalmente, en cada ocurrencia. Es fácil intuir la generalidad del hecho. Esta es una verdad típicamente intuitiva. La imaginación, convenientemente adiestrada, tiene la osadía de postular la universalidad de la situación. No es la experiencia, la cual se ocupa únicamente de casos particulares, por lo tanto no podría dar cuenta sino de un número finito de ellos. Una pregunta interesante es entonces la de si esta situación es generalizable, lo cual se lograría suprimiendo uno de los requisitos; si es el de que el triángulo sea rectángulo no hay generalización posible porque en una semicircunferencia sólo es posible inscribir un único triángulo isósceles. Quitando ahora la condición de que el triángulo sea isósceles nos podemos preguntar si hay triángulos rectángulos inscriptibles en una semicircunferencia dada. Experimentalmente podemos verificar cada vez que los triángulos inscritos son hallados rectángulos; pero la experiencia no da para más. La pregunta fue contestada afirmativa y universalmente se dice que por Tales de Mileto, pero no se sabe qué justificación haya podido dar de su respuesta, si no era la experimental, es decir, la de verificar cada vez mediante la escuadra. Aquí el número de casos posibles sobrepasa toda posible experiencia. La relación "todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo", no es sólo experimentalmente verdadera (lo es caso por caso), es intuitivamente verdadera; tenemos una convicción asaz fundada de que cuantas veces se haga la verificación se encontrará que la relación se cumple pero no será un teorema mientras no sepamos obtenerla axiomáticamente, es decir, ubicar en un sistema formal una cadena de implicaciones de la cual ella sea el último eslabón.

## IV. AXIOMATIZACION

Entrevista la posibilidad de que una cierta relación sea teorema, es indispensable la construcción de una cadena de implicaciones, un puente que lleve desde ciertos enunciados dados, hasta el enunciado que presumimos es un teorema y que lo será cuando la cadena quede construida; mientras no sea así, será una conjetura. Hay algunas de éstas, verdaderos desafíos a la razón humana, muy famosas, como la de Goldbach que dice que todo número par se puede descomponer en suma de dos números primos.

La cadena de implicaciones es lo que se llama una demostración; el último eslabón de la cadena es el teorema demostrado. No es ésta, en general, una tarea fácil, lo cual explica que los más difíciles lleven nombre propio y que además una disciplina no llegue a ser axiomatizada sino muy tardíamente. Durante siglos, la única parte axiomatizada de la matemática fue la geometría, de manera que la historia de la axiomática está entrañablemente ligada a la de la geometría; por la axiomatización de la geometría y por la posibilidad de diversas geometrías los matemáticos han llegado a entender lo que es fundamentalmente una teoría axiomática. En la historia primitiva de la geometría o en la de otras disciplinas, la abundancia de conocimientos experimentales o intuitivos lleva a lo que se ha dado en llamar islotes deductivos. Hasta hace poco la geometría se aprendía axiomáticamente o no se aprendía. Ahora se debiera pensar que no hay ninguna necesidad de aprender deductivamente a la fuerza y que es mucho más importante el conocimiento experimental o intuitivo dejando el puramente formal para los especialistas. Muchos son partidarios de un estrado intermedio, axiomatizado por lugares, por islas, de donde la expresión de islotes deductivos. Pues bien, cuando una disciplina abunda en conocimientos experimentales o intuitivos así como en islotes deductivos se puede pensar en un desarrollo formal de toda ella. Lo cual consiste en construir una teoría en la que van a aparecer como teoremas, la mayoría de los resultados de que se dispone en dicha disciplina. Para eso se toman algunos términos que no se definen explícitamente y a los cuales no se les va a dar la significación del lenguaje corriente sino en cuanto lo autoricen unas relaciones que no se demuestran y cuyo oficio es precisamente éste de fijar el único sentido que será legítimo dar dentro de la teoría que se construye a los términos no definidos. Es preciso también fijar la lógica con la que se van a hacer las derivaciones. Y éstos, en cierta manera, son los únicos materiales indispensables. Para comenzar se considera una relación expresada en el lenguaje de los términos no definidos y las relaciones no demostradas adoptados y se trata de construir la cadena entre los principios primeros y la relación en cuestión mediante la lógica elegida.

El aspecto general de una teoría axiomatizada es éste:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Primeros principios}\\ \text{Lógica}\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \{\text{Teoremas}\}$$

que podemos esquematizar así:

$$\{\text{P. P.}\} + \{\text{L}\} \Longrightarrow \{\text{T}\}$$

Grosso modo, este esquema no ha cambiado desde los griegos. Ha seducido siempre a los espíritus amantes del rigor y las construcciones sistemáticas. Es curioso que la vaga sensación que tienen las gentes de la exactitud matemática tenga más que ver con el cálculo, experiencia matemática, que con el esquema anterior que sí es lo que constituye la matemática, por lo menos desde los tiempos de Pitágoras. En efecto, para recalcar sobre algo que les parece irrefutable, acuden al socorrido paradigma: "esto es tan cierto, como que dos y dos son cuatro". Y se sigue diciendo lo mismo a pesar de que Goethe haya escrito: "Dos por dos no son cuatro sino simplemente dos por dos y a esto llamamos cuatro por brevedad. Pero cuatro no es absolutamente nada nuevo". En este esquema pensaba Benjamín Peirce cuando decía que "la matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias".

Para demostrar una relación es preciso dar una justificación que cubra todos los casos posibles dentro de la teoría prohijada. Como dice Galileo en algún aparte del *Diálogo de dos nuevas ciencias:* "Una sola experiencia o demostración concluyente que se tuviese en contrario, bastaría para echar por tierra . . . cien mil argumentos probables". Añadamos que la demostración aquí pedida por Galileo es redundante: podemos suponer que se tengan cien mil verificaciones favorables; pues bien, basta un único ejemplo en contra para que ya haya que renunciar a tener una relación verdadera. Una marcada propensión a la generalización abusiva, es muy humana, es decir, una pasmosa falta de escrúpulo para confeccionar enunciados generalizadores no basados en ocurrencias cuidadosamente procesadas sino en observaciones superficiales. Posible-mente la especie sienta psicológicamente una necesidad de apoyarse en formulaciones universales y tranquilizadoras; tal vez sea irreflexión; o simple anhelo individual de imponer la propia visión del mundo. De todos modos éstas son relaciones desechables matemáticamente hablando. El que todos los casos posibles queden involucrados es lo que da esa convicción de universalidad y de necesidad que muchos creen hallar únicamente en las demostraciones matemáticas.

Una relación matemática axiomáticamente verdadera dentro de una teoría es una relación matemática para la cual, como ya lo dijimos varias veces, hay una demostración, es decir, una cadena de implicaciones desde los primeros principios hasta ella. Ahora bien: en estas cadenas no pueden figurar sino implicaciones entre relaciones que o bien son axiomas o bien son relaciones formadas, según los cánones de la lógica acordada, a partir de los axiomas o de relaciones ya demostradas. En resumidas cuentas, el sistema axiomático es autosuficiente en el sentido de que sólo intervienen en él los términos no definidos, las relaciones no demostradas, símbolos abreviadores llamados definiciones y las cadenas de implicaciones. De ninguna manera entra en consideración, por ejemplo, algo que ya sabíamos experimental o intuitivamente sobre un término o una relación que figuran en el sistema. Aquí es donde aparece una ruptura entre los tres tipos de conocimiento. En efecto, se pasa casi insensiblemente de la experiencia a la intuición pero no así de ésta a la axiomatización. Entre los dos primeros tipos, los datos pueden apoyarse mutuamente. En el tercero ningún dato de la experiencia o de la intuición debe figurar como un eslabón de alguna cadena demostrativa. Esto de ninguna manera quiere decir que la experiencia y la intuición anteriores no intervengan psicológicamente, pues entonces serían inútiles. Son muy activas como motivación, pero subjetivamente. Para escoger qué términos no serán definidos o una entre varias demostraciones posibles de un teorema se procede por razones exteriores al sistema formal, ya que el hecho de que una demostración sea más corta que otra, por ejemplo, no afecta en nada a la demostración en cuanto tal.

El papel preponderante de la implicación es el que se explicita al decir que la matemática es hipotético-deductiva: de tales hipótesis se derivan tales tesis y no otras y si se quieren derivar otras tesis hay que tomar otras hipótesis. La verdad matemática es relativa, es interior a cada sistema formal. La matemática es el conocimiento que no puede desprenderse de las hipótesis; ya lo había dicho Platón.

## V. CONCLUSIONES

A. El conjunto de las verificaciones de que una relación matemática es experimentalmente verdadera es necesariamente finito. En consecuencia, los conocimientos experimentales parecen aislados, inconexos, fragmentarios, no articulados por un principio.

B. La demostración de que una relación matemática es axiomáticamente verdadera comprende todos los casos posibles y estos, casi siempre, abarcan más que la humana experiencia posible. En consecuencia, la axiomatización es la única manera apropiada de tratar propiedades concernientes a conjuntos infinitos.

C. Entre estos dos tipos de conocimiento hay un foso que tiende a salvar la intuición, en el sentido de que gracias a ésta, se forjan, a partir de conocimientos experimentales, relaciones demostrables.

D. En un texto demostrativo no pueden figurar conocimientos experimentales o intuitivos por el hecho de ser tales sino por el hecho de ser términos no definidos o relaciones no demostradas o términos definidos o relaciones demostradas. En consecuencia, la verdad matemática es una verdad relativa al sitema formal donde se ha encontrado para ella una demostración.

E. La matemática actual se ocupa primordialmente de relaciones entre relaciones entre objetos, es decir, de estructuras.