REFLEXIONES CRITICAS ACERCA DE LA FILOSOFIA DE LA MATEMATICA DE KANT

Alberto Campos
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

RESUMEN. La mayor parte de la literatura concerniente trata de justificar, aún hoy, la filosofía de la matemática de Kant: por qué adoptó determinado modo de pensar o cómo no podía adoptar otro, dado el desarrollo de la matemática en los tiempos del filósofo; sin que, generalmente, los afectos ahonden mucho a propósito de tal desarrollo. En este línea pueden pueden inscribirse 2 obras recientes: 1) Michael FRIEDMAN. *Kant and the exact sciences*. 1992. Cambridge, Massachusetts. Harvard University Press. xvii+357 pp. 2) *Kant's philosophy of mathematics. Modern essays*. Edited by Carl J. POSY 1992. Dordrecht. The Netherlands. Kluwer Academic Publishers. x+370 pp. Los dos volúmenes reunen, en realidad, 15 trabajos de investigación acerca de la filosofía kantiana de la matemática. Es bien curioso que ninguno de ellos mencione el fascículo de Couturat en el que las críticas son extremadamente duras y pertinentes. Couturat (con apellido alterado) es citado apenas eventualmente en el prefacio del editor de la segunda obra. De Russell, cuyas críticas son igualmente demoledoras, se cita sus *Principles of Mathematics*.(1903). Los autores de los artículos generalmente no responden a las objeciones de los «críticos», como ellos los llaman, de la filosofía de la matemática de Kant; se contentan con fabricar exégesis, a veces extrañas, para salvar la enseñanza del filósofo. Allí no creo que surja la idea de que tal filosofía quedó anclada en un meandro de la evolución de la matemática. Imposible saber, desde luego, cuál habría podido ser la actitud del filósofo de haber logrado estar al corriente de alguna matemática posterior a 1800. Lo que sí parece poder asegurarse es que algunos epígonos del kantismo quisieran que la doctrina del maestro permaneciera en dicho remanso, porque no han querido percatarse del desarrollo matemático posterior a 1800. Aluden a él sólo cuando les parece un apoyo. Voy a presentar una secuencia de observaciones críticas a la filosofía de la matemática de Kant, enfocadas, preferencialmente, desde la geometría. Tal texto constituye la primera parte del capítulo XV de mi libro «*Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*» (1991), en el cual se han estudiado, en el capítulo IV, algunos grandes rasgos del papel de la matemática en la *Crítica de la Razón Pura*. Mi propósito es hacer acopio de explicaciones razonables para la matemática, la que arranca desde los pitagóricos y continúa su desarrollo incesante en estos finales del siglo XX. En un apéndice me referiré a las 2 obras citadas antes.

a. Kant se fio demasiado en el hecho histórico de que hasta entonces solamente la geometría euclidiana había sido reconocida. No hizo una crítica de la axiomatización a la manera de Euclides sino que la aceptó como si no tuviera imperfecciones axiomáticas. A decir verdad, éstas fueron destacadas solo posteriormente. Su capacidad de análisis le hubiera dado la oportunidad de adelantarse a su tiempo. Se dice que uno de sus aforismos preferidos era: «Leer poco, pensar mucho». De ser cierto, ello podría explicar el hecho de que no haya procurado ponerse al corriente de los trabajos de recopilación de ideas acerca de la demostración intentada muchas veces del quinto postulado, recopilación con ensayo de explicación hecha por Klügel para doctorarse en la Universidad de Göttingen, 1763; o también, de los trabajos de Lambert, personaje destacado como Kant, de la universidad alemana, corresponsal de Kant y quien antes de que Kant concibiera su filosofía crítica, había pensado y escrito en profundidad sobre el quinto postulado, la cuestión más saliente de la geometría euclidiana.

Poincaré, Russell,..., han destacado el saliente papel de la intuición en los *Elementos*. Kant suple con su construcción de conceptos en la intuición los postulados no enunciados en los *Elementos*.

Prácticamente hasta el siglo XIX, la lógica y la matemática se cultivaban como disciplinas extrañas. La primera estaba encomendada a los filósofos, la matemática era naturalmente de los matemáticos. Generalmente, hay pocos matemáticos que se preocupen por los fundamentos. Desde antes de Euclides, los geómetras mismos no se han justificado ni con lógica ni con intuición, sino que se confían en una especie de sexto sentido que, en cierta manera los guía y les permite no engañarse, desde que se ocupen de lo que llaman a veces verdaderos problemas. La estructura algebraica de la lógica explicitada por Boole debió de ser una sorpresa para sus contemporáneos.

Pero los comportamientos no son forzosamente modificados por un conocimiento, a pesar de lo que pensaba Sócrates. Antes bien, los intuicionistas llegaron a la actitud más extrema a comienzos del siglo XX: la lógica se obtiene por casualidad, es decir, es un conocimiento ocasionalmente alcanzado a partir de la observación del trabajo de los matemáticos, es un subproducto de dicho trabajo. Y deben su nombre al énfasis que ponen en las intuiciones fundamentales a partir de las cuales principian su desarrollo teórico.

La mayor parte de los matemáticos, sin embargo, no procedieron como ellos. Cuando las distinciones más sutiles se hicieron indispensables quedaron en claro las fallas de la intuición: «Cómo puede la intuición engañarnos hasta ese punto» exclama Poincaré, afecto de cuando en cuando a ciertos pareceres intuicionistas. «Me alejo espantado y horrorizado de esa plaga lamentable de funciones continuas sin derivada» escribe Hermite (no sin una pizca de ironía, escribe Bourbaki: p.27 *Eléménts d'histoire des mathématiques*).

Fuera un mérito para Kant si se hubiera dado cuenta críticamente de que no todo el razonamiento estaba patente en las demostraciones de Euclides y de que lo que completaba la argumentación era la intuición. En realidad Kant se proponía hallar una síntesis a la oposición entre Leibniz y Hume. Brunschvicg trae a cuento un fragmento de Leibniz que sí parece haber guiado (¿por qué el gran Leibniz matemático no influyó mucho más en Kant?) al filósofo crítico:

«Lo que ha hecho que sea más fácil razonar demostrativamente en matemática, es en buena parte debido a que en ese caso la experiencia puede garantizar el razonamiento en todo momento, como ocurre también en las figuras de los silogismos». (Leibniz. *Nuevos ensayos* IV 2 §9). Para Kant, continúa Brunschvicg, la aritmética y la geometría tienen el mismo carácter de perfección que reconocía a la lógica de Aristóteles... el razonamiento está en ellos, tanto más seguro de sí mismo, cuanto que tiene, al igual que en el silogismo de Aristóteles, la certeza de encontrar en la experiencia la confirmación de cada una de sus articulaciones. (Brunschvicg: p. 287). La doctrina de Kant acerca del papel de la intuición en Euclides no fue el fruto de una crítica del procedimiento lógico sino que era la que convenía mejor a sus intenciones de hallar una solución de compromiso entre las verdades de razón de Leibniz y las verdades de hecho también de Leibniz y las únicas dignas de tener en cuenta según Hume, ya que aún las ideas las reduce a experiencia (empirismo radical).

b. La filosofía de la matemática en Kant es incidental. Hay profundos análisis y acierto en problematizar puntos claves. Sin embargo, la preocupación de Kant es el problema de la metafísica. Da la impresión de que algunas de las conclusiones adoptadas por Kant para la filosofía de la matemática tienen por objeto dirimir cuestiones con sus colegas de metafísica. O de que estuviera buscando una respuesta para su pregunta de cómo era posible que la matemática hubiera hecho tantos progresos y no la metafísica.

c. Los 3 tipos de juicios. Kant distingue 3 tipos de juicios: «Un triángulo tiene 3 ángulos», «La Tierra es circumnavegable», «Todo número natural admite una descomposición única en producto de factores primos», pertenecen a los que Kant llama respectivamente juicios analíticos, juicios sintéticos a posteriori, juicios sintéticos a priori. Para decir que un triángulo tiene 3 ángulos no necesito salir del concepto de triángulo. No sucede lo mismo con las otras 2 proposiciones; la segunda fue una proposición discutible durante siglos y su verdad establecida por la experiencia de Magallanes y Elcano, 1519-1522. Y para la tercera, necesito una demostración. Empero, esta distinción puede borrarse si yo acentúo una de las explicaciones dadas por el mismo Kant. El juicio analítico no se puede negar sin contradicción, pero el tercer enunciado tampoco puede negarse sin contradicción. Los enunciados matemáticos que son teoremas no pueden clasificarse según su negación sea o no una contradicción. La negación del enunciado 'la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 2 rectos' no puede negarse sin contradicciones dentro de la geometría euclidiana, lo cual lo haría analítico, pero sí fuera de la geometría euclidiana; no es una propiedad intrínseca que posea el enunciado esté donde esté, sino que depende del sistema geométrico formal respecto al cual se la considere. Kant piensa que el enunciado 'El todo es mayor que la parte' es un juicio analítico, es decir, universal y necesario. (El texto de Kant (B 17) parece contrarrestar cierta duda; con razón, pues también había aseverado que los juicios matemáticos son todos sintéticos). Así lo creían seguramente la totalidad de los lógicos y matemáticos, a pesar de una observación de Galileo. Solamente cuando se tuvo claro el concepto de un conjunto infinito se pudo declarar igualmente que la quinta noción común o axioma de Euclides no se cumple entre conjuntos infinitos.

ch. Todos los juicios matemáticos pueden ser considerados analíticos, al escoger un punto de vista que sea análogo al que sirve de criterio a Kant, una especie de homogeneidad o conexidad entre los conceptos. Para atribuir una cualidad a un sujeto no hay que salir del concepto del sujeto, basta conocer el significado de la palabra que sirve para designar al sujeto. En un sistema formal, nada está realmente en la conclusión si no está de alguna manera en las premisas. Esta es la analogía con el criterio de Kant. Análogamente a como se dice el predicado del sujeto, se extrae la conclusión de unas premisas, sin salir del sistema formal. Es lo que da pie, por cierto, para que algunos afirmen que la matemática no es más que una extensa tautología. Con tal enfoque, todos los juicios de la matemática resultan analíticos.

d. Todos los juicios de la matemática pueden ser considerados sintéticos. Según Kant, un juicio es sintético si para atribuir el predicado al sujeto debo salir del concepto del sujeto y pasar por la experiencia: una especie de heterogeneidad entre los conceptos causada por un término medio. Ahora bien. Ningún enunciado en un sistema formal está allí gratuitamente. Si pertenece al sistema o es un axioma o ha sido obtenido por aplicación de un axioma o es un teorema o ha sido derivado de un teorema. Ningún enunciado pertenece intrínsecamente al sistema, en el sentido explicitado; hay que salir del enunciado, si así puede decirse. Entonces, en este sentido, todos los juicios matemáticos son sintéticos. Así, la distinción entre analítico y sintético no es tan tajante como aparece en Kant. Son aspectos bajo los cuales pueden considerarse los juicios matemáticos, no son, empero, aspectos característicos. Juicios analíticos hay, por ejemplo, «Todos los triángulos equiláteros son triángulos isósceles», en los que los 2 términos 'triángulo equilátero', 'triángulo isósceles', no se relacionan con toda facilidad, como puede comprobarse con cualquier estudiante desprevenido; en lenguaje kantiano hay que salir de los 2 conceptos, para poder compararlos, y luego sí proceder a una síntesis. Este proceso tiene que ver con el paso de lo más general a lo menos general, tan frecuentado en matemática y los teoremas interesantes no son como los que enuncian el hecho trivial de que «todos los triángulos isósceles son triángulos» sino mucho menos triviales que el de que «todos los triángulos equiláteros son triángulos isósceles».

Además, los juicios de la matemática pueden ser considerados como sintéticos por la misma manera de trabajar del matemático y, en general, del científico. Con el solo concepto de triángulo no se puede ir más allá del triángulo. Hay que poner relaciones entre los elementos del triángulo, o entre el triángulo y otros triángulos u otras figuras. Con un concepto, sin salir de él, no se puede hacer geometría del triángulo. Teoría procede etimológicamente de una palabra griega que significa visión o contemplación pero una teoría matemática es el resultado que se puede extraer con unas reglas de procedimiento de una puesta en relación de varios elementos y no el resultado de una actitud contemplativa.

e. La distinción entre analítico y sintético no tiene en cuenta en Kant, la génesis del conocimiento expresado por el juicio. Inicialmente, ninguna mente está en condiciones de conocimiento analítico; hay que comenzar por aprehenderlo todo. Autores diversos están de acuerdo en que la distinción entre analítico y sintético tiene un doble aspecto: lógico, psicológico. En el aspecto lógico adjudica un contenido objetivo al juicio, independientemente del sujeto temporal que lo piensa. En el aspecto psicológico se tiene en cuenta el acto del pensamiento en el momento de formular el juicio; sintético, la primera vez que lo formula; analítico, una vez que el predicado haya sido incorporado al sujeto. Sintético para quien no sabe, analítico para quien ya lo sabe. Para Kant, 'el oro es un metal amarillo' es un juicio analítico, sin más explicaciones; 'el oro tiene densidad 19,4' es uno sintético. Sin embargo, ambos son sintéticos, en cuanto no pueden ser enunciados verazmente sin pasar por la experiencia; éste no es un juicio del tipo 'el triángulo tiene 3 ángulos'. Alguien anota que es curioso que Kant, conocedor de Newton, tome como ejemplo de juicio sintético 'Todos los cuerpos son pesados' (*Alle Körper sind schwere*), juicio tan analítico como 'Todos los cuerpos son extensos', por lo menos para quien ya lo conoce. El Diccionario de la Ciencia, de E.B. Uvarov (segunda edición inglesa en 1944, 1948, Buenos Aires, Lautaro, 277 pp.) describe así al oro: ORO. Au. Elemento químico. Peso atómico: 197,2. Número atómico: 79. Metal amarillo brilloso, de poca dureza. Punto de fusión: 1063°C. Peso específico: 19,4. Es muy dúctil y maleable. El agua y el aire no lo corroen. No es atacado por la mayor parte de los ácidos. Se presenta comúnmente al estado libre. Muchos de sus compuestos son inestables y fácilmente reducibles a oro puro. Se lo extrae de sus minerales y de las arenas auríferas por el procedimiento de amalgamación y el procedimiento al cianuro. El cobre y la plata le comunican dureza; estas aleaciones son usadas para monedas, joyas y dentistería. Sus compuestos son usados en fotografía y medicina. El oro es el más maleable de todos los metales: pueden obtenerse hojas de oro de 0,0001mm. de espesor (1/254.000 de pulgada). La hoja tiene aspecto oro metálico pero transmite luz verde, es decir, tiene color verde cuando se la observa por transparencia.

Hasta aquí Uvarov ha enunciado unas 2 docenas de propiedades. Estas son las propiedades del oro, que le pertenecen como características, que lo individuan entre más de 100 elementos. Los científicos se fueron dando cuenta de ellas y ahora pertenecen a la descripción del elemento 79 de la tabla periódica. Cuando piensan en oro lo piensan con estas propiedades conjuntas. Si se quiere hablar de definición de oro, en lugar de descripción del oro, la definición está constituida por la lista de estas propiedades. El físico químico descompone el concepto oro en estas sus propiedades componentes. Un alumno de secundaria, incluso en su examen final de química, lo hará menos bien, en cuanto sólo dará algunas de estas propiedades, que, a pesar de no estar todas, constituyen su descripción del oro, si el profesor no se las exige todas. Un profano se contentará con decir que el oro es un metal amarillo; esa es toda la descripción de que dispone, a ello se reduce su definición del oro. Con tan pobre definición, alguien puede estafarlo y venderle cobre por oro, puesto que también es de color amarillo cuando está aleado con el cinc, el latón, como se denomina esta aleación, según el Larousse. ¿Con qué objeto y con qué criterio se clasificarían estas propiedades, unas en analíticas, otras en sintéticas? ¿Se pasa de lo sintético a lo analítico al familiarizarse con los conceptos o con las palabras que los describen? Las palabras no son consecuencia, reflejos, onomatopeyas,..., de las cosas. El hecho de que la palabra oro nos haga pensar, ipso facto, en los diversos atributos del oro no puede llevarnos a pensar erróneamente que, sin conocer una palabra y un concepto que le corresponda, baste con apretar sobre una tecla para que automáticamente aparezca la tabla de todas sus propiedades, a menos que ya estén codificadas como las del oro. ¿De qué color es el tungsteno? ¿Y el wolframio? Si es una cuestión de familiarizarse, ¿vale la pena introducir la distinción? ¿Sirve la distinción entre analítico y sintético para avanzar en la explicación racional de la matemática?

f. Kant, como sus coetáneos y como era la tradición, concibió la matemática como ciencia del número y de la magnitud o del tiempo y del espacio; a pesar de que ya Leibniz había expresado su idea de la matemática universal; en particular, el álgebra universal aplicable a todas las formas de deducción, método característico de toda la matemática que forzosamente hay que tener en cuenta para una filosofía de la matemática. Habría que esperar hasta cuando, por ello llamado por Russell, creador de la matemática moderna, Boole dará el golpe de gracia a la concepción tradicional: «No corresponde a la esencia de la matemática ocuparse de la idea de número y cantidad». Excluye el aspecto logístico de la artimética, como ya lo hacía Platón en la República; no, desde luego, la teoría de números.

g. Del análisis de Kant resulta que la matemática es posible porque son posibles los juicios sintéticos a priori; pero, los juicios sintéticos a priori, suponiendo que hubiera criterios para determinarlos, resultan una base nada satisfactoria para una explicación de la matemática actual. Están constituidos en parte por la intuición. Ahora bien, como consecuencia de la creación de las geometrías no euclidianas, se llegó a separar muy claramente a la intuición de los sistemas formales. Dicha tarea comenzada por Pasch la completó Hilbert. Y fue extendida a toda la matemática pura por Bourbaki. La matemática se construye a partir de la intuición, pero aparte de la intuición. Así, la filosofía de la matemática de Kant no es explicación satisfactoria para la concepción actual de la matemática. Obviamente, por las condiciones del desarrollo de la historia, la filosofía de la matemática de Kant no tiene porqué dar cuenta de la matemática creada después de Kant, salvo aspectos muy generales, desde luego.

h. La distinción de juicios en analíticos y sintéticos no abarca todo tipo de jucios; es, pues estrecha; Kant enuncia su teoría para juicios categóricos, no hipotéticos, ni disyuntivos; para juicios afirmativos, con raras menciones acerca de cómo se hace la extensión para los negativos; para juicios predicativos, es decir, los que enuncian relaciones entre la parte y el todo. Por consiguiente, toda la teoría de relaciones, creada a partir de 1847, queda por fuera. Vale la pena anotar que un juicio tan sencillo como el de causalidad «Todo cambio tiene una causa» no es de la forma «S es P».

i. Los ejemplos considerados por Kant están tomados de la aritmética, de la geometría y del álgebra de nivel elemental. La filosofía kantiana de la matemática solo podría dar cuenta de la matemática anterior a las geometrías no euclidianas, a la algebraización de la lógica, a la aritmetización del análisis; anterior, en general, al replanteamiento conceptual de la axiomática que va a relegar la intuición al proceso previo a la construcción propiamente dicha de los sistemas formales.

j. Intuición y actividad humana. Se da por sentado que la intuición de que trata Kant no es la parte de la imaginación requerida casi por cualquier actividad humana y muy especialmente por la creación; la que requiere el metafísico para asimilar el principio de que todo cambio tiene una causa es equiparable a la del matemático cuando prolonga un lado de un triángulo para obtener un ángulo externo. No hay acuerdo acerca de lo que Kant entiende por intuición. Posy (pp.3-4) reseña la discusión en los años 60, de dos especialistas, Hintikka y Parsons. En A25 (B39), Kant apunta como criterio para la intuición la singularidad; empero, en A19 (B33), apunta la inmediación; finalmente en A320 (B376-377) los 2 caracteres aparecen unidos. En la discusión acerca de '7 y 5 son 12' el paso por la intuición parece reducirse a la escritura. En un texto citado por Brittan (p.329, *Kant's philosophy of mathematics*) extraído de la polémica Kant-Eberhard, la intuición descrita por Kant es simplemente el trabajo intuitivo del matemático cuando se propone resolver un problema.

k. Ideas geométricas e imágenes subjetivas. No sobra la advertencia en j dado que en la Crítica destaca Couturat estas 2 afirmaciones: En esta síntesis sucesiva de la imaginación productora se basan para producir las figuras, las matemáticas de la extensión (geometría) con sus axiomas (B 204). Soy incapaz de representarme una línea, por pequeña que sea, sin trazarla en el pensamiento, es decir, sin producirla gradualmente a partir de un punto (B 203). Estas citas bastan, dice Couturat, para calificar toda la teoría del esquematismo; confunde a la manera de los empiristas, las ideas geométricas con las imágenes subjetivas que son el soporte genético. La idea de línea es tan independiente de la imagen psicológica como de la figura sensible que yo trazo en el pizarrón para representarla. Con el mismo derecho con el que se afirma, prosigue Couturat, que una línea tiene cierta duración puede sostenerse que es de tinta china o de carbonato de calcio. En la frase de Kant parece haber una reminiscencia de una idea que remonta hasta Aristóteles (*De anima* I 4. 409 a 4, cita de Heath en el primer volumen de los *Elementos*); es una concepción genética de la línea; posiblemente el fuerte rechazo de Couturat está apoyado sobre el aspecto axiomático, separado netamente del primero, en la axiomática actual.

Es de anotar que hay pasajes donde Kant enfatiza la diferencia entre imagen y esquema: «Ninguna imagen de un triángulo se adecuaría jamás al concepto de triángulo en general» (A 141).

L. La intuición del matemático según Bourbaki. Actualmente hay que distinguir tipos de intuición. Los matemáticos han recorrido un largo camino antes de llegar a lo que ahora profesan. En Descartes, en Euler o en Lagrange hay atisbos de un número de dimensiones diferente a las 3 espaciales del sentido común; solo a mediados del siglo pasado, Cayley, Grassmann, Plücker, o, Riemann hacen desarrollos matemáticos para un número mayor. A finales del siglo pasado, Poincaré, para ilustrar su afirmación de que la intuición es adaptable, escribe que él ha llegado a intuir en 4 dimensiones. El geómetra italiano Veronese, por los mismos años, en cuanto investigador de hipergeometrías, modelaba los espacios o variedades que requería, sobre el llamado tridimensional ordinario; estaba convencido de que la geometría n-dimensional hundía sus raíces en la intuición espacial; admitía, empero, que los espacios o variedades n-dimensionales no son enteramente intuibles. ¿Qué pensar de los de infinitas dimensiones, considerados con frecuencia actualmente, tanto en matemática como en física teórica? Así que en geometría o en la misma física, tan cerca del mundo sensible, al parecer, la intuición puede ser del tipo espacial solo en las dimensiones pequeñas. Para Bourbaki, la intuición del matemático, la que no es de tipo espacial y sensible (y que, desde luego, usa también) consiste en un cierto reconocimiento del comportamiento de los seres matemáticos, está ayudada frecuentemente por imágenes de naturaleza muy variada, y fundada primordialmente sobre la frecuentación cotidiana de ellos. Es como un alto grado de familiarización por frecuentación incesante, que permite prever, con equivocaciones a veces, su comportamiento (si se equivoca, no sirve de criterio como querría Kant).

LL. Intuir antes, demostrar después (Polya). Analítico, sintético son voces que han sido utilizadas para designar aspectos bajo los cuales se puede enfocar el pensamiento matemático: un método de trabajo que consiste en ir de la tesis a las hipótesis, recibe el nombre de análisis; y el que consiste en hacer el camino inverso, el de síntesis. El trabajo de solución de un problema mediante métodos de cálculo se suele llamar analítico y mediante demostración se llamó de síntesis; estas denominaciones estuvieron en el centro de una enconada discusión a la cual alude Klein, en el Programa de Erlangen (1872) y que Bourbaki considera acabada por dicha obra de Klein. Las acepciones de analítico y sintético introducidas por Kant, hacen entrar la intuición al caracterizarlas; ello sucedió, empero, cuando la intuición proveía a los geómetras de material para las demostraciones, por la imperfección en los Elementos, por ejemplo, que consistía en la no explicitación de todos los axiomas.

La crítica de tales situaciones hizo que no solamente fueran puestas todas las cartas sobre la mesa, sino, además, que se convinieran reglas de juego muy estrictas. La intuición no tiene más cabida en matemática que en cualquiera otra actividad humana, el juego de ajedrez, por ejemplo: todo se intuye antes, pero todo hay que demostrarlo luego y ningún paso de la demostración tiene como justificación la intuición. Todo paso se argumenta mediante las reglas de juego establecidas. La intuición kantiana no tiene ningún papel en la axiomática concebida por Hilbert. Los juicios volverán a ser o analíticos o sintéticos como lo eran en concepciones diferentes a la kantiana, en Leibniz por ejemplo.

m. «Más corta» para una línea tiene sentido matemático en una geometría dotada de una métrica; si no, no. Kant afirma que la noción 'más corta' es atribuida a la recta por una síntesis fundada en una intuición. En alguna ocasión, Kant tomó como definición de recta la propiedad de que solo una puede ser trazada entre 2 puntos dados. Habría que demostrar en este caso que la recta es la distancia más corta, propiedad no contenida en la definición; ella no va de sí, es decir, no basta hablar de geometría para que el enunciado aparezca para ser derivado; se requiere que en la geometría haya sido introducida la noción de distancia. La propiedad de ser la más corta tiene sentido en una geometría métrica, no en una afín, en una proyectiva, o en una topológica. En una geometría métrica, es decir, en una geometría en cuyo desarrollo se ha introducido la noción de distancia, se define la noción de longitud de un segmento de recta y luego, la de longitud de una línea curva. Entonces, se puede demostrar que un segmento de recta tiene una longitud más corta que la de cualquier línea quebrada con los mismos extremos. Una demostración análoga puede hacerse en una geometría de Bolyai-Lobachevski, pero no en la geometría sobre la esfera, a no ser que por segmento de recta se entienda arco de círculo máximo, como se hace sobre la esfera de Riemann. Legendre tomó como definción de recta la propiedad de ser la más corta distancia entre 2 puntos. Se tiene entonces una proposición analítica. Esto ilustra, una vez más, que la distinción entre analítico y sintético es completamente relativa al sistema formal en el que se está trabajando y nada tiene que ver con la intuición pura o empírica.

n. Igualdad de figuras y superposición. Kant afirma (Prolegómenos 12) que las pruebas de igualdad de figuras consisten, en última instancia, en la superposición de las figuras; es lo mismo decir que tal prueba es una proposición sintética relativa a una intuición inmediata. Efectivamente, así lo es en los Elementos; los geómetras, incluso Russell, han empleado tal imagen. Formalmente, empero, debe de hacerse mediante la noción matemática fundamental de función, que establece la correspondencia conceptual entre 2 conjuntos; lo cual elimina el llamado a la superposición mental o física, impropia en la exposición rigurosa, pero no, desde luego, o en el aprendizaje o en la aprehensión.

ñ. Racionalismo, empirismo, criticismo. Couturat destaca el hecho de que el enunciado «la suma de los 3 ángulos de un triángulos es igual a 2 rectos», citado por los racionalistas, como Descartes o Spinoza, como prototipo de la certeza lógica, necesite según Kant, ser fundamentado en la intuición (B 744). A propósito, alguien ensaya esta trilogía, que se obtiene sin forzar la historia de la filosofía:

Tesis: Racionalismo (Descartes, Leibniz)

Antítesis: Empirismo (Locke, Berkeley, Hume)

Síntesis: Criticismo (Kant).

El compromiso del filósofo, de darle parcialmente razón a ambas tendencias, puede explicar algunas insistencias, de otro modo difícilmente entendibles.

o. Espacio físico y espacio de los físicos. Una aclaración de Blanché, que finalmente coincide con una de Russell que será citada en z, permite enfocar desde otro ángulo el compromiso mencionado en el párrafo anterior. Para Kant, la geometría de Euclides es verdadera, desde el punto de vista experimental en cuanto modelo perfecto del espacio físico y, desde el punto de vista racional en cuanto geometría única y lógicamente consistente. Verdad racional en armonía con verdad experimental provocan el apriorismo kantiano. Superar la posición de Kant exige renunciar a la doble verdad.

Renuncia a la doble verdad que no quieren muchos filósofos que siguen sosteniendo (dice Russell en El método científico en filosofía, ver Misticismo y Lógica) que nuestro conocimiento de que el axioma de las paralelas, por ejemplo, es verdadero con respecto al espacio real, no puede explicarse empíricamente sino que, como Kant sostenía, se deriva de una intuición a priori. Según Russell tal posición no puede refutarse lógicamente pero deja de ser plausible al percatarse de la complejidad del concepto de espacio físico. Desde luego, así sean pocas las preguntas epistemológicas que uno se haga y menos las que pueda responder, ellas serán suficientes para darse cuenta de que el espacio físico de los físicos es una abstracción de tipo aristotélico y de que no se puede confundir tal espacio con el que percibimos que es el que interesa en la teoría del conocimiento.

p. Experiencia posible. Validez objetiva. El alcance que tiene en Kant el concepto de experiencia posible puede apreciarse, por ejemplo, en el parágrafo 30 de los Prolegómenos, donde escribe: «De todas las investigaciones hechas hasta aquí, se desprende, pues, el siguiente resultado: 'todas las proposiciones fundamentales sintéticas a priori no son otra cosa que principios de experiencia posible', y nunca pueden ser referidas a las cosas en sí mismas, sino solamente a los fenómenos como objetos de la experiencia. Por eso también, la matemática pura, como la ciencia natural pura, no pueden referirse jamás a otra cosa que a puros fenómenos y solo pueden representar lo que hace posible, en general, la experiencia o lo que, puesto que se deriva de los principios, debe ser representado siempre en alguna experiencia posible». Imposible estar de acuerdo con Kant, actualmente, en cuanto a la matemática pura o formal, cuyo control de calidad es exclusivamente lógico.

Esta es una de aquellas circunstancias en que imagino a Kant escribiendo sobre matemática pero pensando en la metafísica. La experiencia posible es el argumento máximo contra esa metafísica que no hace progresos como la matemática y que nada como la espuma. Con esta mira, la filosofía de la matemática de Kant está forzosamente restringida a las 3 dimensiones reconocidas del mundo físico (por lo demás estaba convencido de que cuarta dimensión es una pura ficción). Más de 3 dimensiones echarían a perder la explicación que Kant busca para diferenciar la matemática de la metafísica. Experiencia posible y la validez objetiva en 3 dimensiones le facilitan una cabal exposición.

Los defensores de Kant suelen destacar el pasaje A220, o, B268: «... el concepto de una figura encerrada entre 2 rectas no implica contradicción alguna, ya que los conceptos de dos rectas y su cruce no implican la negación de ninguna figura». (La expresión 'negación de una figura' como la de 'demostrar un triángulo', BXII, no tiene sentido matemático, a primera vista). G. Brittan (*Kant's philosophy of science* 1978. Ver: Posy, *Kant's philosophy of mathematics* pp.214-215) al parecer compone una novela, resumida en la siguiente frase que muestra o que G. Brittan ignora la historia de las geometrías no euclidianas, o que su culto de Kant va hasta el fanatismo: «Fue la apreciación de Kant del hecho de que las geometrías no euclidianas son consistentes (algo de lo cual, posiblemente lo puso al corriente su corresponsal, el matemático J.H. Lambert) la que, entre otras diversas consideraciones, lo llevó a decir que la geometría euclidiana es sintética. El desarrollo posterior de las geometrías no euclidianas no hace sino confirmar este punto de vista» (!!!). Es de pensar que si Lambert comunicó a Kant alguna noticia al respecto, no se la comunicó nada completa.

En diversos pasajes Kant insiste en que la imposibilidad de un concepto puede no surgir del concepto mismo, en cuanto no sea contradictorio, sino de las condiciones del espacio que lo harían no construible. El profesor Friedman destaca los pasajes: A 220-221 (B 268), A 165-166, (B 206-207), A 239 (B 298); y concluye: «Por lo tanto, no es la intuición pura, sino únicamente la intuición empírica la que es capaz de proveer un modelo para las verdades de la matemática» (pp. 100- 102).

Estos son argumentos centrales de la Crítica de la Razón Pura no aceptables para la matemática y que no pueden ser olvidados para quedarse solamente con otros mucho más cercanos de concepciones más compartidas actualmente: «Conocer algo a priori es conocerlo a partir de su mera posibilidad» (Citado por Friedman, p.127). «El nuevo método del pensamiento, a saber, solo conocemos a priori de las cosas lo que nosotros mismos ponemos en ellas» (B XVIII).

En cuanto a la validez objetiva, en la Observación I, de los Prolegómenos, despliega Kant su compromiso con la doble verdad, mencionada por Blanché. Los fenómenos externos deben concordar de un modo necesario y el más preciso con las proposiciones del geómetra. Esta convicción de coincidencia absoluta entre matemática y realidad, herencia de los griegos cultivada, sin mucho examen crítico, por lógicos, matemáticos y filósofos, juega en Kant el papel de un prejuicio. Por su investigación en metafísica, Kant tiene que explicar la física de Newton y la matemática de Euclides como ciencias. Ni en la Crítica, ni en los Prolégomenos hay rastros de duda sobre límites de aplicación o de observación; al contrario, la más alta precisión. ¿Cómo puede explicarse tal validez objetiva? A condición de que la geometría se refiera a objetos de los sentidos, de que no sea una fantasía o invención del geómetra, de que la sensibilidad sea como el punto de encuentro entre el entendimiento y los objetos como se nos manifiestan, a condición de que la forma de la sensibilidad sea el fundamento de la geometría; así los fenómenos no pueden sino concordar con lo que demuestra el geómetra.

Si no, «no se comprende cómo podrían concordar necesariamente las cosas con la imagen que, por nosotros mismos y de antemano nos forjamos de ellas» dice Kant. Indudablemente, la explicación kantiana había sido profundamente meditada y mientras no haya como matemática, sino gemetría euclidiana tridimensional puede ser difícilmente rebatible, como confiesa Russell. Pero, el hecho es que muy diversas construcciones mentales matemáticas, resultan ser aplicables (dentro de límites de error controlables) en el sentido de que enmarcan comportamientos observables, sin que la explicación de Kant alcance a cobijarlas, ni remotamente. Piénsese, por ejemplo, en las predicciones del cálculo de probabilidades. Suponiendo que fuera admitida en el campo restringido de la geometría ordinaria, la teoría de la validez objetiva, por una parte, no admite prolongamiento; por otra, se excede en la creencia de que la concordancia es absoluta, sin tener en cuenta los límites de aplicación.

Es más razonable renunciar a la idea de validez objetiva, porque ha sido forjada para explicar solamente lo que era toda la ciencia demostrativa para Kant, vale decir, los Elementos de Euclides y la física de Newton; por imperecederas que Kant declare estas obras, constituyen actualmente una mínima expresión en el cúmulo de conocimientos científicos posteriores a ellas; y, por ejemplo, los Elementos siendo como es una síntesis formal (no un simple apilamiento enciclopédico) admirable de casi toda la matemática creada por los griegos, sin embargo, no alcanza a satisfacer las exigencias actuales como obra de base, como sí lo hace los Fundamentos de la Geometría, de Hilbert.

Ya sin el compromiso de ser apodícticamente cierta, tal teoría pasa a ser meramente una en la lista de las explicaciones posibles, en la reserva de teorías matemáticas a donde acuden los físicos, por ejemplo, en busca de un marco teórico apropiado. Unas resultarán más apropiadas que otras en cuanto permitirán explicar más sucesos dentro de una determinada situación. Este criterio es el que decidirá a los físicos a utilizar una teoría de preferencia a otra. A Einstein cuando utilizó la geometría de Riemann y no la de Euclides.

Una genial anticipación de Kant, a la cual desafortunadamente no se atuvo fue la siguiente: «Una ciencia de todas las especies posibles de espacio sería sin duda alguna la más alta geometría que pudiera emprender una inteligencia finita» (*Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte* §10. 1747. Citado por Brunschvicg, p.290).

q. Kant y la demostración del teorema I 32 de los Elementos. ¿Cómo surgen los problemas matemáticos? Una clasificación que puede hacerse es ésta: unos provienen de fuera de la matemática, otros surgen en el proceso mismo de la investigación matemática, un tercer tipo de problemas se origina en la crítica de los métodos aplicados por los matemáticos, sea para resolver problemas de los 2 tipos anteriores, sea para generalizar esos mismos métodos. A veces, la situación consiste en ejemplos exhaustivamente examinados y para los cuales se logra fabricar una explicación que les conviene. A veces, al intentar aplicar un resultado conocido a un caso determinado se halla que éste es patológico, que no puede tratarse por la teoría conocida; si el matemático logra confeccionar otros ejemplos patológicos del mismo tipo se hará necesaria una teoría más general, si es posible, que cobije los casos patológicos sin invalidar la teoría de la cual resultaron tales patologías.

Ni esta situación delineada, ni otras que podrían serlo, caen dentro del esquema descrito en la Crítica de la Razón Pura sobre la manera de trabajar del metafísico y del matemático. Lo allí descrito corresponde a la demostración ya conocida de un teorema; no corresponde siquiera a las situaciones de resolución de problemas, resolubles con teorías conocidas, ni mucho menos al de la investigación, en donde lo primero que hay que hacer es ensayar diversas salidas posibles de la situación problemática, sin que pueda echarse mano de otro método que el de ensayo y error. Los resultados parciales pacientemente obtenidos se van acumulando para intentos posteriores de explicaciones apropiadas. Da la impresión de que el metafísico que observa Kant no ha estudiado su lección, como sí lo ha hecho el matemático, y que Kant no le da tiempo al metafísico de buscar alguna manera de quedar bien. Es cierto que no puede construir conceptos; le es lícito, empero, echar mano de un caso concreto (como se ve obligado a aceptarlo para la causalidad), recortar las 3 esquinas de un triángulo dibujado y ponerlas una al lado de las otras por el mismo lado de una recta.

En la demostración, ya conocida, de un teorema el trabajo de la intuición está ya fijado, se reduce al trazo, que se conoce cuando se ha estudiado la lección, de alguna o algunas figuras; en realidad, éstas sirven a quien expone como hilo conductor de la exposición y a quien escucha como imagen auxiliar para la representación interior o del mundo inteligible, verdadero objeto del discurso que oye.

Para resolver un problema ya se requiere más, así esté planteado dentro de una teoría conocida donde, en principio, tiene solución. Quien tiene por tarea resolver un problema no está en tan buenas condiciones como quien tiene que demostrar o recitar la demostración ya conocida de un enunciado. En primer lugar, tiene que entender el problema, es decir, intuir la situación donde se presenta y en ello estamos de acuerdo con Kant, en cuanto a lo de intuición, no en cuanto a la seguridad con la que el geómetra de Kant hace trazados determinados y ninguno de tanteo; tales intentos deben conducir a esquemas a los que sea posible aplicar conocimientos que ya se poseen; teoremas o algoritmos. Como en el resto de las obras humanas, es requerido aquí el esfuerzo de la imaginación; pero todo lo que se haya intuido tiene que ser corroborado mediante el control que suministra la lógica; solo la lógica puede garantizar una solución. El trabajo matemático necesita uno y otro componente, imaginativo y lógico; la ventaja que lleva sobre el metafísico en lo tocante a la geometría es que tiene su imaginación más adiestrada. Se trata, en todo caso, de fases del trabajo, porque la parte lógica, «largas cadenas de razones», no puede contener remanentes de intuición: a partir de la intuición, pero aparte de la intuición.

Lo dicho respecto a la solución de problemas hay que aplicarlo a la investigación matemática avanzada, donde se consideran problemas no resolubles con las técnicas conocidas. Se trata, desde luego, de situaciones mucho más complejas.

r. La paradoja de los objetos simétricos (mencionada ya en Leibniz) es paradoja en tiempos de Kant, todavía y lo seguirá siendo un tiempo más, mientras los matemáticos no se den cuenta de cuán importante es la consideración del orden. El tema del orden en geometría es tratado por Pasch en los años ochenta del pasado siglo. Y son precisamente las relaciones de orden las que hacen posible una explicación para la paradoja de los objetos simétricos. Se tiene una relación de orden y su relación inversa. Una figura geométrica y su imagen especular. En el plano orientado, ningún movimiento dentro del plano podrá transformar un ángulo orientado, un triángulo orientado... en su imagen especular. Sobre una recta orientada, 2 segmentos que tienen la misma orientación pueden superponerse, como diría Euclides, pueden ser transformados el uno en el otro; más precisamente, se corresponden biyectivamente mediante una aplicación que conserva la orientación. En 3 dimensiones, 2 poliedros que tiene la misma orientación se corresponden mediante una biyección que conserva la orientación; pero, una biyección que conserva la orientación no puede hacer corresponder un poliedro y su imagen especular; puede decirse también que la imagen especular es una biyección en 3 dimensiones que no conserva la orientación. Contra la opinión de Kant existe, pues, una diferencia inteligible y expresada lógicamente entre un objeto y su imagen especular. Sus partes son iguales, pero no están dispuestas de la misma manera; las relaciones de magnitud son las mismas, las de orden inversas. Y no hay tal de que el entendimiento pueda formar conceptos que no pueden explicarse mediante el entendimiento y cuya comprehensión dependa de la intuición, añade Couturat.

rr. El ser humano, naturalmente euclidiano. Todo el tiempo que los seres humanos hayan hecho inferencias y las hayan hecho con base en el sentido común (armonización interior de las experiencias de los 5 sentidos) es seguro que el resultado en cuanto a la forma de la Tierra haya sido el de que la Tierra es plana. La audacia mental de los filósofos jonios desequilibra ese sentimiento de evidencia local al plantear la pregunta globalmente. La respuesta avanza con lentitud por entre las formas geométricas: disco, cilindro y esfera. Efectivamente, localmente la Tierra es plana, globalmente es una esfera.

La explicación racional recorre estadios similares. Se ha interpretado la obra de Kant en el sentido de que extendería carta de derecho a la situación de hecho que consiste en el empleo de la geometría euclidiana en toda la prática social humana; Kant habría establecido que el hombre es naturalmente euclidiano.

No había otras geometrías (lo cual no es del todo cierto, dado que Desargues y Pascal ya habían concebido la proyectiva) y para físicos y geométras no se ha planteado, por tanto, la pregunta acerca de la geometría de la realidad (suponiendo, como hipótesis de trabajo solamente, que ya se esté de acuerdo sobre este término); pero una vez admitida la logicidad de las construcciones de Bolyai-Lobachevski y de Riemann, la cuestión llega. Muchos aceptan (es cuestión de opinión, dado que no se puede plantear como una proposición dentro de un sistema formal) que la realidad ni es euclidiana, ni es no euclidiana, sino que estas teorías son como hormas para tratar de entender lo que nos rodea, el mundo sublunar, el sistema solar o el universo mismo. Como sistemas formales las 3 geometrías están en pie de igualdad para los geómetras y mientras alguien no quiera aceptar tal neutralidad, seguirá atado a la noria en el problema de los fundamentos.

Por un procedimiento válido para variedades muy abstractas y generales, los geómetras establecen que toda variedad es localmente euclidiana; así pues, coinciden con artesanos y constructores, al asociar en el caso de la Tierra, un plano tangente en cada punto y considerar los sucesos locales como si sucedieran en el plano, donde la geometría más apropiada es la euclidiana.

Hay partidiarios de Kant que no quieren perder la doctrina del filósofo, pero de esta circunstancia de euclidianidad local no pueden apresurarse a extrapolar a nada global; por el contrario, deben tener en cuenta que, por ejemplo, las rutas aéreas y marítimas sobre el globo terrestre se calculan con base en la esfericidad de éste y que con la misma base se trabaja en cartografía y en otras aplicaciones; las geometrías no euclidianas no son, de ninguna manera, meras curiosidades, sino sistemas formales en el mismo nivel que la geometría euclidiana, con aplicaciones en la física teórica y con aplicaciones prácticas. Partir de la idea, para ser fiel a Kant (quien, por cierto, respecto de algunos temas específicos no hizo antes las mismas afirmaciones que se consolidaron incidentalmente en la Crítica de la Razón Pura) de que solo es real la geometría que sirve para las construcciones de nuestro ámbito, es un prejuicio y la actitud de aseverarlo por principio, temeraria.

s. Carácter no necesario de la geometría euclidiana. Gauss escribía a H.W.M. Olbers en abril de 1817: «Cada vez estoy más convencido de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser probada; no, por lo menos, por un entendimiento humano, ni para un entendimiento humano». Con toda la capacidad matemática de Gauss (también en geometría dejó amplio testimonio de su genialidad como creador), con toda la experiencia universitaria, docente y en observaciones que ya había acumulado a sus cuarenta años es de pensar que hubiera llegado a estar profundamente convencido de la necesidad de la geometría euclidiana y que no pudiera llegar a desprenderse de esa convicción sino muy poco a poco, pero de manera definitiva como lo manifiesta en los concluyentes propios términos citados. Kant, anterior a Gauss y poco al corriente de la investigación geométrica de su tiempo, tuvo en cambio su convencimiento durante toda su vida intelectual y llegó hasta ponérselo como tara a la naturaleza humana. No hubo, desafortundamente una circunstancia, como el libro de Hume en otro aspecto, que hiciera reflexionar a Kant sobre lo fundado de su propuesta; sobre todo que trabajos de pensadores anteriores y coetáneos (Saccheri, Klügel, Lambert) parecían indicar ya el camino opuesto al de la proposición de Kant. Gauss, profundo geómetra, niega rotundamente la necesidad de la geometría euclidiana.

t. Kant y la lógica. A pesar de que estas observaciones están expresamente restringidas a lo tocante con geometría, vale la pena destacar una crítica de Couturat acerca de la concepción lógica de Kant, pues, finalmente refluye sobre toda la filosofía crítica.

Según Couturat, el progreso de la lógica y de la matemática en el siglo XIX ha impugnado las opiniones de Kant y dado razón a Leibniz. Kant, para comenzar, tiene una idea poco profunda de la lógica y de la matemática; lo mostró la evolución posterior de ambas ciencias; el trabajo de Kant en lógica no es el de un continuador de la obra de Leibniz, que tiende a superar la lógica aristotélica tradicional, sino al contrario un afianzamiento en esta tendencia, las críticas que hizo no tocan sino aspectos adjetivos de la lógica escolástica; no alcanzó a vislumbrar que la lógica no había desarrollado sino uno de sus capítulos y que tendría que realizar enormes progresos, antes de poder desempeñar la función que actualmente cumple en matemática. [Couturat no alcanzó a ver la importancia creciente de la lógica en matemática después del nacimiento de las lógicas polivalentes y de los teoremas de Gödel, sin hablar de la investigación provocada por la obra de Frege, que hacia 1900 no había comenzado a tener el aprecio que ha tenido posteriormente]. En resumen, una lógica en cierne le parece a Kant perfecta; ahora bien, ella es la base de la lógica trascendental de Kant; ésta, concluye Couturat, debió de quedar incompleta, puesto que la tradicional, base de su obra, lo era en tal medida.

u. El todo es mayor que la parte. A pesar de que tampoco tengan que ver directamente con la geometría, vale la pena traer a cuento 2 críticas de Couturat porque se relacionan con pasajes de Kant citados con frecuencia. (*Crítica de la razón pura*: B 15. B 205. Ver: *Axiomática y Geometría* p.207).

Dado que el concepto de la suma de 7 y 5 implica la reunión de ambos números en uno solo, por ello mismo contiene a este número, el cual queda determinado de manera única.

Entre 7 y 5, por una parte, y 12 por la otra, no solo hay igualdad sino identidad. Por lo demás, se puede ver que 7+5 = 12 es analítico, dado que se obtiene mediante meras definiciones (B 12. B 746. B 747) porque 7+5 = 7+(4+1) = 7+4+1 = 7+(3+1)+1 = 7+3+(1+1) =...= 11+1 = 12. Así, pues, 7+5 = 12 es una proposición analítica, no necesita intuición alguna. A no ser que el hecho de escribir sea salir del concepto y pasar a la intuición. Si así fuera, entonces, absolutamente todo sería sintético: usar la palabra sería ya salir del concepto, concluye Couturat.

En referencia al pasaje B 205, comenta Couturat: parece que según Kant, para obtener el número 12 no basta reunir en el pensamiento los números 7 y 5, tal como se reunen dos conceptos parciales para obtener un concepto total; hay que adicionarlos, y esta operación, según Kant, solo puede efectuarse en la intuición. Aceptada la distinción, se vuelve contra Kant, porque el sujeto no es 7 y 5, sino 7+5; lo que significa que para formarlo no basta con reunir los 2 miembros sino que deben ser sumados, precisamente lo que significa el signo + . Si Kant sólo los reune, no tiene derecho a hablar de suma. (Para éstas y otras críticas, Couturat ha tomado material en otros autores cuyas citas aparecen en el fascículo; lo propio sucede para lo que sigue).

«El todo es mayor que la parte», «a+b es mayor que a», no puede ser una proposición analítica como afirma Kant. En efecto, si no se concluye analíticamente que 7+5 sea 12, menos aún puede saberse cuál es la suma de a y b, ni por consiguiente, si sea mayor que a. Por otra parte, «mayor que» es menos analítico que «igual a», así que Kant ha debido decir que «mayor que» reposa en la intuición. No debió creer que el predicado «mayor que a» estuviera contenido en el sentido lógico del sujeto «a + b». Otra pregunta de Couturat: ¿Cómo descansaría «a + b es mayor que a» en el principio de contradicción para que fuera analítica?

v. Eliminando la figura resulta factible descubrir todos los axiomas que se necesiten. (Russell). Una axiomatización que necesita figuras es una axiomatización defectuosa. Es cierto que desde los pitagóricos, el matemático se vale de figuras para hacer sus explicaciones; pero, Platón o Aristóteles observan con toda razón que es solo un medio didáctico para sostener la atención del oyente; quien discurre matemáticamente frente a una figura, traduce lo que piensa mediante trazos sobre la figura y no al revés; a pesar de que haya textos, incluso universitarios en los que parece que las conclusiones se extraigan de lo que va resultando de la figura. Infortunadamente, ésta es la idea que tiene Kant del empleo de la figura, como se ve en el citado pasaje relativo a la demostración del teorema I 32 de los Elementos. Una práctica para la enseñanza, no puede alcanzar de ninguna manera la función epistemológica que le asigna Kant.

El papel asignado por el matemático a las ilustraciones está elocuentemente enunciado por Russell: «Eliminando la figura resulta factible descubrir todos los axiomas que se necesitan», enunciado completamente contrapuesto al de Kant.

w. Algunos partidarios de Kant resistieron la divulgación de las geometrías no euclidianas. (Axiomática y Geometría p.261). Si se tienen en cuenta dos hechos (no se trata de opiniones), el de la utilización teórica y práctica de las geometrías no euclidianas, y, el de que los sistemas formales tienen todos la misma categoría lógica y matemáticamente hablando, entonces, no es entendible que haya quienes, guiados por la teoría kantiana, parezcan conceder una mayor categoría ontológica a la geometría de Euclides. Una geometría puede tener valor instrumental o de uso mayor que otra, pero como sistemas formales tienen el mismo valor intrínseco.

x. Matemática y metafísica. Kant tuvo varias explicaciones, en cuanto a la diferencia entre matemática y metafísica. La que finalmente figura en la Crítica de la razón pura, es la de la construcción de conceptos en la intuición. Ambas disciplinas son conceptuales; Kant está comprometido a explicar la validez objetiva, según la cual, las cosas como nos aparecen deben concordar con la imagen que nos habíamos formado previamente de ellas; lo cual lleva a Kant a pensar que espacio y tiempo son formas a priori de la sensibilidad, donde se encuentran y se horman tanto las intuiciones concernientes a los conceptos del geómetra, como las impresiones de las cosas sobre nuestra sensibilidad; así es posible, según Kant, la validez objetiva. Con abstracciones aristotélicas, construidas substrayendo propiedades de los objetos, la geometría resulta una especie de física. La geometría es tanto ciencia pura, a priori, como ciencia física, que versa sobre objetos de la realidad externa. Tal explicación kantiana recoge la herencia aristotélica pero está forjada con miras a la constitución de la metafísica como ciencia, no a la explicación de la matemática en sí. Después de la aceptación de las geometrías no euclidianas y a todo lo largo del presente siglo hay matemáticos que han pensado mucho en su ciencia (la epistemología inmanente, quizás, de Piaget); desde el punto de vista de los fundamentos (o filosófico) hay que distinguir entre la matemática como sistema formal (matemática pura) que crea la matemática que ha de emplearse como instrumento en las otras ciencias, lo que constituirá las aplicaciones de la matemática, el otro término que hay que distinguir. En el estadio de formación interviene la intuición, que es de 2 tipos: espacial, la requerida por Kant para la validez objetiva, y otra, de tipo no espacial.

Mediante la interpretación de la geometría como sistema formal se obtiene una geometría física o aplicada, que no coincide, sin más, con los objetos, como quiere Kant, sino que se adapta, dentro de ciertos límites de aproximación, a la parcela del mundo externo que el aplicante está interesado en comprender. Tal aplicación de la geometría es un proyecto diferente del de construirla; quien la va a aplicar ya la conoce; no conoce cuál de las geometrías existentes le hace comprender mejor; ello requiere de intuiciones diversas y en tal circunstancia, sí hay una imagen que precede al encaje entre la teoría y la práctica que se trata de verificar. La matemática pura, es decir, la matemática como sistema formal, toda, incluida la geometría, es conceptual; con intuiciones espaciales generalmente imposibles por tratarse de relaciones muy complejas o por el número de dimensiones, por ejemplo; en una palabra, es una disciplina conceptual sin construcción de conceptos. La matemática aplicada, es un proyecto que se realiza y en tal calidad puede aceptar la explicación kantiana, de la construcción de conceptos en la intuición, tal vez.

Para ver la diferencia entre matemática y metafísica basta ojear sendos tratados, entonces, saltará a la vista, que la argumentación filosófica, por estricta que sea no se atiene a la lógica como tiene que hacerlo la matemática. Para Platón (y la de Kant es un retroceso respecto a la de Platón) la distinción estaba en que la matemática no puede desprenderse de las hipótesis como tiene que hacerlo la filosofía. Descartes y Leibniz pensaban en una matemática universal, con signos específicos, de cálculo fácilmente controlable. Kant cede a veces a esta tendencia presente en la escuela de Leibniz en la que Kant se había educado filosóficamente hablando; quizá, empero, por estar pensando una filosofía de la matemática para arreglarle los problemas a la metafísica, se apartó de la línea de Platón, de Descartes o de Leibniz que suministran explicaciones más en avenencia con la matemática actual que la de Kant. Kant se aleja de Platón y se acerca a una tendencia incubada entre los estudiosos de Aristóteles, la de reducir la matemática al estudio de la cantidad (magnitudes, quanta, como en geometría; mera cantidad, quantitas, como en álgebra. Crítica de la razón pura. B 745). En la Lógica se pronuncia contra quienes distinguen la filosofía y la matemática, en cuanto la primera trata de cualidades y la segunda de cantidades; pero no porque quiera dar una mayor extensión de objeto a la matemática, sino porque la filosofía lo abarca todo y por ende la cantidad. Es la concepción tradicional de la matemática desde los griegos: figuras, magnitudes y números; la matemática universal de Descartes o de Leibniz son ocurrencias extemporáneas de sus autores. En la Lógica (Parte I 2), Kant luego de reiterar que la filosofía es discursiva y la matemática intuitiva (en cuanto su conocimiento se hace posible según Kant, intuitivamente), da la razón de por qué es así: «las magnitudes pueden ser construidas en la intuición a priori, mientras que las cualidades, por el contrario, no pueden ser representadas en la intuición». Ahora bien, desde casi comienzos del siglo pasado, la matemática ha desbordado, si es que de veras estaba confinada a él, y ya se han anotado algunos contraejemplos, el marco de la categoría de cantidad.

Una vez más, la diferencia entre matemática y filosofía, está en la manera como la una y la otra emplean la lógica, y no en la manera como la una y la otra se sirven de la intuición; ambas la necesitan, no en su constitución sino, precisamente, para constituirse.

Una obra filosófica como la *Etica*, de Spinoza, compuesta según su autor, como quien hace geometría, es mucho más difícil de analizar, desde el punto de vista de la argumentación, que su modelo que serían los *Elementos*; en esta obra de Euclides, hay imperfecciones lógicas en la selección de los primeros principios, por ejemplo, pero no se ha encontrado un solo enunciado que sea teorema allí y no lo sea para un matemático de fines del siglo XX. (Bourbaki). Y sería temerario afirmar que las proposiciones del primer libro de la *Etica* puedan derivarse sin más, de los primeros principios escogidos por Spinoza.

En los textos mismos de Kant, se pueden anotar más que imperfecciones lógicas. Nada más que una muestra: en B 66 (CRP) se lee esta inducción apresurada «Por tanto, no solo es posible o probable... sino que es indudablemente cierto...». Este giro argumentativo es bastante frecuente en la Crítica de la razón pura, o en los Prolegómenos; ver por ejemplo, la argumentación con la que Kant pretende establecer que espacio y tiempo son formas a priori de la intuición. Si como ejercicio se intenta esquematizar la derivación, como se hace en el capítulo II con proposiciones de los Elementos, o en el capítulo VIII, (Axiomática y Geometría), con proposiciones de los Fundamentos, de Hilbert, el lógico tendría que saltar sobre lagunas en la demostración como las anotadas de generalización apresurada, lo cual en sana lógica significa que la demostración de las respectivas proposiciones kantianas es imposible, a menos que no lo sea la suplencia de las carencias.

y. Otras filosofías de la matemática. Al hablar de filosofía de la matemática, es preciso referise a Platón, muy de paso a Aristóteles, a Descartes, a Leibniz. Dentro de la matemática misma surgieron en los primeros años del siglo XX, 3 tendencias: intuicionismo (Brouwer, Heyting); logicismo (Frege, Russell, Whitehead); formalismo (Hilbert, Bourbaki); me he ocupado de la última en varios capítulos, las 2 primeras no son estudiadas aquí; ni lo son las opiniones filosóficas de matemáticos como Hamilton, muy cercano a Kant o como Kronecker, antecesor del intuicionismo; las de Poincaré han sido citadas en varios pasajes.

El filósofo J.S. Mill, como el físico alemán H. Helmholtz, como el geómetra alemán M. Pasch (en cuanto se refiere a las aplicaciones de la matemática) sostuvieron tesis extremas que un autor resume asi: «Los conceptos de la matemática son empíricos». «Los postulados de la matemática son verdades experimentales». La verdad de un teorema sería más una acumulación de casos favorables que una derivación estrictamente con base en reglas lógicas. Pero ya Galileo o Leonardo da Vinci habían notado que millares de casos en favor no forman un argumento. Kant dice muy bien que la experiencia nos muestra lo que es, pero no que lo que es pueda ser de otra manera; y actualmente el aspecto combinatorio es uno de los peculiares de la matemática, lo cual muestra la pobreza de la concepción de Mill, que proviene de los empiristas ingleses, Locke o Hume.

El empirismo, afirma Couturat, pretende que la geometría demuestre necesariamente sus teoremas en ejemplos particulares y concretos y agregue a cada demostración algo así como «la misma demostración podría repetirse en toda figura análoga». (Comparar, sin embargo, con las líneas 1-5 *Axiomática y Geometría* p. 501).

Un tal procedimiento puede ser útil, quizá en los primeros años de educación básica, pero no tiene asidero como una visión filosófica de la matemática; y puede conducir a pseudo problemas. No faltará quien emplee como argumento el hecho de que Arquímedes se haya guiado para la cuadratura de la parábola (que luego demostró con toda probidad mediante el método de exhaución) por experiencias de peso de cuerpos recortados según dicha curva.

Teóricamente es imposible construir un heptágono regular con solo regla y compás (célebre teorema demostrado por Gauss a los 19 años de edad). Sin embargo, hay textos de descriptiva (técnica de dibujo llamada a veces geometría) en los que figuran procedimientos que permiten obtener el trazado de un heptágono regular, valiéndose solamente de regla y compás. Tales dibujos bastan para la práctica, pero con la concepción filosófica de los empiristas, llevarían al falso conflicto entre la demostración matemática de que tal construcción es teóricamente imposible y la construcción aproximada; querer que el diseño, por bien calculado que sea, coincida con el concepto, es tan descabellado como confundir un número irracional con una de sus aproximaciones, cuando teóricamente tiene infinitas.

z. Matemáticos y juicios sintéticos a priori: ¿Piensan los matemáticos que los principios de su ciencia son analíticos o sintéticos a priori? Ernst Snapper se ocupó de la cuestión: «Are mathematical theorems analytic or synthetic?» *The Mathematical Intelligencer*. Vol.3. N-2. 1984. pp. 85-88.

Si lógica es no sólo lógica matemática sino más ampliamente, «razonamiento independiente de la experiencia y de la intuición», los teoremas de la aritmética, para Frege se basan en la sola lógica, es decir, son todos analíticos; por el contrario, los de la geometría se basan en la intuición del espacio y son todos sintéticos a priori. Snapper no las hace, pero me parecen indispensables las observaciones siguientes: Frege, profundo investigador en lógica (para algunos parece ser el mayor lógico de todos los tiempos) y en teoría de números, no admitió los juicios sintéticos a priori de Kant en sus dominios de investigación, pero sí los admitió para la geometría, que Frege llegó a estudiar a fondo solamente años después. No sé si posteriormente a estos estudios haya desechado igualmente los juicios sintéticos a priori en geometría y haya opinado que todos los juicios de la matemática sean analíticos. Quizás, su adhesión a la teoría kantiana no se lo permitió; sabido es que jamás quiso admitir las geometrías no euclidianas.

Russell mantuvo que todos los teoremas matemáticos son analíticos, otra opinión no enmarcaría dentro de su logicismo; sin explicar, dice Snapper, por qué proposiciones analíticas pueden dar tanta información, observación que da a entender que para Snapper la idea kantiana está ya establecida. He aquí una apropiada respuesta. Para Russell («La matemática y los metafísicos». *International Monthly*. Vol. 4. 1901. Traducción española en el volumen *Misticismo y Lógica*) «ahora se ve que la peculiar posición que la geometría ocupaba en la época de Kant era una falsa ilusión». Russell descompone los juicios sintéticos a priori según su aspecto lógico (geometría pura o formal) o su aspecto físico (aplicación de la geometría). Estos son los términos de Russell. El problema que interesa a Kant en la Estética Trascendental es primordialmente epistemológico: «¿Cómo llegamos a tener un conocimiento a priori de la geometría?». La importancia y alcance de esta cuestión se han modificado mucho con la distinción entre los problemas lógicos y físicos de la geometría. Nuestro conocimiento de la geometría pura es a priori, pero es totalmente lógico. Nuestro conocimiento de la geometría física es sintético, pero no es a priori. Nuestro conocimiento de la geometría pura es hipotético, y no nos permite afirmar, por ejemplo, que el axioma de las paralelas es verdadero en el mundo físico. Nuestro conocimiento de la geometría física nos permite afirmar que ese axioma se verifica aproximadamente pero no exactamente, en razón de la inevitable inexactitud de la observación. De esta suerte, con la separación que hemos hecho entre la geometría pura y la geometría física, el problema kantiano se derrumba.

El lógico W.V. Quine arguye que no puede darse una definición de juicio analítico filosóficamente aceptable y que por tanto debe dejarse de lado la clasificación kantiana respectiva.

Poincaré, contra el logicismo de Russell, sostiene que la deducción matemática a partir de sola lógica es imposible. Según él, la demostración por recurrencia (que consideraba, no sin razón, como una secuencia infinita de silogismos) no era lógicamente justificable y debe basarse por consiguiente sobre una intuición original específica [Beth p.115].

Este es el meollo de la idea de Kant, pero los juicios sintéticos a priori de Poincaré no son los enunciados corrientes de la matemática, sino el principio de inducción completa por ejemplo [Beth p.69].

Continúa Snapper con la opinión de los intuicionistas, para quienes toda la matemática tiene su base en construcciones mentales, primordialmente, la de los números naturales, a partir de la cual se genera cualquiera otra actividad matemática de manera que ya no necesita, por ejemplo, intuición alguna del espacio, ni para la construcción de la geometría.

Según Snapper, para Ayer, todos los juicios matemáticos son analíticos porque su verdad depende únicamente de la definición de los símbolos que involucra, es decir, por la concepción misma de lo analítico.

Snapper se deshace rápidamente del logicismo dado que la matemática se reduce, en realidad a la teoría de conjuntos, no a la sola lógica, puesto que ciertos axiomas, el del infinito, por ejemplo, no son de tipo lógico (Hilbert ya lo había sugerido en una respuesta a Russell, sin nombrarlo). Pero Snapper reduce simplistamente los argumentos, de Ayer en particular, de quienes opinan que todos los teoremas son analíticos. Entiendo que la idea de Ayer no es que los teoremas se sigan de las meras definiciones, lo que tendría que ser una afirmación temeraria proferida por alguien que nunca hubiera estado enfrentado a un buen teorema, sino la de que bastan los implementos del sistema formal para demostrarlos, sin necesidad de salir a la experiencia pura propugnada por Kant. (Habría que salir del sistema formal porque entre los elementos de éstos, no figura la intuición). (Ver el comentario en la letra ch).

La contribución que quiere aportar Snapper está colocada dentro de la lógica matemática (excluye expresamente al intuicionismo) y se basa en la distinción entre axiomas lógicos, los que son verdaderos en todas las interpretaciones de una teoría formal, y los no lógicos, los que pueden ser probados con base en solo axiomas lógicos y teoremas no lógicos. «Un pentágono tiene cinco lados», es un teorema lógico; la verdad de tales teoremas depende solamente de las definiciones de los símbolos que ocurren en ellos; son todos analíticos. Snapper insiste en que tales teoremas no dependen de la selección de los axiomas lógicos y de las reglas de inferencia. En tales condiciones, Snapper declara que los teoremas no lógicos son los sintéticos a priori, y que por tanto, los teoremas que cuentan son sintéticos. (En d se vió que efectivamente los juicios matemáticos pueden ser considerados sintéticos).

Snapper tiene que hacer un gran esfuerzo para que los teoremas como los conciben los intuicionistas sean igualmente sintéticos. Menciona desde luego a Poincaré. Coincidía con los intuicionistas en cuanto edificaba toda actividad matemática sobre una base única. Para los intuicionistas, eran los números naturales, para Poincaré, la inducción matemática, arquetipo del razonamiento matemático, «el tipo exacto, de la intuición sintética a priori». En cuanto los teoremas matemáticos tienen como base, el principio de inducción, Snapper considera que para Poincaré, los teoremas matemáticos son sintéticos. Tal vez sea una conclusión apresurada; al matemático francés le interesa poner una base firme al edificio matemático; el resto, por otros textos, parece no desvelarlo. En efecto, por una parte, considera que las definciones son meras convenciones y que los axiomas son definiciones disfrazadas. Por otra parte, en un célebre ensayo (*Sur les hipothèses fondamentales de la géométrie*. 2 XI 1887) dice textualmente: «¿Uno puede preguntarse lo que son estas hipótesis: hechos experimentales, juicios analíticos, juicios sintéticos a priori? Tenemos que responder negativamente a estas 3 preguntas. Si estas hipótesis fueran hechos experimentales, la geometría estaría sometida a una revisión incesante, no sería una ciencia exacta; si fueran juicios sintéticos a priori, con mayor razón analíticos, sería imposible dejar de tenerlos en cuenta y fundar algo con base en su negación». En un texto estrictamente científico, Poincaré se desentiende de la clasificación kantiana.

En conclusión, los matemáticos que se han ocupado de la filosofía de su ciencia sostienen opiniones dispares, incluidos quienes, como los intuicionistas, aceptan parte del pensamiento kantiano. El de los juicios sintéticos a priori no es uno de estos intentos de explicación que dividen a los interesados en bandos rivales; no pasa de ser una curiosidad que es conveniente mostrar que uno no ignora.

Para ser ecuánime, debo anotar, sin embargo, que Poincaré o Einstein (y podrían nombrarse otros) eran físicos teóricos que desarrollaron teorías de mucha envergadura con base en experimentos mentales (Gedankenexperimente). Los profundos estudios de las órbitas periódicas de Poincaré (donde está una parte de su valiosa herencia no solo matemática sino física; las obras pertinentes han sido traducidas y editadas por cuenta de la NASA) no son fruto de sus observaciones astronómicas; los trenes de Einstein, en su crítica del concepto de simultaneidad, son meramente pensados. Ni Einstein, ni Poincaré fueron científicos de laboratorio. Las premisas de sus razonamientos eran representaciones mentales forjadas por ellos a partir de cuidadosas observaciones realizadas por otros físicos. Tal método de trabajo parece pariente de las intuiciones puras de Kant.

Una disparidad de opiniones comparable a la de los matemáticos respecto de los juicios sintéticos a priori de Kant, es la de algunos filósofos respecto de la opinión de Riemann (uno de los mayores matemáticos de todos los tiempos) cuando niega la dependencia de la geometría, propugnada por Kant, frente a la intuición. En las actas del simposio sobre historia matemática, citadas como penúltimo título de la bibliografía, figura, pp. 17-46, la ponencia de Gregory NOWAK: *Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic a priori status of geometry*. Se traen a cuento en ella, afirmaciones de Riemann tan categóricas como la que sigue: «El concepto de una variedad pluridimensional existe independientemente de nuestra intuición en el espacio. Espacio, plano, recta son únicamente los ejemplares más intuibles de una variedad de tres, dos, una dimensiones. Sin tener una mínima intuición espacial, estaríamos sin embargo en condiciones para desarrollar toda la geometría», p.31. Nowak presenta someramente diversas reacciones, razonadas desde el punto de vista filosófico, de autores como Helmholtz, Clifford, Jevons, Roberts, Land, Lotze, Erdmann, Stallo, Russell, Cassirer. Es de subrayar que en An essay on the foundations of geometry, 1897, Russell sostiene una opinión contraria a la de 1901, citada en *Axiomática y Geometría*, p.661. Lo más curioso es que todos esos autores argumenten sin aludir al que debía de ser para ellos un hecho conocido: las geometrías no euclidianas. Ya no se trata únicamente de aseverar que la geometría euclidiana es la de lo que ellos entienden por espacio físico, sino, además, de explicar por qué no puede serlo una de las geometrías no euclidianas. No hacerlo sería razonar con prejuicio.

CONSECUENCIA

Tres acontecimientos fueron particularmente importantes para los matemáticos que se han ocupado de los fundamentos de su ciencia. Las tres rupturas: de la unidad de la geometría (1832), de la unidad de la lógica (1920-1921), de la unidad de un sistema formal para toda la matemática (1931).

Con una sola geometría se tiende a pensar que ella es la de la realidad, una especie de física, con abstracciones de tipo aristotélico, de lo que no se tuvo duda hasta 1800; una especie de ciencia natural, decía todavía Comte, que puede enriquecerse con observaciones.

Con una sola lógica se tiene tendencia a pensar que los principios de la lógica son leyes del pensamiento, como todavía se puede leer en algunos libros cuyos autores o no se han enterado o se muestran reacios a cambiar de enseñanza.

Con un solo sistema formal es legítima la tendencia, representada ilustremente por Hilbert, de querer demostrar la no contradicción para toda la matemática (Hilbert, desde luego, incorporó en seguida el resultado de Gödel, en su concepción de la matemática).

La vida intelectual era más cómoda con las 3 unidades; a la manera de Descartes, permitía pensar que «no habiendo más que una verdad de cada cosa, quien la encuentra sabe de ella cuanto se puede saber» (*Discours de la méthode. 2ème Partie. III*).

De las 3 rupturas se puede decir: no se sabe, a priori, si se necesitará más o menos filosofía («La matemática formalizada no necesita más metafísica que el juego de ajedrez» dijo Dieudonné) para varias geometrías, varias lógicas, varios sistemas formales de lo que se necesitaba cuando eran una sola unidad; de lo que sí se puede estar seguro es de que, como explicación, no les sirve la misma filosofía.

SUGERENCIA

La kantiana división tripartita del conocimiento según los sentidos, el entendimiento, la razón podría entenderse del siguiente modo, en acuerdo con las anteriores observaciones críticas:

Sentidos	Intuición	Experiencia	Conocimiento inmediato
Entendimiento	Conceptos	Experiencia posible	Ciencia no formales
Razón	Ideas	Metamatemática	Ciencias formales

La única diferencia (esencial, desde luego) está en que entre los conocimientos mediatos hay que distinguir las ciencias no formales (física, química, ciencias naturales, ciencias sociales, filosofía) de las ciencias formales (lógica, matemática). La validez de las primeras está restringida al ámbito de la experiencia posible, como en Kant. En cambio, a diferencia de Kant, el único criterio de validez para las segundas es puramente lógico. Alguien podría pensar que los teoremas que ligan la coherencia sintáctica a la semántica (ver, por ejemplo, Ladrière, p.302) conducirían de nuevo al planteo de Kant. No hay tal. Hay que tener en cuenta que dichos teoremas metamatemáticos envuelven imprescindiblemente la noción de infinito. Y esta idea está completamente fuera del ámbito de la posible experiencia. (Obra aludida de Ladrière: Limitaciones internas de los formalismos. (1959?). 1969. Madrid. Tecnos. 545 pp).

BIBLIOGRAFIA

Evert BETH. *The Fountations of Mathematics. Revised Edition. A Study in the Philosophy of Science.* 1964. New York. 1966. Harper and Row. xxviii+741 pp.

Léo BRUNSCHVICG. *Las etapas de la filosofia matemática* (1912. 1929). 1945. Buenos Aires. Lautaro. 633 pp.

Rudolph CARNAP. *Les fondements philosophiques de la physique*. Paris. Armand Colin.

Alberto CAMPOS. *Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides.* 1991.xvi+600 pp. Editor: Alberto Campos. 1994. Bogotá.

Alberto CAMPOS. *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.* 1991.vi+717 pp. Editor: Alberto Campos. 1994. Bogotá.

Louis COUTURAT. «La philosophie des mathématiques de Kant» (1904). *Revue de Metaph. et de Morale.* T.XII. pp.321-383. 1960. México. Universidad Nacional Autónoma de México. 120 pp.

David HILBERT y Wilhelm ACKERMANN. *Elementos de lógica teórica.* (1972). 1975. Madrid. Tecnos. 213 pp.

Jaakko HINTIKKA. *Lógica, juegos de lenguaje e información. Temas kantianos de filosofía de la lógica* (1973). 1976. Madrid. Tecnos. 333 pp.

Inmanuel KANT. *Crítica de la razón pura.* (1781. 1787). 1983. Madrid. Alfaguara. xlviii+694 pp.

Manuel KANT. *Prolegómenos a toda metafísica del porvenir*. (1783). 1973. México. Porrúa. xvi+416 pp. Los *Prolegómenos* ocupan 124 páginas.

Stephan KÖRNER. *Introducción a la filosofía de la matemática.* (1966). 1969. México. Siglo XXI Editores. vii+250 pp.

William y Martha KNEALE. *El desarrollo de la lógica.* (1961). 1972. Madrid. Tecnos. xiv+705pp.

Henry MARGENAU. *La naturaleza de la realidad física. Una filosofía de la física moderna* (1950). 1970. Madrid. Tecnos 427 pp.

Charles PARSONS. *Mathematics in Philosophy. Selected papers.* 1983. Ithaca. New York. Cornell University Press. 365 pp.

Anthony QUINTON. *The a priori and the analytic. 1964. Proceedings of the Aristotelian Society.* Vol. 64. pp. 31-54.

Hans REICHENBACH. *La filosofía científica.* (1951). 1953. México. Fondo de Cultura Económica. 299 pp.

Bertrand RUSSELL. *El método científico en filosofía.* pp. 101-125. *Misticismo y lógica.* 1951.Buenos Aires. Paidos. 227 pp. (Escrito en 1914).

Ernst SNAPPER. «Are mathematical theorems analytic or synthetic?» pp. 85-88. *The Mathematical Intelligencer.* Vol. 3 Nº 2. 1981.

The history of modern mathematics. Volume I: Ideas and their reception. Proceedings of the Symposium on the history of modern mathematics. Vassar College. Poughkeepsie. New York. June 20-24. 1988. Edited by David E. Rowe, and, John Mc Cleary. 1989. Academic Press. Harcourt Brace Jovanovich Publishers. USA. xvi+453 pp.

The Encyclopedia of Philosophy: 1967. New York. The Macmillan Company and the Free Press.

«Analytic and synthetic statements». D.W. HAMLYN. Vol. I. pp.104-108.

«A priori and a posteriori». D.W. HAMLYN. Vol. I pp. 140-145.

«Geometry». Stephen BARKER. Vol. 3. pp. 284-291.

«Kant». W.H. MALSH. Vol. 4. pp. 304-324.

«Space». J.J.C. SMART. Vol. 7. pp. 506-511.

*

* *

APENDICE

ACERCA DE 2 LIBROS RECIENTES SOBRE LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA DE KANT

Solamente voy a comentar sendas arugmentaciones en artículos de los profesores Barker y Friedman.

Stephen BARKER. (Department of Philosophy. The Johns Hopkins University. Baltimore). *Kant's view of geometry: a partial defense. 221-243. Kant's philosophy of mathematics.*

El profesor Barker critica a los filósofos analistas que han desechado la posición de Kant respecto de la geometría, aunque no acepta por entero la visión de Kant.

La argumentación a la que el profesor Barker reduce la de sus adversarios es, grosso modo, la de Russell: La geometría es o pura o aplicada. Geometría pura o formal: deducir consecuencias a partir de primeros principios mediante solo lógica. Entonces la geometría es analítica, en términos del mismo Kant.

Geometría aplicada: interpretar los primeros principios y los teoremas en el mundo físico.

Dilema: Las tesis de Kant pertenecen o a la geometría pura o a la geometría aplicada.

Ahora bien. Ni en uno, ni en otro supuesto las tesis de Kant son sostenibles. Luego, las tesis de Kant acerca de la geometría son desechables.

Para su defensa parcial de la filosofía de Kant acerca de la geometría euclidiana, el profesor Barker la reduce a 3 tesis.

(1) - Los postulados y teoremas de la geometría euclidiana son verdaderos y por lo tanto, cualesquiera proposiciones inconsistentes con ellos son falsas.

(2) - Cada uno de los postulados y teoremas de la geometría euclidiana es tal que los seres humanos podemos conocer a priori que es verdadero.

(3) - Los postulados y teoremas de la geometría euclidiana son proposiciones sintéticas.

Con toda convicción afirma el profesor Barker: «De acuerdo con la filosofía de Kant, todos los seres humanos, los que ven y los que no ven, tienen representaciones del mundo que los rodea de tipo puramente euclidiano. Alterar esta parte de su enseñanza debilita su posición en lugar de fortalecerla». (p.231).

Uno de los procedimientos para zafarse de los cuernos de un dilema consiste en mostrar que existe una tercera posibilidad. Es lo que ensaya el profesor Barker. Uno de los autores que critica se ha valido de rayo de luz como interpretación de línea recta. El profesor Barker se toma la molestia de mostrar que hay ambigüedad en el uso del término «rectitud». Con ello no logrará nada, pues, el dilema está planteado entre geometría pura y geometría aplicada y la réplica no es apropiada. Ejemplo de una interpretación: por línea recta se entiende círculo máximo sobre una superficie esférica; entonces, para el postulado 1 de Euclides se obtiene una proposición falsa, pues no es cierto que 2 puntos sobre una superficie esférica determinen un único círculo máximo. No se trata de llegar a discutir acerca de la rectitud de un círculo máximo, sino de ver si los axiomas y proposiciones interpretados son verdaderos o falsos con el significado que se les ha dado. Por lo demás, no se ve la oportunidad de acabar la discusión, introduciendo geometría no euclidiana: ¿qué tiene que ver con el dilema o geometría pura o gemetría aplicada? A dicha geometría se acude para explicar (mejor que con la geometría euclidiana) resultados anteriores de la teoría [de la relatividad generalizada].

Sin embargo, el profesor Barker cree haber logrado su cometido; se lamenta, sí de que su defensa de la teoría kantiana respecto de la geometría euclidiana sea parcial en cuanto no logra establecer que la presentación euclidiana abarca la única interpretación legitimada de la geometría; está seguro, empero, de haber mostrado que las tesis (1) y (2), a las que ha reducido la doctrina kantiana, tienen más asidero que el que creen los críticos.

Trata de defender la tercera, apoyándose, una vez más en el hecho de que no se tiene una definición explícita de línea recta. ¿Qué cree el profesor Barker que se tiene entonces? Solamente una definición, no explícita de recta. Por lo tanto, afirma él, los principios euclidianos no pueden ser deducidos con mera lógica y definiciones explícitas; los teoremas de la geometría euclidiana son así sintéticos. Aquí el profesor Barker olvida un punto clave en la geometría como la entienden hoy en día los geómetras. Si recta es un término inicialmente no definido, lo será finalmente cuando se haya terminado de enunciar los axiomas y solo es lícito usar recta en el sentido autorizado por los axiomas y las consecuencias extraídas de ellos mediante solo lógica. Elegir una acepción para recta de acuerdo con una experiencia es precisamente, hacer geometría física y por lo tanto sintética, y, no a priori.

El desenfado que le permite al profesor Barker no consultar fuentes referentes a la historia de la geometría posterior a Kant aclara el párrafo en el que expone que es una «historia, probablemente apócrifa», la de que Gauss haya medido el triángulo determinado por las cimas respectivas de 3 montañas, medición efectuada mediante rayos de luz. Nada de apócrifa. Está descrita en el parágrafo 28 de una las más célebres memorias de Gauss, una de las 2 obras escritas por él, en las que crea la geometría diferencial: «considerationes generales circa superficies curvas». 1827. 10 años antes había escrito: «Estoy cada vez más convencido de que no puede ser probada la necesidad de nuestra geometría», es decir, de la geometría euclidiana. Nada de precipitación. En el párrafo 28 citado, no hay alusión alguna a geometría euclidiana o no euclidiana. Ver: Alberto CAMPOS. La teoría gaussiana de las superficies. pp. 22-66. A C. F. GAUSS en el bicentenario de su nacimiento. Victor Albis, editor. V. Epistemología, historia y didáctica de la matemática. Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional de Colombia. 1983.

Michael FRIEDMAN. (Department of Philosophy. University of Illinois at Chicago. USA). *Kant's theory of geometry. pp.177-219. Kant's philosophy of mathematics. Modern essays.* Edited by Carl Posy. 1992. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. x+370 pp.

También: pp. 55-95. **Geometry. Michael FRIEDMAN**. *Kant and the exact sciences.* 1992. Cambridge. Massachusetts. Harvard University Press. xvii+357 pp.

En la misma obra: pp. xi-xvii. *Preface.* pp. 1-52. *Introduction. Metaphysics and exact science in the evolution of Kant's thought.* pp. 96-135. *Concepts and intuitions in the mathematical sciences.*

En la exposición que hace el profesor Friedman acerca de la teoría kantiana de la geometría se echa de ver fundamentalmente el deseo de salvar la teoría kantiana, aunque admita en diversos pasajes que algunas partes de la teoría sean insalvables. (Ver el tercer aparte citado). Concreto mi comentario a una explicación que el profesor Friedman cree haber logrado, la que se lee en las páginas 58-59:

Los postulados (axiomas se lee en el texto pero en Euclides, axioma es diferente de postulado) de Euclides no implican los teoremas de Euclides mediante solo lógica. Los postulados (se lee de nuevo axiomas) de Euclides no son los utilizados en la formulación actual. La concepción de la lógica en Kant no es nuestra concepción actual... Nuestra lógica a diferencia de la de Kant, es poliádica más bien que monádica (silogística). Nuestros axiomas para la geometría euclidiana son completamente diferentes de los postulados de Euclides en cuanto contienen una teoría del orden, explícita, esencialmente poliádica. Una diferencia central entre lógica monádica y poliádica es que esta última puede generar una infinidad de objetos, mientras que la primera no. Dado un conjunto consistente de fórmulas monádicas en las que haya k predicados primitivos involucrados, se puede encontrar un modelo que contenga a lo más 2^k objetos. En la lógica poliádica, es posible construir fácilmente fórmulas que tengan solamente modelos infinitos... Si uno hace deducciones a partir de una teoría dada utilizando únicamente lógica monádica uno podrá probar la existencia de a lo más 2^k objetos distintos... Así que la lógica monádica no puede servir de base para una teoría matemática seria, para una teoría que se proponga describir una infinidad de objetos (incluso «potencialmente»).

Hay proposiciones extrañas en toda la exposición del profesor Friedman. No cita la fuente de su distinción entre lógica monádica y poliádica, aunque en alguna parte parece atribuirle su inspiración a Russell. Dado que ha asimilado lógica monádica a silogística, en el sentido tradicional, ha de entenderse que se trata de relaciones entre parte y todo, donde el todo está dado. Entonces poliádicas son las relaciones con 2 o más lugares libres o variables; la prueba está en su insistencia en la teoría del orden, que, se ocupa de relaciones con por lo menos 2 variables. Pero, entonces, se trata de la nomenclatura clásica desde Peirce, creador de la teoría de relaciones: monádico se dice si hay una sola variable, poliádico si hay varias.

Cuando se estudia el silogismo se pueden ejemplificar las reglas de aplicación sea mediante proposiciones categóricas sea mediante formas proposicionales en las que tanto el sujeto como el predicado no están determinados; en este sentido, al traducirlos al lenguaje de conjuntos, S y P son conjuntos tales que $S \subset P$, y, $S \cap P \neq \emptyset$, relaciones estas que pueden ser negadas. Si tanto S como P son conjuntos no dados, entonces la forma proposicional respectiva es un predicado diádico con 2 lugares vacíos. Se puede o llenar dichos lugares o colocar 2 signos de objetos y cuantificarlos, si se quiere tener una proposición. La lógica tradicional generalmente se ocupa de relaciones entre parte y todo, en las que sólo queda un lugar por llenar, es decir, la forma proposicional contiene una sola variable: en este sentido puede decirse que la lógica silogística es monádica. Pero puede ser que los conjuntos estén dados, entonces, estrictamente hablando, no hay nada que llenar y no hay para qué hablar de monádico o de diádico. Es lo que comúnmente se hace al trabajar con silogismos en un curso de lógica.

No hay más precisión del sentido en el que se concibe la lógica silogística como monádica. El profesor Friedman no indica, ya noté, la fuente para la diferencia que fabrica entre lógica monádica y lógica diádica. Lo más parecido a esa construcción es lo que uno encuentra a propósito del teorema de Bernays-Schönfinkel [Hilbert y Ackermann p.144 y siguientes. Kneale pp. 399-400, 656, 675].

Sean $P_1,\ldots,P_m$ predicados monádicos y $K_1,\ldots,K_m$ las clases correspondientes a dichos predicados. Esto quiere decir que para todo x ocurre que x es elemento de un K_i, $1 \leq i \leq m$, cuando y solo cuando, $P_i(x)$ es verdadera. Entonces, Hilbert y Ackermann demuestran lo siguiente:

Teorema. Si un esquema **($P_1,\ldots,P_m$)** ***es válido en un campo de individuos que tiene 2^m elementos, entonces, es universalmente válido.***

Aquí se ve el sentido del enunciado. Si el esquema formado con sus predicados monádicos es válido para un conjunto de 2^m elementos (recordar que 2^m es el cardinal de un conjunto con m elementos, así que entra en consideración el conjunto de partes, lo cual es comprensible a priori) entonces el esquema es válido para cualquier conjunto de individuos. Nada de la restricción del profesor Friedman «a lo más 2^m objetos». Es posible demostrar más: un esquema del cálculo funcional monádico con m predicados será universalmente válido, si y sólo si, es válido en un conjunto con 2^m elementos. Ello de ninguna manera quiere decir que el esquema solo pueda ser válido en un conjunto finito con 2^m elementos, como parece ser entendido en el texto que comento.

El profesor Friedman introduce tal nomenclatura para defender una tesis. Afirma que «el sistema de Euclides no es una teoría axiomática en el sentido actual», con lo cual parece entender que la lógica de los Elementos sea fundamentalmente diferente de la lógica de los Fundamentos de la Geometría de Hilbert. Lo cual es falso. Lo acertado es precisamente lo contrario. La lógica sobre la que están edificados los Elementos es implícitamente la misma lógica que subyace a los Fundamentos. Hay imperfecciones lógicas en la obra de Euclides por haberse guiado éste por la intuición, puede decirse que de tipo espacial como la de Kant, así que no enuncia muchos principios, por considerarlos reales. La fundamentación de la geometría evolucionó de Euclides a Hilbert en cuanto se fue reconociendo la necesidad de explicitar las diversas hipótesis, tanto geométricas como lógicas, que finalmente sustentan a la geometría. Axiomática y geometría estaban intrincadas en los Elementos y están netamente separadas en los Fundamentos, «análisis lógico de nuestra intuición espacial». El libro de Hilbert aparece en un momento en el que la lógica, ya en manos de los matemáticos, había llegado a una etapa avanzada de su desarrollo, y la geometría igualmente había superado la etapa de ser única.

La explicación de la lógica, que se fue logrando poco a poco, o si se quiere, la creación lógica apropiada para colegir la corrección de los textos matemáticos, entre ellos el de Euclides, ha alcanzado el estadio de lo que actualmente se entiende por lógica, que consta de 4 grandes capítulos, en la presentación que de ella hacen Hilbert y Ackermann: cálculo proposicional, cálculo de conjuntos, cálculo restringido de predicados, cálculo generalizado de predicados. La lógica en la acepción de Kant, no va más allá de la lógica aristotélica; y ésta es apenas una parte de la lógica de conjuntos. Solo a partir de las investigaciones de Lukasiewicz en los años 20 y 30 del presente siglo, se vio la importancia del cálculo proposicional estoico. Los cálculos silogístico y proposicional estoico componen la herencia griega en lógica. Si se añade a los dos primeros, el cálculo restringido de predicados (únicamente se introducen cuantificadores de variables para designar individuos) se obtiene el llamado cálculo de primer orden. Si se considera además cuantificación de variables predicado de individuo se obtiene una lógica de segundo orden. Y así en adelante. Así se tiene la lógica clásica, de acuerdo con la cual ha sido creada casi toda la matemática, en particular, toda la matemática griega.

Si se cambiara la lógica, cambiarían los teoremas, pero otras lógicas solamente surgieron a partir de 1920, unos 140 años después de la Crítica de la razón pura.

El profesor Friedman parece pensar que en Euclides no aparece el orden; efectivamente, una de las varias nociones no explicitadas es la de orden; pero, desde luego, que el orden está implícito en diversas consideraciones. El aspecto cuantitativo de las magnitudes es especialmente apto para fraseología con la relación de orden, relación por lo menos diádica. «... es mayor que...», «...es múltiplo de ...», «... está en (entre) ...», son relaciones diádicas comunes en los Elementos. Cada vez que Euclides hace una bisección está utilizando una relación ordinal triádica: una recta, que resulta determinada al final del procedimiento, está, entre otras dos.

El estudio de las 2 obras maestras permite ver que cuando se toman los 20 axiomas de Hilbert entonces la geometría obtenida es, ni más ni menos, la de Euclides, pero ahora con todo el rigor que faltaba en los Elementos. La obra de Hilbert fundamenta no solo la de Euclides en los Elementos, sino toda la geometría (sin noción de diferenciabilidad) poco más o menos, en una, dos y tres dimensiones. El propósito de Hilbert no era demostrar muchos teoremas (en los Elementos hay 465; en los Fundamentos 68, enunciados, no todos demostrados) sino examinar las bases lógicas, investigación subsiguiente a la del hallazgo de geometrías no euclidianas.

Toda investigación vale, en particular la que intente salvar la filosofía de la matemática de Kant en su momento histórico; pero quien pretenda estirar dicha explicación hasta los fantásticos desarrollos que ha tenido la matemática en el pasado y en el presente siglo (por supuesto, después de Kant) no ha de contentarse con tratar de poner en pie ciertas conjeturas (al parecer ejercicio filosófico preferido al de estudiar la historia, en algunas universidades) sino comenzar por estudiar a fondo dichos desarrollos y por documentarse pormenorizadamente en textos que ante todo sean de buen recibo entre los mismos matemáticos; efectivamente «es tan raro ver a un matemático con una firme cultura filosófica como encontrar a un filósofo con extensos conocimientos matemáticos» (Bourbaki. p.22 *Éléments d'histoire des mathématiques*. (1969). 1974. Paris. Hermann. 379 pp).

Bogotá, 1993.