ESTADO ACTUAL DE LA LOGICA *

ALFREDO TRENDALL

—La Unentscheidbarkeit del teorema de Gödel, mostrando la imposibilidad de cualquier sistema formal cerrado, no podría considerarse como el reflejo gnoseológico de una ontología de estratos a la manera de Hartmann?

NICOLAS GOMEZ, *Notas*, VOL. III, MS. INED.

— I —

INTRODUCCIÓN

1.1—Tema:

La más reciente historia de la lógica es la escrita por los profesores W. y M. Kneale, de la Universidad de Oxford, con el título: *The Development of Logic* y publicada por la misma universidad en el presente año. El capítulo final, de este voluminoso trabajo, muestra este hecho: la lógica atraviesa en la actualidad una crisis [1]. Ya, en 1949, H. Weyl lo había destacado, aunque sin la gravedad que hoy tiene [2]. Y, más antes, en 1941, J. Ortega lo previó así: "...se creía que hay, en efecto, un pensamiento que es lógico plenamente y sin reservas. El hombre occidental estaba convencido de poseer con él un edificio de aristas rigorosas que contrastaba con la selva confusa de todos los demás modos de pensar. Pero he aquí que hoy empezamos a caer en la cuenta de que no hay tal pensamiento lógico. Mientras bastó la tosca teoría que desde hace veintitrés siglos se llama Lógica pudo vivirse en la susodicha ilusión. Pero desde hace tres generaciones ha acontecido con la logicidad lo que con otros grandes temas de la ciencia: que se les ha ido, de verdad, al cuerpo. Y cuando se ha querido en serio construír lógicamente la Lógica

---

* Conferencia dictada el 14 de noviembre de 1962, en el Aula Máxima de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá, dentro del ciclo *Studium Generale* —organizado por esta Facultad y el cual estuvo a cargo de profesores, de varias facultades, que hablaron acerca del estado actual de sus respectivas disciplinas—. Como se trataba de una exposición ante un público heterogéneo, omitimos todo simbolismo y empleamos unos pocos tecnicismos, imprescindibles para no desfigurar el tema. En el texto leído eliminamos las notas, ya que el lugar de éstas se encuentra en el texto escrito —el cual es rigurosamente elemental—.

1 Cap. XII, págs. 689-742. Igualmente I. M. BOCHENSKI, *Formale Logik*, München, 1956, págs. 472-476, termina la parte de la historia de la lógica en Occidente, con la enunciación de lo que, aquí, nos aparecerá como la esencia de la crisis.

2 *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, 1949, pág. 219.

—en la logística, la lógica simbólica y la lógica matemática— se ha visto que era imposible, se ha descubierto, con espanto, que no hay concepto última y rigorosamente idéntico, que no hay juicio del que se pueda asegurar que no implica contradicción, que hay juicios los cuales no son ni verdaderos ni falsos, que hay verdades de las cuales se puede demostrar que son indemostrables, por tanto, que hay verdades ilógicas" [3].

En qué consiste tal crisis —que es lo actual de la lógica— es el tema de esta conferencia.

1.2—Desarrollo:

Para comenzar a esclarecer dicha crisis, es necesario saber su historia. Tenemos, pues, primero: Génesis de la crisis.

Pero es un error creer que ésto basta. Al contrario, un esclarecimiento ulterior nos llevará a inquirir por la estructura sistemática de la crisis, más allá de su alojamiento en un momento histórico determinado [4]. Entonces, segundo: Constitución de la crisis.

Al final, el esclarecimiento terminará haciéndonos ver los problemas que ocasiona esa estructura sistemática y trans-histórica de la crisis de la lógica. Por ende, tercero: Ejercicio de la crisis.

— 2 —

Génesis de la Crisis

2.1—Origen remoto en Aristóteles:

La palabra "lógica", para designar el conjunto de los problemas del pensar correcto y sus relaciones, a través de los conceptos, con la realidad y los vocablos, es tardía en la civilización griega [5]. A pesar de ésto, la cuestión a la cual apunta, estaba, ya, en Aristóteles, con el nombre de "analí-

---

3 *Apuntes sobre el pensamiento, su teurgia y su demiurgia* en *Logos, Revista de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Buenos Aires,* 4º trimestre (1941). (Obras Completas, Vol. V, Madrid, 1961 [5], págs. 527-528). En las *Rencontres Internationales de Geneve,* 1951, Ortega, pronunció una disertación titulada *Pasado y porvenir para el hombre actual.* (Obras Completas, Vol. IX, Madrid, 1962, pág. 663), en donde se señala explícitamente el punto donde reside la crisis de la lógica.

4 Fue PLATON, *Phileb.*, 54 a, quien enseñó que en todo asunto hay que considerar dos aspectos, distintos pero inseparables: la génesis *(génesis)* y la substancia *(ousía)*, estando la primera en función de la segunda; tesis seguida por ARISTOTELES, *Hist. Animal.*, 640 a, 18. Cf. P. VALERY. *Premierè leçon du cours poètique*, Paris, 1937 (Oeuvres, Vol. I, Paris, 1937, pág. 1.349), quien une prodigiosamente ambos elementos, al decir que toda obra del Espíritu es valiosa porque es la consumación de un acto.

5 En el siglo I, A. J., CICERON, *Tusc. Disput.*, IV, XIV; *De Fin.*, I, VII, 22; *De Fat.*, I, I, nos da la noticia de que tal significado, de la palabra "lógica", era ante todo estoico. Hacia los comienzos del Siglo III, D. J., ALEJANDRO DE AFRODISIAS, *Ad. Anal.*, pr. f 2, adjudica tal significado al círculo peripatético. Modernamente, C. PRANTL, *Geschichte der Logik im Abendlande,* Band I, Leipzig, 1855, pág. 535, cree que la palabra "lógica" adquiere un carácter técnico entre los peripatéticos. En el siglo XX, V. ARNOLD, *Roman Stoicism,* London, 1911 (reimp. 1958), pág. 128, afirma que tanto los peripatéticos como los estoicos adoptaron la palabra "lógica" para significar una de las tres ramas de la filosofía, pero que los primeros la entendieron como

tica" [6]. Y es, precisamente, en esta analítica aristotélica donde la lógica griega plantea una doble fundamentación que hace posible que, siglos más tarde, surja la crisis actual.

Veamos cómo:

Primera fundamentación: La lógica, o analítica aristotélica, está subordinada a la realidad. Siendo el medio por el cual el hombre aprehende, teórica o contemplativamente, la esencia de las cosas. Por eso se la llamó *Organon* [7]. La forma exclusiva, de hacerlo, es la adoptada por la mente cuando llega al juicio o *lógos apophantikós*. El cual consiste en la síntesis de un sujeto iluminado por un predicado gracias a la cópula "es", y donde se exhibe la esencia aprehendida de una cosa, o sea, su verdad [8].

Lo anterior, confiere al juicio una verdad intrínseca al propio juicio, porque es allí —en su interior— donde está exhibiéndose la esencia de una cosa. Es una verdad que cada juicio aprehende de las cosas.

Luego la primera noción de verdad, para Aristóteles, es la de verdad intrínseca; fundamentada en una aprehensión de la realidad y presente en todos los juicios.

Segunda fundamentación: La lógica, o analítica aristotélica, es un sistema de juicios, cada uno con su verdad intrínseca, dentro del cual se puede demostrar que unos juicios se infieren necesariamente de otros [9], hasta llegar a los juicios llamados "primeros principios" los cuales son indemostrables [10]. Puesto que de ser demostrables se tendrían que inferir

---

una "introducción a la filosofía", mientras que "los estoicos insistieron en que era una parte de la filosofía misma". En nuestros días, W. D. ROSS, *Aristotle, a complete exposition of his Works & Thought*, London, 1953⁵, edit. Meridian Books, New York, 1959 (reimp. 1961), pág. 25, al volver sobre este punto, opina que es "Alejandro el primer escritor que emplea *logiké* en el sentido de lógica". Ya en Platón (cf. F. ASTIUS, *Lexicon Platonicum*, Vol. II, Lipsiae, 1836 (reimp. 1956), pág. 251) y Aristóteles (cf. H. BONITZ, *Index Aristotelicus*, Berolini, 1870 (reimp. 1960), pág. 432 a-46 b, 11), es empleada la palabra "lógica" con un significado muy secundario y ocasional que poco tiene que ver con el más preciso y básico que tendrá luego. M. POHLENZ, *Die Stoa, Geschichte einer geistigen Bewegung*, Band II, Göttingen, 1955², pág. 35, ha investigado lo que podría llamarse la prehistoria no de la palabra "lógica", sino del significado de la misma en la etapa griega, al señalar cómo el concepto de *orthós lógos* se remonta a PIND., *Ol.*, 8, 24 (con el significado de "espíritu correcto"), *Phyt.*, 3, 98 (con el significado de "corazón recto"), *Phyt.*, 10, 68 (con el significado de "alma recta"), a PLAT., *Phaid.*, 73, a (con el significado de "juicio correcto") y a ARIST., *Eth. ad Nicom.*, 1.103 b, 33 (con el significado de "principio correcto").

6 *Reth.*, 1.359 b, 10, aquí se incluye a la "ciencia analítica" dentro de la Retórica, cf. *Analyt. Post.*, 84 a, 8. I. M. BOCHENSKI, *Ancient Formal Logic*, Amsterdam, 1951 (reimp. 1957), pág. 25, encuentra otra manera de Aristóteles para referirse a lo mismo a que alude la analítica: "lo que se sigue de las premisas", (cf. *Analyt, Post.*, 88 a, 30).

7 Según W. D. ROSS, *op. cit.*, pág. 25, fue Alejandro de Afrodisias quien le dio este nombre a la lógica y, únicamente, en el Siglo VI, se usó con referencia "a la colección de las obras lógicas de Aristóteles".

8 ARIST., *De Interpret.*, 17 a, 3.

9 ARIST., *Analyt. Post.*, 73 a, 24.

10 ARIST., *op. cit.*, 76 a, 31. Así es posible impedir un movimiento de retroceso que invalidaría a los juicios con respecto a su primigenia unión con la realidad, porque iría hasta el infinito, al inferir un juicio de otro más anterior, sin nunca acabar y sin que ningún juicio —por fin— se apoyara no en otro sino en las cosas mismas.

de otros principios aún más primeros, con lo cual dejarían de ser "primeros principios" y se convertirían en "segundos principios". De esta manera se tiene un sistema deductivo que, en Aristóteles, produce el silogismo [11].

Este sistema deductivo agrega a la verdad intrínseca de los juicios —aprehendida de las cosas— un nuevo tipo de verdad extrínseca, en la medida en que un juicio es verdadero si es posible demostrar que proviene de los "primeros principios". Es una verdad que sólo tienen algunos juicios; a saber: aquellos demostrables a partir de otros. Como es obvio, los juicios que forman los "primeros principios" carecen de este nuevo tipo de verdad extrínseca y apenas poseen verdad intrínseca. De aquí que la validez de los "primeros principios" esté en que son juicios en los cuales se exhibe la esencia de una cosa, su verdad; o, como enseña Aristóteles: radica en que son juicios basados en una aprehensión y no en una demostración [12].

Luego la segunda noción de verdad, para Aristóteles, es la de verdad extrínseca; fundamentada en una demostración dentro de un sistema deductivo y presente en sólo aquellos juicios que se pueden inferir de otros anteriores que únicamente son intrínsecamente verdaderos. Estando, así, la verdad extrínseca justificada por la verdad intrínseca.

¿En qué lugar, de esta doble fundamentación de la lógica griega, se posibilita la crisis?

Por una parte: el rechazo de la primera noción de verdad en Aristóteles, la de verdad intrínseca del juicio, fundada en la aprehensión de la esencia de las cosas, es en el fondo la causa de la crisis actual de la lógica. De

---

11 ARIST., *Analyt. Prior.*, 24 b, 18. Cf. *Analyt. Post.*, 71 b, 17-72 a, 8, texto en el cual entiende Aristóteles por "demostración" un "silogismo científico" cuyas premisas son "verdaderas, primeras e inmediatas". Son verdaderas no porque las garanticen otras premisas previas, sino porque las garantiza, negativamente, la realidad, al no entrar —las propias premisas— en conflicto con los hechos y, en consecuencia, ser cognoscibles; son primeras porque, de otro modo, las tendríamos que conocer mediante la demostración (la cual supone esas premisas); y son inmediatas porque no tienen otras premisas detrás de sí. El hecho de que las premisas del silogismo científico no sean demostrables, no quiere decir, para Aristóteles, que no sean válidas —puesto que, como lo dirá más adelante, 72 b, 18, la validez científica no siempre tiene que ser demostrativa—.

12 *Op. cit.*, 76a, 31-33. En este sitio —clave para la intelección del doble fundamento de la lógica griega— Aristóteles dice, en forma directa, cuál es el tipo de validez científica que no es del género demostrativo: el aprehensivo. Por tanto, las premisas del silogismo científico, que son "primeros principios", no valen demostrativamente sino aprehensivamente, pero de éstas sí se pueden inferir conclusiones valederas demostrativamente. En suma: la fundamentación demostrativa está fundada en la aprehensiva y ésta en la realidad. Lo básico, en este texto de Aristóteles, está en el verbo *lambanein.* La edición grecolatina del Renacimiento, de I. PACIUS, *Operum Aristotelis,* Vol. I, Lugduni, 1597, pág. 190, lo traduce por *intellegere;* la alemana de TH. E. ROLFES, *Aristoteles, Zweite Analytik,* Leipzig, 1922 (reimp. 1948), pág. 21, lo traduce por *annehmen;* las inglesas de G. R. G. MURE en W. D. ROSS, *The works of Aristotle,* Vol. I, Oxford, 1937² (reimp. 1955), pág. 76 a, y H. TREDENNICK, *Aristotle, Posterior Analytics,* London, 1960, pág. 69, lo traducen por *to assume.* Nosotros escogimos el verbo *aprehender* porque en él se retiene el significado técnico del *aprehendere* latino que dsempeña, en la lógica medieval, la misma función del verbo *lambanein* en Aristóteles (Cf. S. THOMAE AQUINATIS, *In Aristotelis libros Peri Hermeneias expositio,* prooem., I, [1], edit. P. Fr. R. M. Spiazzi O. P., Taurini, 1955, pág. 5).

modo que, al alejarnos de ésta, nos avecinamos más a la crisis. Que ese alejamiento sea legítimo o no, depende de lo que entendamos por "lógica". Si se trata de tomarla como *órganon* para aprehender la esencia de las cosas, o lógica metodológica, el alejamiento es un defecto. Mas si se trata de tomarla como lógica pura, el alejamiento viene exigido por la misma pureza de los objetos lógicos y tal es el sentido que en la actualidad tiene. No caigamos en el equívoco de sostener que la crisis se soluciona, por completo, volviendo a Aristóteles.

Por otra parte: en la segunda noción de verdad en Aristóteles, la de verdad extrínseca del juicio, apoyada no en la aprehensión sino en la demostración dentro de un sistema deductivo, es el sitio donde se agita, enérgicamente, la crisis actual de la lógica [13].

2.2—Origen próximo en Hilbert:

El origen próximo, de la crisis actual de la lógica, se remonta a 1893, fecha de la publicación del primer volumen de la obra de G. Frege: *Grundgesetze der Arithmetik* [14], extendiéndose hasta 1930 —inclusive—. La figura central es la de David Hilbert.

Ahora se busca una lógica pura, que descanse en sí misma, y no una lógica metodológica que descanse en la realidad (como la de Aristóteles). Movida por este propósito, la lógica moderna, durante la etapa de 1893 a 1930, realiza, partiendo de la doble fundamentación de la lógica griega, estas operaciones sucesivas:

Elimina la fundamentación de la verdad intrínseca de los juicios, que los une a las cosas, vaciándolos de sentido, transformándolos en simples fórmulas. A esta operación la denomina Hilbert: proceso de formalización [15], porque se queda con la forma de los juicios (sin sus contenidos reales).

---

13 J. D. GARCIA BACCA, *Introducción a la lógica moderna*, Barcelona, 1936, págs. 17-25, mostró la unidad original de la lógica de Occidente (griega y moderna), en lo que denominó "germen aristotélico" que radica en esta fundamentación demostrativa, puesto que hace viable captar la pura arquitectura deductiva de los juicios.

14 Jena, 1893; en el prólogo, págs. V-XXVI, Frege supera el psicologismo y anticipa la posición que tomará E. HUSSERL, *Logische Untersuchungen*, Halle, 1900-1901. Que Frege inaugure el período pre-crítico, o dorado, de la lógica moderna, es una verdad que debemos al fenómeno de haber sido destacada, con razón, desde los primeros años de este siglo, por B. RUSSELL, *The Principles of Mathematics*, London, 1903, 1937[2] (reimp. 1956), págs. 501-522.

15 *Die Grundlagen der Mathematik* en *Abhandlugen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, Vol. 6 (1928), págs. 65-85 (hay trad. esp. de F. CEBRIAN, en *Fundamentos de la Geometría*, Madrid, 1953, págs. 288-309); cf. D. HILBERT y P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, Band I, Berlin, 1934, págs. 15-17, quienes, a propósito de la primera paradoja de Zenón de Elea, hallan que los modelos matemáticos "extrapolan los hechos". Por ser decisiva esta técnica, de la formalización de Hilbert, para el desarrollo de la lógica actual, veámos, aunque sea con brevedad, cómo la exponen algunos lógicos: H. WEYL, *op. cit.*, pág. 55: "Para este propósito, él [Hilbert] tiene que formalizar las matemáticas, incluyendo la lógica, hasta que ésta llegue a ser un juego con símbolos que se mueven de acuerdo con reglas fijas, (Los símbolos no tienen significado por ser símbolos *para* cualquier cosa)"; S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam, 1952, págs. 61-62: "A Hilbert se debe, primero, en la actualidad, el énfasis de que la estricta formalización de una teoría envuelve la total abstracción del significado y cuyo resultado se llama un *sistema formal* o *formalismo* (o, algunas veces, una *teoría formal* o *matemáticas formales)*";

Acepta la fundamentación de la verdad extrínseca de los juicios, dentro de un sistema deductivo. Mientras antes, en Aristóteles, ésta se cimentaba en las cosas, a través de la verdad intrínseca de los "primeros principios", ahora pierde, por la formalización practicada, ese cimiento. Ante ésto, ¿qué hace Hilbert? Encuentra que, acerca de este nuevo sistema no de juicios sino de fórmulas —faltas de verdad intrínseca—, se pueden dar leyes que unan a unas fórmulas con otras; demostrando que de unas pocas (llamadas axiomas) se deducen otras muchas (llamadas teoremas). Pero en forma tal que jamás sea factible deducir, de los axiomas del sistema, una fórmula y su contradictoria, para que el sistema entero tenga consistencia al no incluír contradicciones. A esta operación la denomina Hilbert: proceso de meta-matematización [16].

La formalización y la meta-matematización dan un sistema deductivo puro al cual, hay que repetirlo, se le ha amputado todo asiento en la realidad. Con base en estas operaciones, Hilbert, en 1927, traza un programa de dos puntos, para obtener una lógica pura concretada en un sistema deductivo consistente. Para facilitar la intelección de este programa, démoslo inicialmente en una imagen y, en seguida, en su enunciación científica.

Se intenta concebir una sistema puro en el cual: de unas cuantas fórmulas blancas se tienen que deducir todas las demás fórmulas blancas que hay, sin que ninguna quede por fuera ni, tampoco, entren fórmulas de otro color que alterarían la nítida blancura del sistema. Y que la blancura del sistema brote originariamente del propio sistema; que el sistema sea blanco por sí mismo.

Dicho técnicamente:

Primer punto: Que todas las fórmulas del sistema deductivo puro, sean verdaderas; es decir: no contradictorias. Porque, para Hilbert, verdad es ausencia de contradicción de las fórmulas entre sí [17]. Deduciéndose de los axiomas del mismo sistema. Esto es: donde todas las fórmulas verdaderas sean teoremas.

Segundo punto: Que se pueda decidir, desde dentro del propio sistema deductivo puro, la prueba de su consistencia.

E. NAGEL y J. R. NEWMAN, *Gödel's proof.*, London, 1959, pág. 26: "El primer paso en la construcción de una prueba absoluta, como Hilbert concibió el tema, es la *completa formalización* de un sistema deductivo. Esto implica quitarle todo significado a las expresiones que aparecen dentro del sistema; ellas han de ser consideradas, simplemente, como signos vacíos". Idéntica técnica, formalizadora, maneja E. HUSSERL, *Formale und Transzendentale Logik*, Halle, 1929, pág. 43, para construír, justamente, la lógica formal cuya raíz, en vez de ser la realidad, es, a la postre, la trascendentalidad fenomenológica del sujeto. Por otra parte, esta formalización, que desconecta a la fundamentación demostrativa de la fundamentación aprehensiva, al hacer visible, aisladamente, la deductividad, abre la posibilidad —fatal— de reducir la lógica a la simple verdad extrínseca de los juicios, con lo cual queda ésta incomunicada de la realidad. O sea: resulta, la lógica, convertida en un conjunto de juicios formalizados. ARIST., *op. cit.*, 72 b, 5-18, se dio cuenta de esta vía errónea y calificó a las inferencias sacadas de esta especie de juicios: verdades "hipotéticas".

16 *Die logischen Grundlagen der Mathematik* en *Mathematische Annalen,* Vol. 88 (1923), págs. 151-165.

17 *Über den Zahlbegriff* en *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* Vol. 8 (1900), págs. 180-184 (trad. esp. cit., págs. 244-249).

A la posibilidad de desarrollar este programa, de dos puntos, lo denomina Hilbert: teoría de la demostración [18].

Aproximándose al cumplimiento de ambas condiciones, se perfeccionaron en este tiempo los cuatro grandes sistemas de la lógica pura, o lógica moderna clásica anterior a la crisis: cálculo proposicional, cálculo funcional, cálculo de clases y cálculo relacional.

Programa que, de ejecutarse, aseguraría, para siempre, la eficacia de la lógica que, a su vez, es lo que asegura a las ciencias una metodología científica plena.

Faltaba otro pequeño esfuerzo para terminar el edificio de la lógica pura.

Desgraciadamente, Hilbert, en 1928, advierte que los dos puntos del programa propuesto, son problemas difíciles de resolver. Con especialidad, en el primer punto, es indispensable demostrar que de los axiomas, del sistema deductivo puro, son deducibles todas las fórmulas verdaderas, no excluyéndose ninguna ni incluyéndose una sola que no sea verdadera. La dificultad de este punto la propone Hilbert diciendo: "Problema IV. El aserto de la plenitud del sistema de axiomas de la teoría de números puede expresarse también así: si se admite una fórmula perteneciente a la teoría de números y no demostrable con los axiomas de dicha teoría, puede deducirse del sistema axiomático ampliado una contradicción... Surge ahora la cuestión de si todas estas fórmulas, aparte de las reglas del silogismo, son demostrables con la adición del axioma llamado de igualdad. Con otras palabras: si el sistema de las reglas lógicas usuales es completo" [19]. Al respecto, Hilbert juzga que es factible un sistema deductivo puro que sea completo: "Hasta aquí, por medio de pruebas, hemos adquirido la convicción de que estas reglas son suficientes" [20] y en el cual no entren contradicciones: "Si ha podido ser demostrada la incontradiccionalidad de un teorema S con los axiomas de la teoría de números, no puede ser demostrada dicha propiedad para el teorema no S (contrario del S) con aquellos axiomas" [21]. La posibilidad opuesta, no cumplir con este primer punto, es para Hilbert la ruina de la lógica pura y, por consiguiente, de la metodología científica plena. Afirmando con dramatismo: "Creo yo que mi teoría de la demostración nos hace todavía un servicio más general. ¿Pues qué ocurriría con la verdad de nuestro saber y con la existencia y progresos científicos si ni siquiera en la Matemática se diera verdad segura?" [22]. La fe de Hilbert en su programa es tan grande que

18 *Die logischen Grundlagen der Mathematik* en *Mathematische Annalen*, Vol. 88 (1923), págs. 151-165.

19 *Probleme der Grundlagen der Mathematik* en *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig-Berlín, 1930[7], págs. 320-321 (trad. esp. cit., págs. 317-318); el primero, de estos dos enunciados de Hilbert, coincide, prácticamente y con base más en un presentimiento que en un riguroso análisis lógico-matemático, con lo que años después Gödel se encargará de demostrar en su primer teorema que pone término a este punto del programa de Hilbert. Como se ve, el propio Hilbert dejó allí constancia de la dificultad que habría de suprimir, en manos de Gödel, la mitad de su programa.

20 *Op. cit.*, pág. 321 (trad. esp. cit., pág. 318).

21 *Op. cit.*, pág. 319 (trad. esp. cit., pág. 316).

22 *Op. cit.*, pág. 321 (trad. esp. cit., pág. 319).

desecha tal riesgo con estos vocablos imperiales, de un racionalismo que raya en lo fanático: "La teoría de la demostración hace imposible una posición semejante y nos proporciona el sentimiento profundo de la convicción de que a la inteligencia matemática no se le ponen fronteras y de que es capaz de escudriñar hasta las leyes del propio pensar" [23].

Como se ve, la situación de la lógica, hacia 1930, era en extremo feliz; estaba al borde de satisfacer su más acariciado sueño, sueño dos veces milenario: un sistema deductivo puro completo y auto-comprobable.

— 3 —

Constitución de la Crisis

3.1—La obra de Gödel:

Kurt Gödel, en 1931, publicó un corto trabajo, de veinticinco páginas, titulado: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I,* en el cual demostró que los dos puntos del programa de Hilbert son imposibles de realizar [24]. Con ello, lo que era casi una victoria total se volvió una derrota gigantesca. Constituyendo una crisis que cada día se ahonda más.

H. Weyl describe así la crisis: "El deseo de la 'teoría de la demostración' de Hilbert era, como él lo declaró, 'establecer definitivamente en el mundo los problemas básicos'. En 1926 había razones para tener una espectativa optimista ya que por el esfuerzo hecho, en pocos años, por él y sus colaboradores, se había conseguido una consistencia estable para el equivalente formal de nuestras matemáticas clásicas. Los primeros pasos habían sido, verdaderamente, inspiradores y prometedores. Pero tan brillantes esperanzas fueron frustradas por un descubrimiento en 1931, debido a Kurt Gödel, el cual puso en cuestión a todo el programa. Desde entonces, la actitud prevaleciente ha sido la de la resignación" [25].

---

23 *Op. cit.*, pág. 321 (trad. esp. cit., pág. 319).

24 Aparecido en el *Monatshefte für Mathematik und Physik,* Vol. 38 (1931), págs. 173-198. Este trabajo Gödel lo divide en cuatro capítulos. El primer capítulo (págs. 173-176) empieza por enumerar los "sistemas formales más comprensivos" a los cuales ha llegado el desarrollo matemático moderno: El sistema de A. N. WHITEHEAD y B. RUSSELL, *Principia Mathematica,* 3 Vols., Cambridge, 1925² (indicado con las siglas PM) y el sistema axiomático de los conjuntos de Zermelo-Fraenkel (luego ampliado por J. von Neumann). En seguida, Gödel da una versión panorámica de lo que intenta probar. El segundo capítulo (págs. 176-191) es una versión detallada de los fundamentos lógico-matemáticos de la prueba misma. Se inicia describiendo el procedimiento que va a movilizar con rigor (págs. 176-180). De aquí obtiene seis proposiciones (págs. 180-191); con las cuatro primeras define cuarentiséis funciones. Y, en total, de las seis proposiciones logra dieciséis fórmulas relacionales. Los capítulos tercero y cuarto son, propiamente, la prueba misma (fundamentada en el capítulo segundo y bosquejada en el capítulo primero). El tercer capítulo (págs. 191-196) consta de otras cuatro proposiciones, la segunda de las cuales (Proposición VIII, en la numeración general de las proposiciones) la llamaremos, como se suele hacer: Primer teorema de Gödel. El cuarto capítulo (págs. 196-198) agrega una última proposición (Proposición XI, en la numeración general de las proposiciones), la cual llamaremos, como también se suele hacer: Segundo teorema de Gödel. Cf. la breve y esencial exposición de este trabajo de Gödel en N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématique,* Livre I, Théorie des ensembles, structures, Paris, 1957, págs. 110-117.

25 *Op. cit.*, pág. 219.

3.2—Método de Gödel:

Gödel se vale del método llamado "representación conforme". Es decir: el representar los elementos de un determinado grupo, en otro grupo; de modo que se establezca una correspondencia biunívoca entre los elementos de un grupo y los del otro. Gödel estatuye esta correspondencia entre cada una de las fórmulas del sistema deductivo puro y los números enteros positivos (o naturales) de la aritmética. Correspondiendo a cada fórmula del sistema deductivo puro un, y sólo un, número entero positivo (o natural). Para poder devolverse, sin tropiezos, de la aritmética a las fórmulas, emplea la técnica de la base de los números primos. A este método se le llama: aritmetización, y con él Gödel fabrica los dos teoremas que destruyen el programa deductivo de Hilbert[26].

3.3—Los dos teoremas de Gödel:

Los dos teoremas de Gödel imponen un agotador trabajo para ser entendidos. Y articulan, a la vez, el capítulo probablemente más complicado de toda la lógica y, también, el más hermoso, en donde fulgura con máxima intensidad la implacable inteligencia de Occidente —con sus virtudes y flaquezas—. Para hacerlos un poco acequibles volvamos a la imagen del programa de Hilbert.

Allí dijimos que se trataba de programar un sistema que contuviese todas las fórmulas blancas y sólo las fórmulas blancas y que fuese blanco de por sí. En su primer teorema, Gödel hace, inductivamente, una fórmula blanca que sólo es posible incluír dentro del sistema de las fórmulas blancas a condición de que —simultáneamente— entre con ésta una fórmula negra. Con lo cual la blancura total del sistema se echa a perder. Para salvar la blancura del sistema, la nueva fórmula blanca se deja por fuera. Luego el sistema de las fórmulas blancas, si se quiere conservar enteramente incólume, hay que dejarlo incompleto porque falta en él esa nueva fórmula blanca cuya inclusión —al conllevar la entrada de una fórmula negra— enegrecería todo el sistema. En su segundo teorema, Gödel demuestra que la blancura toda del sistema brota desde fuera del sistema. En suma: el sistema ni tiene dentro todas las fórmulas blancas, ni es blanco por sí mismo.

Dicho técnicamente:

---

26 Esta aritmetización, por representación conforme, la manifiesta así, el propio K. GODEL, *op. cit.*, pág. 174: "Las pruebas, desde el punto de vista formal, no son sino semejantes a series finitas de fórmulas (con ciertas características específicas). Para los propósitos metamatemáticos, es naturalmente indiferente qué objetos son tomados como signos básicos, nosotros proponemos usar los números naturales para ellos. Acorde con ésto, entonces, una fórmula es una serie finita de números naturales, y un particular esquema probatorio es una serie finita de series finitas de números naturales. Los conceptos metamatemáticos y las proposiciones, de esta manera, llegan a ser algo concerniente con los números naturales, o series de ellos...". La fuerza del razonamiento de Gödel está en la idea de que esta aritmetización, por representación conforme, se afirma en el concepto de analogía (sin el cual el saber, al desvincularse de la pujanza dialéctica de la analogía, queda paralizado; de ahí que el saber sea, siempre, un saber en el desgarramiento y no en el reposo). La importancia de la analogía ha sido mostrada, magistralmente, por J. D. GARCIA BACCA, *De la analogía del ser y sus relaciones con la Metafísica* en *Episteme - Anuario de Filosofía*, Vol. III (1959-1960), Caracas, 1962, págs. 1-64.

Primer teorema: Gödel construye una fórmula verdadera, dentro de un sistema deductivo puro consistente, que no se puede deducir de los axiomas de ese sistema pues de lo contrario se podría, también, deducir del mismo sistema la fórmula contradictoria de esa fórmula verdadera; con lo cual el sistema se haría inconsistente. Lo que quiere decir que si el sistema ha de mantenerse consistente, no puede incluír esa nueva fórmula verdadera dentro de las fórmulas deducidas de los axiomas. Por tanto, que el sistema es incompleto.

En forma de definición: Si el sistema deductivo puro es consistente es incompleto, con una fórmula verdadera indecidible dentro del sistema [27].

Así se prueba que hay fórmulas verdaderas que no son teoremas. Con lo cual queda aniquilado el primer punto del programa de Hilbert. O de lo contrario habrá que aceptar un sistema deductivo puro completo que, al incluír esa fórmula verdadera tendrá que incluír a su contradictoria, con lo cual se hace inconsistente; o sea: contradictorio.

Segundo teorema: Gödel avanza más y demuestra que si el sistema es consistente, su consistencia no se puede decidir dentro del mismo sistema.

En forma de definición: Si el sistema deductivo puro es consistente, la prueba de su consistencia está fuera de él [28].

Lo cual acaba con el segundo punto del programa de Hilbert.

Como es natural, los dos teoremas de Gödel, al suprimir el programa de Hilbert, hieren de muerte el ideal de una fundamentación definitiva de las ciencias por la lógica.

— 4 —

Ejercicio de la Crisis

4.1—Efectos:

A la luz de esta nueva situación, los cuatro sistemas deductivos puros, atrás citados (cálculo proposicional, cálculo funcional, cálculo de clases y cálculo relacional), son los primeros en experimentar los efectos de la crisis. Sólo el cálculo proposicional resulta ileso, debido al procedimiento no deductivo de las tablas esquemáticas de L. Wittgenstein de 1922 [29], las cuales permiten decidir aisladamente si cualquier fórmula proposicional es o no verdadera. En virtud de estas tablas esquemáticas, W. Burkhart y Th. A. Kalin, alumnos de W. V. Quine en la Universidad de Harvard, siguiendo una tradición que alcanza hasta el beato Raimundo Lulio, en 1947 construyeron el primer cerebro electrónico, a base de

---

27 K. GODEL, *op. cit.*, pág. 193. Cf. S. C. KLEENE, *op. cit.*, pág. 208; J. B. ROSSER, *Deux esquisses de Logique*, Paris, 1955, pág. 36.

28 K. GODEL, *op. cit.*, pág. 196. Cf. S. C. KLEENE, *op. cit.*, pág. 210; J. B. ROSSER, *op. cit.*, pág. 36

29 *Tractatus Logico-Philosophicus*, London, 1933² (reimp. 1951), págs. 91-101.

circuitos, para resolver automáticamente los problemas lógicos del cálculo proposicional [30]. El cálculo funcional queda parcialmente ileso, gracias, ante todo, a los esquemas ideados por J. Venn en el siglo pasado [31]. Los restantes, el cálculo de clases y el cálculo relacional, son afectados en su integridad porque para decidir la verdad de sus fórmulas no hay sino procedimientos deductivos.

El ejercicio de la crisis actual de la lógica cobija, además, indefectiblemente, a todo sistema deductivo, no importa de qué ciencia sea, sometiéndolo a una limitación dual: si no es contradictorio es incompleto y su no contradictoriedad es indemostrable desde dentro del sistema mismo.

4.2—Vías resultantes:

Frente a esta crisis, los lógicos han tomado, en general, tres vías:

1. Resolver, con técnicas muy sutiles, ciertos casos de decibilidad de las fórmulas del cálculo funcional, para saber, con exactitud, hasta dónde es inatacado por los dos teoremas de Gödel. Así W. Ackermann [32].

2. Rehacer la lógica al margen de los sistemas deductivos, para eludir los dos teoremas de Gödel, postulando una lógica involutiva. Así R. Carnap [33] y W. y M. Kneale [34].

3. Devolverle a las fórmulas de la lógica su categoría de juicios con verdad intrínseca, que la formalización de Hilbert les había extirpado. O sea: revertir las fórmulas a juicios, realizar una tarea des-formalizadora. Así el propio Gödel, quien defiende una posición francamente realista o aristotélica, cuando escribe: "Lógica y matemáticas (al igual que la física) están construídas sobre exiomas con un contenido real, el cual no puede ser 'expulsado'" [35]. Pero, entonces, la lógica deja de ser pura y vuelve a ser, como en la época griega, lógica metodológica.

Lo anterior significaría un retroceso, porque la lógica pura, no obs-

---

30 Cf. E. C. BERKELEY, *Giant Brains or Machines that think*, New York, 1949 (reimp. 1950), págs. 144-166; M. GARDNER, *Logic machines and diagrams*, New York, 1958, págs. 128-130, quien se hace cargo de la compleja relación posible entre estas máquinas lógicas y el descubrimiento de Gödel, cuando escribe: "El descubrimiento de Kurt Gödel, frustró las esperanzas que todos los matemáticos habían siempre tenido en un corte deductivo, y la posibilidad de crear una máquina inductiva, suficiente para reemplazar al científico, ha llegado a ser, verdaderamente, remota" (pág. 148).

31 *On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasoning* en *The London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag. and Journ. of Science*, Vol. 5 (1880), págs. 1-18.

32 *Solvable Cases of the Decision Problem*, Amsterdam, 1954.

33 *The Formalization of Logic*, Cambridge, 1943.

34 *Op. cit.*, pág. 742, quienes llegan al párrafo final de su obra, diciendo: "Nosotros por esto, concluímos que la teoría de la identidad debe ser convenientemente excluída del objeto de la lógica, y que nuestra ciencia se define mejor como la pura teoría de la involución, es decir, la teoría de la forma general de los principios de involución, sin considerar las naturalezas especiales de las proposiciones...". Esta exclusión de la teoría de la identidad, causada por Gödel, al probar que hay una fórmula que es intrínsecamente contradictoria (pues la inclusión de una verdadera conlleva la de su contradictoria), indica cómo la crisis actual de la lógica llega hasta lo que se creía como inconmovible: el principio de identidad.

35 Texto transcrito por H. WEYL, *op. cit.*, pág. 235.

tante los dos teoremas de Gödel, ha ampliado inmensamente el horizonte de la lógica griega y ha sido fecunda en muchos campos de la ciencia. Advirtiendo, eso sí, que, en la mayoría de las veces, se ha usado el cálculo proposicional y el cálculo funcional. Por ejemplo, ha sido aplicada con éxito: en la neurología por W. S. McCulloch y R. F. Pitts, para el estudio de los impulsos eléctricos de las redes neuronales [36]; en la física cuántica por J. Von Neumann, para el estudio de los operadores de proyección estadísticos [37]; en el álgebra por muchos matemáticos como G. Birkhoff y S. MacLane, para el estudio del álgebra de las clases [38]; en el derecho por L. Klug, para el estudio de las argumentaciones [39]; etc.

— 5 —

CONCLUSIÓN

5.1—Logro obtenido:

Puede afirmarse, con suficiente certeza, que, de todos modos, a causa de la crisis, la lógica, a fuerza de hacerse radicalmente racionalista, ha concluído trascendiendo el racionalismo. Lo cual es una conquista inmensa.

5.2—Posibles superaciones de la crisis:

Ahora, cobran vigor estos posibles modos de superación de la crisis, que me limito a señalar: La lógica, para no chocar con los dos teoremas de Gödel, no puede entenderse como pura, sino que es, esencialmente, como lo juzgó Aristóteles, lógica metodológica? O será posible conservarla en estado puro, escapando a toda fundamentación deductiva y hacerla involutiva?

O, dicho paradójicamente, para finalizar esta conferencia: la pura lógica es lógica pura o es lógica no pura?

La respuesta, a estas dos preguntas, pertenece al porvenir de la lógica.

ALFREDO TRENDALL

Universidad Nacional,
Bogotá, D. E.
Noviembre de 1962.

---

36 En *Bull. Math. Biophysics,* Vol. 5 (1943), pág. 115.

37 *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik,* Berlín, 1930.

38 *A survey of Modern Algebra,* New York, 1953² (reimp. 1957). Cf. P. DUBREIL y M. L. DUBREIL-JACOTIN, *Lecons d'algebre moderne,* París, 1961.

39 *Lógica jurídica,* trad, esp. de J. D. García Bacca, revisado por el autor, Caracas, 1961.