Carlos E. Vasco
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional
Bogotá.

ESTRATIFICACION CONCEPTUAL DEL PROCESO DE PRODUCCION DE CONOCIMIENTOS MATEMATICOS

El objeto de esta ponencia es el de presentar a los interesados en la epistemología de las ciencias exactas y naturales un aspecto poco observado de la actividad matemática: la elaboración de herramientas conceptuales y simbólicas a partir de otros conceptos y símbolos previamente elaborados, con la consiguiente aparición de una estratificación conceptual en el interior de la producción matemática.

Como base de la ponencia puede asignarse la concordancia que el autor ha intentado explicitar a través de seminarios y conferencias, entre algunos resultados provenientes de las investigaciones histórico-filosóficas de Pierre RAYMOND, y algunos resultados obtenidos por los estudios de sicología genética de Jean PIAGET [1].

La idea clave podría esbozarse primero negativamente así:

—La producción matemática no parte de un tipo de abstracción pensada según el modelo persistente de la contemplación ayudada por

[1] Los resultados de Pierre RAYMOND aparecieron en forma sistemática en su obra capital, *Le Passage au Matérialisme* [R74], y en sus apuntes programáticos *L'Histoire et les Sciences* [R75]. Sobre esas bases, ha aparecido una serie de estudios históricos en la colección "Algorithme" de la editorial Maspero: *De la Combinatoire aux Probabilités* [R75a]; *Philosophie et Calcul de l'Infini* [H76], con Houzel, Ovaert y Sansuc; *Matérialisme Dialectique et Logique* [R77]. (Los paréntesis cuadrados remiten a la Bibliografía). De la ingente obra del grupo ginebrino citemos como más pertinentes a la problemática que se enfoca en este trabajo los libros:

Relaciones entre la Lógica Formal y el Pensamiento Real [B86];

De la Lógica del Niño a la Lógica del Adolescente [I72], y

Génesis de las Estructuras Lógicas Elementales [P75].

una iluminación interior o exterior, que llevaría a la conceptualización de la esencia de los objetos subsumidos bajo el concepto así abstraído.

—La producción matemática no consiste en un "segundo grado de abstracción" indiferenciado, en el que los diversos conceptos matemáticos estarían todos al mismo nivel, en una región simplemente separada de los conceptos de "primer grado" que adscribimos a las ciencias naturales y al sentido común, y de los conceptos de "tercer grado", que adscribimos a la filosofía.

—La producción matemática no tiene como producto terminado algo "ya matematizado" definitivamente, más allá de lo cual solo podría llegarse a categorías o nociones filosóficas o ideológicas, como "los seres", "la cantidad", "la multiplicidad", etc.

Para intentar decirlo positivamente, he aquí unas primeras aproximaciones que solo se aclararán en el decurso del estudio, y que intentaremos precisar en las tesis que lo concluyen:

—La producción matemática parte de actividades, de manipulaciones, acciones, movimientos. Esta producción activa tiene analogía con el trabajo experimental de otros tipos de producción científica en el campo de las ciencias naturales.

—Esta producción científica matemática tiene como productos esquemas conceptuales que, más bien que abs-traídos ("traho": tiro, saco), deberíamos llamar abs-primidos ("premo": empujo, aprieto) o abs-cudidos ("cudo": golpeo, sacudo) a partir de esquemas activos provenientes de la actividad sobre objetos y símbolos, y sobre esquemas operatorios y conceptuales previamente obtenidos.

—En esta producción matemática juega un papel decisivo la manipulación de símbolos. Con este último vocablo queremos significar aquí cualquier tipo de representación material, como la que realiza el pastor nómada al representar sus cabritos por piedritas ("calculi"), para efectuar con ayuda de ellas una serie de manipulaciones simbólico-conceptuales que llevarán al "cálculo" aritmético. Esas representaciones pueden ser muy variadas: ranuras en un bastón (runas); posiciones de los dedos de la mano (dígitos); nudos en un haz de cuerdas (quipus), impresiones en conitos de arcilla (ápices); manchas de tinta en un papiro, impresiones con una cuña en una tableta de arcilla o con una varita en la arena, etc.

—Los esquemas conceptuales producidos por la actividad matemática forman un estrato (que llamaremos "lo ya matematizado"), solo identificable como tal una vez que haya servido de base a la producción de un nuevo estrato conceptual (que llamaremos "lo nuevo matemático" en ese momento histórico de la producción matemática). A su vez, "lo nuevo matemático" puede convertirse en "lo ya matematizado" respecto a una ulterior producción conceptual matemática, formándose así una serie de estratos conceptuales superpuestos.

El Desarrollo de la Teoría de Grafos.

Pero no sigamos hablando en abstracto. Estudiemos un ejemplo de producción matemática más reciente que la producción de los conceptos básicos de la aritmética y la geometría, cuya prehistoria solo podemos reconstruir de manera muy hipotética. Estudiemos una de las pocas ramas de las matemáticas que tienen una fecha de nacimiento bien definida: podemos situar en 1736 el nacimiento de la disciplina matemática llamada Teoría de Grafos, con la publicación en las Actas de la Academia de Ciencias de San Petersburgo (hoy Leningrado) del primer trabajo sobre esta materia.

Este crucial trabajo matemático se debe al suizo Leonardo Euler (1707-1783), nacido en Basilea e invitado desde los veinte años como profesor a la Academia de San Petersburgo. Enseñó en Berlín de 1741 a 1766, año en que volvió a San Petersburgo, en donde permaneció hasta su muerte.

La fundación de esta nueva disciplina matemática comenzó por una actividad bastante poco matemática: los paseos de los habitantes de Königsberg (hoy Kaliningrado) por las riberas, islas y puentes de la ciudad. Por esta villa prusiana pasaba Euler en sus viajes de Berlín a San Petersburgo, y él y sus amigos recorrían esos mismos puentes y avenidas por donde poco después se pasearía otro hombre genial, Immanuel Kant (1724-1804), quien tenía apenas doce años en la fecha de la publicación del trabajo de Euler sobre los puentes de Königsberg.

Veamos un mapa esquemático de la ciudad, construida sobre la confluencia del Nuevo y el Viejo Pregel: [2] (Figura 1).

Era apenas natural que los amigos de Euler quisieran hacer variaciones sobre sus recorridos matinales. Era apenas natural que cada uno de ellos deseara estar de nuevo en su casa al final del paseo. Surgió la pregunta de si era posible recorrer una sola vez todos y cada uno de los puentes, y regresar al punto de partida.

---

[2] El esquema está tomado del mapa de la Enciclopedia Espasa (vocablo Königsberg), de fines del S. XIX. Allí se observa por lo menos un puente adicional a la izquierda del diagrama (donde se encuentra la palabra "Pregel"). Este puente fue construido por la municipalidad de la ciudad a raíz precisamente del estudio de Euler. Con ese puente adicional sí es posible hacer un recorrido que parte de la catedral, recorre una sola vez todos y cada uno de los puentes, y termina en la zona interfluvial D. Posteriormente este puente fue bautizado en honor a Kant "Philosophersdamm", La Calzada (o Dique) del Filósofo.

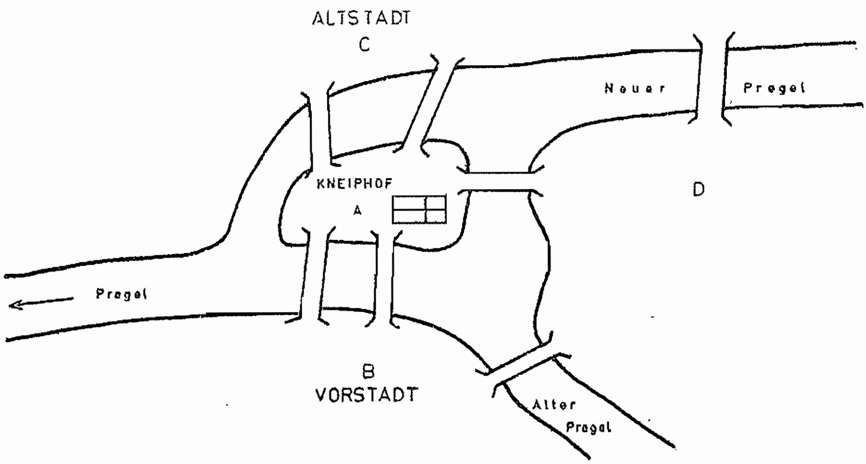


Figura 1: Los puentes de Königsberg.

Después de varios intentos de encontrar una ruta que no omitiera ningún puente, pero que tampoco repitiera ninguno, la frustración los llevó a proponer el problema a Euler. El trabajador matemático empezó a transformar el material que se le proporcionó.

Este es un caso muy claro en el cual la producción matemática parte de unos primeros conceptos como "recorrido", "punto de partida", "punto de llegada", "una sola vez", "repetición", "omisión", conceptos que no son en sí propiamente matemáticos. Solo el trabajo matemático de Euler permite hoy, desde un estadio ulterior de formación simbólico-conceptual, considerar esos conceptos como una "primera matematización" del problema del paseo por los puentes, matematización que dará lugar, a través del trabajo matemático, a nuevos productos de la producción matemática, que constituyen "lo nuevo matemático" a ese nivel. Esos productos serán los conceptos de "vértice", "arco", "grafo", "unicursalidad", "grado de un vértice", etc. Veamos rápidamente cómo se forman esos conceptos.

El primer punto de importancia es notar que la formación de los primeros conceptos (recorrido, punto de partida, punto de llegada, etc.) no es semejante a la formación del concepto de "puente" según las teorías del conocimiento de corte más clásico. No se trata de observar diversos objetos que lleven el nombre de "puentes", para abstraer una propiedad o constelación de propiedades comunes a todos ellos, que formen el concepto de puente. No puede pensarse en nuestro ejemplo euleriano en una serie de objetos materiales de los cuales se obtenga un "eidos" o un "universal". La pista para buscar en otra dirección está dada en los estudios de Piaget sobre la primacía de la actividad en la construcción de los conceptos infantiles. Al hablar de recorrido, salida, llegada, se maneja un esquema sensorio-motriz, que es repetible en un sentido diferente al de la repetibilidad de objetos materiales tomados de un mismo modelo o ejemplar. Es una repetibilidad activa, que se refiere a la ejecución de "la misma acción", en donde la mismidad es de un tipo enteramente diferente a la semejanza entre objetos.

Esta primera noción —si no se le quiere llamar todavía concepto— del recorrido de un camino, puede representarse por el trazo de un lápiz sobre el papel, o de una tiza sobre el tablero, o de una varita sobre el suelo arenoso. También en ese trazo hay acción, hay recorrido, hay camino. Y la huella de ese recorrido quedará como material simbólico para ayudar a la reflexión y a la experimentación sucesiva.

Con el trazado de esas marcas se traslada el problema de tener que hacer recorridos relativamente largos y de considerable gasto energético, al fácil ejercicio de efectuar recorridos breves que apenas necesitan un mínimo de energía para apoyar y desplazar el lápiz, la tiza o la varita, y que después de ese primer trazado material, necesitan todavía menos energía para poder repetir ópticamente los mismos recorridos.

Nótese que el esquema sensorio-motriz del recorrido se repite en el trazado material activo, y en el trazado óptico de las huellas previamente marcadas. La importancia de estos trazados ópticos en la percepción de las formas y las medidas ha sido suficientemente investigada por Piaget y sus colaboradores en los casos de ilusiones perceptuales, para el análisis de las cuales resulta crucial la frecuencia de encuentros de la vista con la marca (o más precisamente, de la imagen retiniana con la fóvea).

La permanencia y repetibilidad del esquema sensorio-motriz en los trazos, permiten derivar de ellos algunas conclusiones válidas para cualquier recorrido. Así, la huella del trazado se convierte en un tipo de representación simbólica que no solo permite una permanencia, sino una fácil repetibilidad física o imaginativa, así como una manipulación y experimentación que serán la base de la producción de nuevos conceptos.

Analicemos esas marcas o huellas como representación simbólica de los recorridos. Podemos observar que el "punto de partida" y "de llegada" aparecen solo como construcciones mentales. En la huella no puede distinguirse un "punto" primero y uno último; estos serían indiscernibles empíricamente, pues en un trazo siempre estarán representados por una superficie cubierta por un sinnúmero de granitos de grafito, carbonato cálcico, etc., y en el caso del trazo en la arena más bien por la *ausencia* de granitos de arena en los sitios en donde se bajó o se levantó la varita. Pero una vez reconocido el carácter de construcción conceptual de esos "puntos de llegada o de salida", sí es posible representarlos por medio de "puntos" gruesos en el papel, así como se representa el recorrido por medio de un trazo un poco menos grueso sobre el mismo papel:

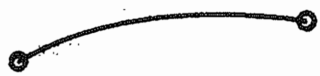


Figura 2: Representación del recorrido y los puntos de salida y de llegada del mismo.

A esos puntos nada matemáticos se les suele llamar "vértices", y al trazo intermedio "arco". Propiamente hablando, deberíamos decir que esos puntos representan la construcción conceptual designada por la palabra "vértice", y los trazos la construcción conceptual designada por la palabra "arco".

Podría discutirse si esos puntos inicial y final pertenecen a un recorrido dado o no. Podría en efecto construirse el concepto de un recorrido que incluya esos dos puntos ("arco cerrado"), y también el de un recorrido que no los incluya ("arco abierto"). Ambos han sido fecundos en el análisis y en la topología.

La repetida experimentación con trazos en el plano de la hoja de papel permite notar que ciertos recorridos encierran regiones del plano, mientras que otros no lo hacen:

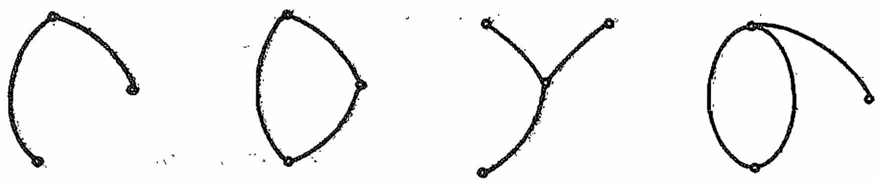


Figura 3: Recorridos que dividen y no dividen el plano.

Esta experimentación lleva a la construcción de los conceptos de recorrido limitante y no limitante (que curiosamente, en el caso de trayectorias curvas en una superficie, da lugar al concepto de curva simple cerrada y abierta, en donde las palabras "cerrado" y "abierto" tienen un sentido diferente al explicado arriba).

Puede pensarse también la distinción entre el recorido en un sentido o en otro, sentido que no puede discernirse en las huellas mismas: esa distinción pertenece al esquema activo. Puede pues fijarse la atención en el sentido del recorrido, para lo cual se representa éste con una punta de flecha en punto de llegada, o puede tomarse el recorrido con prescindencia del sentido en que se describió, para lo cual se omiten las puntas de flecha:

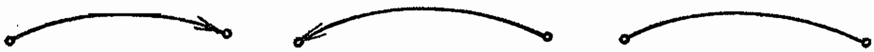
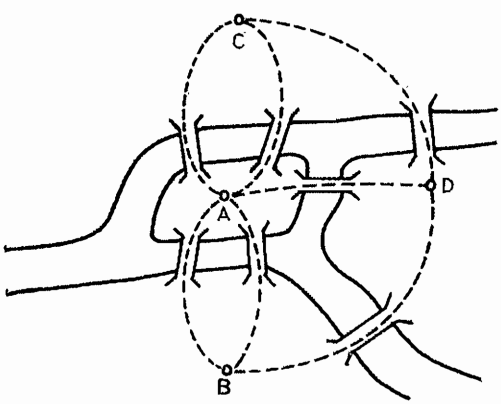


Figura 4: Representación del sentido del recorrido.

Estas observaciones llevan a la construcción de los conceptos de arco orientado y arco no-orientado.

Estos puntos de libertad de opción en la producción matemática son de capital importancia. En las encrucijadas de este tipo se encuentra la divisoria de aguas entre diversas disciplinas matemáticas; una elección puede resultar infecunda, mientras que otra puede llevar a un alud de nuevos resultados; en cualquier caso, allí aparece el carácter activo y creativo de la producción matemática. Es interesante para nuestro propósito notar que la fecundidad de una decisión en un sentido o en otro no se debe necesariamente a que se incluya o no más información: al prescindir del sentido del recorrido se pierde información, pero se posibilita el avance en el estudio de las representaciones de vértices y arcos, representaciones que llamamos "gráficos", a partir de los cuales se elabora el concepto general de grafo y la teoría de grafos. En seguida veremos otro ejemplo fecundo de olvido de información.

Pero volvamos a los puentes de Königsberg, que esquematizamos en la Figura 1. En ese mapa observamos que los siete puentes conectan la isla principal (Kneiphof, que denotamos con la letra A), en la cual se encuentra la catedral, con la zona interfluvial D y las dos riberas: la izquierda (Vorstadt, B) y la derecha (Altstadt, C).



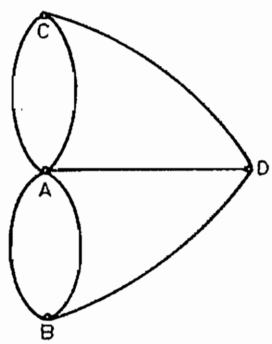


Figura 5: Dos reducciones progresivas del recorrido por los puentes.

Es claro por el esquema que las calles de estas zonas no importan para los recorridos por los puentes. Las riberas del río y las costas de la isla desaparecen, y podemos reducir las cuatro zonas a cuatro puntos que representan las encrucijadas en donde es posible dirigirse a uno u otro puente, y de los que parten tantos trazos como puentes salgan de la zona respectiva: (Figura 5).

Una vez trasladada la disposición de las regiones y los puentes al esquema simbólico, aparece claramente que ni la longitud ni la forma recta o curva de los trazos interviene en la posibilidad de recorrer todo el grafo así dibujado con un solo trazo del lápiz. Se reconoce que la clave en la solución del problema es el estudio de los vértices, como puntos de intersección de los arcos que representan caminos posibles. Con la producción de los conceptos necesarios y de las representaciones simbólicas convenientes, ya hay material suficiente para una experimentación sobre los gráficos. Ensáyese por ejemplo a recorrer los siguientes sin levantar el lápiz del papel:

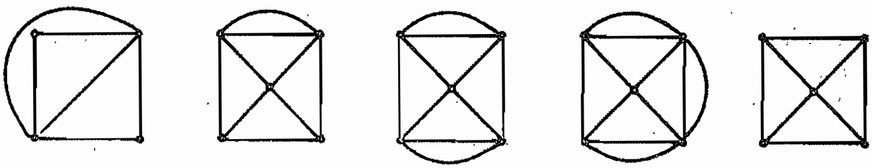


Figura 6: Dispositivos experimentales para la teoría de grafos.

La distinción entre grafos unicursales (que pueden recorrerse íntegramente de un solo trazo sin repetir ningún arco) y grafos multicursales, es ya productible. Nótese que la repetición de vértices no es importante para la unicursalidad. ¿Qué pasa si se prohibe la repetición de vértices?

Hay pues un cierto tipo de experimentación activa, análoga a la que se realiza en las ciencias naturales, que prepara la producción del concepto que permitirá resolver el problema. Aquí, como tampoco en las ciencias naturales, no basta la repetición ni la observación para que "surja" el concepto: hay que crearlo activamente.

En este caso se empieza por eliminar las características que no permiten progresar en la solución del problema; se aprecia la necesidad de analizar los arcos que salen o llegan a un vértice. Se produce el concepto de "grado de un vértice", que asigna a ese vértice el número de arcos que inciden con él.

La experimentación y la reflexión van mostrando que siempre que se entra a un vértice diferente del punto de salida o de llegada, hay que tener otro arco por donde seguir si se quiere regresar al punto de partida. Puede pues omitirse cualquier vértice intermedio de grado 2.

Estas verificaciones llevan a considerar el grado de un vértice como un exceso de información: basta saber la paridad del vértice, esto es, si con él incide un número par o impar de arcos. Si hay un vértice impar, éste tiene que ser la salida o la llegada, pues de lo contrario se quedaría un arco sin recorrer. Si hay dos vértices impares, éstos tienen que ser la salida y la llegada: el gráfico puede recorrerse de un solo trazo (grafo unicursal), pero no podrá regresarse al punto de partida. Si hay más de dos vértices impares, el grafo no será unicursal, y habrá que descomponerlo en tantos grafos unicursales como parejas de vértices impares tenga. ¿Podrá haber un número impar de vértices impares?

La teoría de grafos iniciada por Euler se ha desarrollado ampliamente en nuestro siglo, por la importancia que tiene para las conexiones eléctricas, el diseño de artefactos electrónicos, el cálculo de tareas complejas e interdependientes (gráficas de Gantt, CPM, PERT), la planificación de itinerarios ("problema del agente viajero"), etc. [3].

Pero más que las aplicaciones, tan importantes por su impacto en la infraestructura económica y por su fecundidad en la producción de nuevas situaciones que exijan nuevos conceptos y lleven a nuevas matematizaciones, nos interesa en este momento la continuación del camino de la elaboración de "lo nuevo matemático" a partir de "lo ya matematizado". Estudiemos rápidamente algunos aspectos del proceso que ha seguido esa matematización a partir de los grafos.

En un gráfico dado, tenemos la posibilidad de numerar los vértices en cualquier orden, asignándoles a cada uno un número natural a partir del uno o del cero:

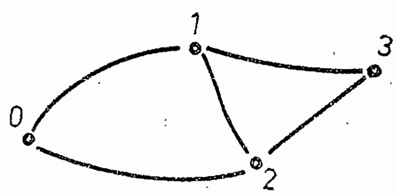


Figura 7: Asignación de números a los vértices de un grafo.

Se reconoce que las parejas de números representan arcos:

(0,1); (1,3); (0,2); (2,3); (1,2).

Esta asignación de rótulos a los arcos elimina la posibilidad de que haya arcos distintos entre dos vértices dados. Para conservar esa

[3] CPM y PERT son las iniciales de "Critical Path Method" (Método del Sendero Crítico) y "Program Evaluation and Review Technique" (Técnica de Evaluación y Revisión de Programas). Se refieren a programas para computadores que permiten diseñar y programar las diversas actividades interdependientes que intervienen en un proyecto de gran envergadura.

posibilidad, se numeran también los arcos, y se estudia la relación entre arcos y vértices a través de matrices de incidencia [4].

Una lista ordenada de números puede considerarse como un camino compuesto por recorridos sucesivos de arcos simples. Para ello podemos definir una "suma" o "composición" de arcos así:

$(k,l) + (m,n) = (k,l,n)$ en caso de que $l = m$.

$(k,l,\ldots,m) + (n,p,\ldots,q) = (k,l,\ldots,m,p,\ldots,q)$ en caso de que $m \doteq n$.

En el ejemplo de la Figura 7:

$(0,1) + (1,3) = (0,1,3)$

$(0,1,3) + (3,2,0) = (0,1,3,2,0)$.

A diferencia de la suma aritmética, esta composición no está definida sino en el caso en que el punto de llegada del primer arco sea el mismo punto de salida del segundo. Además, no es una operación conmutativa como la suma aritmética; por ejemplo, el resultado de $(1,3) + (0,1)$ no está ni siquiera definido, y por lo tanto no es lo mismo que el resultado de "sumar" en orden diferente $(0,1) + (1,3)$.

Estas dificultades llevan a definir otra "suma" que sí sea conmutativa y esté definida para cualquier pareja de arcos; esa nueva "suma" permite definir "cadenas" de arcos, cadenas de vértices y de regiones, y desarrollar la teoría de grupos de cadenas, de grupos de ciclos (cadenas cerradas), de grupos de fronteras (cadenas limitantes) y de grupos de homología. Estos grupos son la base de la topología antes llamada combinatoria y hoy topología algebraica, porque predominan en ella los métodos algebraicos, desarrollados en las teorías puramente algebraicas de grupos y módulos.

La topología algebraica permite probar un hecho curioso, publicado por el mismo Euler y conocido ya por Descartes: si se cuenta el número de vértices, V, de un gráfico en el plano; se le resta el número de arcos, A, y se le suma el número de regiones planas limitadas [5] por esos arcos y vértices, R, se obtiene siempre uno:

$$V - A + R = 1.$$

---

[4] En una matriz de incidencia se coloca un cero en la intersección de la i-ésima fila con la j-ésima columna, si el arco a_i no incide en el vértice v_j; se coloca un uno en caso de que sí haya incidencia.

El lector notará además que la asignación de parejas ordenadas de números como rótulos de los arcos, obliga a distinguir entre el arco recorrido del vértice 0 al 1, arco $(0,1)$, y el arco recorrido en sentido contrario, arco $(1,0)$. Si se quiere prescindir del sentido de recorrido del arco, deben utilizarse parejas desordenadas, por ejemplo $\{0,1\}$, pues

$$(0,1) \neq (1,0)$$

por definición de pareja ordenada, pero

$$\{0,1\} = \{1,0\}$$

por el axioma de extensión de la teoría de conjuntos.

[5] Nótese que sólo se cuentan las regiones limitadas efectivamente por los trazos del gráfico, y no la región ambiente o exterior al gráfico, que se extiende ilimitadamente en el

Esta relación puede comprobarse empíricamente en los gráficos de las Figuras 5, 6 y 7.

En esta etapa de la "algebrización" de los grafos, se obtienen nuevos conceptos y resultados, en los que el material previo ("lo ya matematizado") lo constituye la teoría de grafos, junto con otros resultados más o menos dispersos del "Analysis Situs" previsto ya por Leibnitz.

Los nuevos conceptos y resultados ("lo nuevo matemático") constituyen la topología algebraica, tal como se desarrolló a fines del siglo pasado y comienzos del presente, y que continúa siendo expandida rápidamente.

A su vez, la topología algebraica, junto con otros resultados de la lógica, la teoría de conjuntos y el álgebra abstracta, sirve de material ya matematizado a una etapa ulterior de matematización. Un análisis de los métodos, los símbolos y los conceptos de estas disciplinas llevó a la construcción de los conceptos de objeto, morfismo, composición de morfismos, functores y transformaciones naturales, categorías y precategorías. Estos conceptos, "lo nuevo matemático" desencadenaron el vertiginoso desarrollo de una de las áreas de mayor generalidad en la matemática moderna, y una de las herramientas más finas en la investigación topológica, algebraica y lógica: la teoría de categorías.

Esta "categorización" de la matemática, que no tiene aún treinta años, es todavía esotérica aun para muchos matemáticos, y su complejidad nos obliga a omitir su presentación dentro de los límites de esta ponencia. Anotemos solamente que fue la "suma" no conmutativa que intentamos definir primero, y que parecía inservible por no estar totalmente definida, la que llevó a la conceptualización de la composición de morfismos. Pero nuestro objeto no era el de profundizar en estos conceptos de la matemática moderna, sino el de proporcionar el mínimo de material que permitiera captar la estratificación conceptual que se presenta en el tipo de actividad productiva teórica característico de la labor de los matemáticos creativos. A cada nivel u "oleada" de actividad creativa, el material matemático ya existente se presenta como eso mismo, como "material", que se sitúa como "lo ya matematizado" a un nivel histórico dado, relativamente a los resultados de esa nueva producción matemática: "lo nuevo matemático" a ese nivel.

plano. Si se cuenta también esta región, la fórmula es

$$V - A + R = 2,$$

que es válida también para los poliedros convexos y los gráficos que pueden trazarse sobre la superficie de una esfera. Para otras superficies hay que tener en cuenta un número adicional, que hoy llamamos precisamente "característica de Euler" de dicha superficie.

Se trata, pues, de una distinción relativa y dialéctica, que se va superando a cada nivel, y que hace resaltar la prioridad de la actividad del matemático sobre el material previamente dado, así como la historicidad y el carácter experimental (en sentido análogo) de la producción matemática.

A estas conclusiones llega el grupo de Pierre Raymond a través del estudio de la historia de las grandes producciones matemáticas del pasado, y de los conceptos y nociones que precedieron a esos desarrollos. Por una vertiente aparentemente no relacionada con la anterior, el grupo de investigadores alrededor de Jean Piaget han investigado pacientemente la "génesis" de los conceptos físicos, matemáticos y lógicos en los niños, y han llegado a conclusiones muy sólidas sobre el carácter operacional y experimental de esa génesis, sobre la ordenación y la sucesión de las estructuras de clasificación, seriación, cuantificación, agrupamiento y grupo, hasta llegar al dominio de las operaciones hipotético-deductivas hacia los 14 o 15 años. Los estudios históricos y los estudios genéticos muestran nuevos e insospechados casos de paralelismo entre la filogénesis y la ontogénesis.

Piaget descubre también en cada etapa una primacía de la actividad del niño sobre los objetos, sobre las representaciones, sobre las operaciones mismas (ya interiorizadas, reversibles y sistematizadas). Descubre cómo se forman los conceptos a propósito de las actividades mismas, más bien que a propósito de los objetos sobre los que se actúa. Descubre que hay una estratificación en etapas que siguen un orden inalterable, aunque los períodos de desarrollo varíen con los individuos y con las culturas. No se puede por ejemplo dominar el grupo INRC hasta no dominar por lo menos dos agrupamientos [6]. Y éstos no se pueden establecer hasta que no se dominen las clasificaciones y seriaciones elementales. El paralelismo es sorprendente.

Conclusiones.

Después de examinar desde el punto de vista de Raymond algunos productos concretos (que para muchos parecerán muy "abstractos") de la producción matemática de los siglos XVIII al XX, y de verificar su coherencia con las observaciones de la psicología genética de Piaget, podemos refinar un poco las formulaciones de la introducción:

Tesis 1. La producción matemática participa del carácter experimental de la actividad de producción científica de las ciencias llamadas naturales, y está también determinada prioritariamente por la praxis.

[6] Sobre grupos y agrupamientos véase [B68], págs. 215-220. Sobre clasificaciones y seriaciones trata casi todo el libro [P75].

Tesis 2. Los productos de la producción matemática son esquemas conceptuales abs-primidos o abs-cudidos de esquemas operativos previos, provenientes de la actividad sobre conceptos y representaciones simbólicas internas o externas previamente elaboradas.

Tesis 3. Los productos de la producción matemática se estratifican en forma de estratos conceptuales superpuestos, distinguiéndose en la transición de una capa a otra "lo ya matematizado" de "lo nuevo matemático", lo que a su vez es (o puede ser) "lo ya matematizado" con respecto a una ulterior producción conceptual matemática.

Tesis 4. Esta estratificación conceptual permite una descripción histórica de la producción matemática, que a través de su esquematismo de tipo geológico (por no decir "arqueológico"), hace resaltar el carácter esencialmente histórico y prioritariamente práxico de la producción teórica en las disciplinas matemáticas.

La coincidencia de las investigaciones histórico-filosóficas del grupo de Pierre Raymond con las investigaciones sicológico-genéticas del grupo de Jean Piaget, refuerzan la convicción del autor de que el avance en la epistemología de las matemáticas puede proporcionar material de excepcional interés para el avance de las demás epistemologías.

BIBLIOGRAFIA:

[B68] BETH, E. W. - PIAGET, J.
Relaciones entre la Lógica Formal y el Pensamiento Real.
Madrid: Editorial Ciencia Nueva, S. L., 1968.
(Original francés: 1961).

[H76] HOUZEL - OVAERT - RAYMOND - SANSUC
Philosophie et Calcul de l'Infini.
Paris: Maspero, 1976.

[I72] INHELDER, B. - PIAGET, J.
De la Lógica del Niño a la Lógica del Adolescente.
Buenos Aires: Ed. Paidós, 1972.
(Original francés: 1955).

[P49] PIAGET, J.
Traité de Logique. Essai de Logistique Opératoire.
Paris: A. Colin, 1949. [Dunod, 1972, 2e édition].

[P50] PIAGET, J.
"Introduction à l'Épistémologie Génétique". T. I. *La Pensée Mathématique.*
Paris: P. U. F., 1950.

[P75] PIAGET, J. - INHELDER, B.
Génesis de las Estructuras Lógicas Elementales (3ª edición).
Buenos Aires: Ed. Guadalupe, 1975.
(Original francés: 1959).

[R74] RAYMOND, P.
Le Passage au Matérialisme.
Paris: Maspero, 1974.

[R75] RAYMOND, P.
L'Histoire et les Sciences.
Paris: Maspero, 1975.

[R75a] RAYMOND, P.
De la Combinatoire aux Probabilités.
Paris: Maspero, 1975.

[R77] RAYMOND, P.
Matérialisme Dialectique et Logique.
Paris: Maspero, 1977.