

APORTES EPISTEMOLOGICOS DEL HACER MATEMATICO

Javier De Lorenzo

RESUMEN: Frente a la Concepción heredada que ve la Matemática como un hacer formal o un mero instrumento lingüístico que nada dice acerca de la realidad, se pretende mostrar el aporte epistémico de la Matemática, y no sólo como objeto cultural, atendiendo a: 1. Su carácter constitutivo para las ciencias y para el razonamiento; 2. Su carácter condicionador para una captación de lo real. Es consecuencia de que en el hacer matemático se elaboran mundos posibles de lo real que condicionan los sistemas representacionales correspondientes y, con ello, lo que hay que observar, medir, novelar, componer... y conocer.

1. La que pudiera calificarse como Concepción heredada de la Matemática ha estado dominada por una visión de que las proposiciones que la componen son a priori y necesarias. Ello supone que el matemático utiliza la razón, de modo exclusivo, para descubrir o construir dichas verdades, que se muestran atemporales. Es una visión que se ha plasmado -con sus matices correspondientes- en las diversas escuelas de pensamiento que a lo largo de este siglo han dominado la Filosofía de la Matemática. Se ha hecho tópico afirmar que el matemático estudia: construcciones mentales en su propio espíritu, juegos de manipulación con signos sintácticos sin referencial o tautologías lógicas..., y son las escuelas intuicionista, formalista, logicista. Desde esta perspectiva, la Matemática aparece como un hacer que nada dice acerca de la naturaleza, de la realidad material circundante al hombre. Y es lo contenido en *boutades* como la de un primer Russell cuando indicara que 'en la matemática no se sabe de qué se habla ni si lo que se dice es verdad'.

En la misma línea, un primer Einstein, en «Geometría y Experiencia», aseguraría

Cuando las proposiciones matemáticas se refieren a la realidad, no son ciertas; cuando son ciertas, no hacen referencia a la realidad (1921: 171-172)

Influido por el avance de la axiomática, que traza una 'nítida' frontera entre lo lógico-formal y lo fáctico, Einstein avala la posición del neopositivismo al escindir la Matemática en pura y aplicada y de tal manera que la primera se ocupa 'únicamente de lo lógico-formal' y viene constituida por proposiciones a priori y analíticas. La parte fáctica, por su lado, es ciencia que cae bajo lo

natural, es ciencia aplicada. Desde este enfoque la Geometría formal, la Matemática, «nada dice acerca del comportamiento de los objetos reales» (id. 176) y sólo mediante la unión de sus axiomas G, puramente convencionales, con el contenido fáctico, empírico de las leyes P físicas, sólo G + P permite hablar de dicho comportamiento.

Refleja la Concepción heredada, o tópicos como los mencionados, una misma táctica calificable de humeana: ante la consideración de aprioricidad y analiticidad de las proposiciones matemáticas, ante la 'verdad' no empírica y la necesidad de las mismas, se pasa a sostener que la Matemática carece de contenido fáctico y, en consecuencia, de contenido epistémico. Con palabras de Carnap, en paralelo a las de Einstein, pero referidas a la Aritmética, a proposiciones como las que aseguran que 3 y 1 son 4, la Matemática «no nos dice nada acerca del mundo que habitamos» (1966:23).

En la Concepción heredada las proposiciones matemáticas son verdades lógicas vacías de contenido cognoscitivo, y lo son, en un primer momento, debido a su forma estructural lógica y de aquí, válidas en todo mundo posible, en todo universo que pueda ser descrito sin contradicción. En un segundo momento, el concepto de forma lógica se ve como problemático y su obligada caracterización y precisión conducirá a un giro lingüístico desde el cual se enfocan las proposiciones lógicas y matemáticas de tal manera que sólo tienen que ver con la sintaxis y el contexto de uso del lenguaje formal en el que se construyen:

todas las proposiciones de la matemática y de la lógica son asertos sobre el uso correcto de cierto número pequeño de palabras. Esta conclusión, si es que es válida, puede considerarse como un epitafio a Pitágoras

insistirá Russell (*Essays in Analysis* 1973: 306). Y aunque un constructivista pretenda dotar de contenido a las proposiciones matemáticas, esa dotación lo será con carácter estrictamente numérico y, por ello, permanecerá en el ámbito de lo a priori.

Ambito de lo a priori como propio del hacer matemático, enfrentado a lo que viene afectado por la experiencia sensible, por lo observable perceptualmente con la convicción, desde la Concepción heredada, de que la experiencia sensorial, lo perceptivo, son los únicos elementos que proporcionan o son la fuente del conocimiento.

Ambito de lo necesario y a priori, de la validez en todo mundo posible, de la validez de lo no-contradictorio, pero con la aceptación de que sólo hay un tipo de consistencia -la dada por un sentido único y absoluto del operador negación-

conlleva que las proposiciones de la Lógica y de la Matemática sean universales y neutrales. Constituyen la forma, nunca el contenido, del razonar, pero de un tipo especial del razonar: aquel que cae bajo la bivalencia veritativo-funcional.

Es concepción en la que se incardina, inmediata, una problemática, que aparece en las palabras que he citado de Einstein: si la Matemática se escinde en pura o lógico-formal y en aplicada, ¿cómo es posible que esa forma pura posea un poder instrumental tan fuerte? Es la problemática de la admirable efectividad y aplicabilidad del hacer matemático: es el misterio, enigma o milagro, de muy difícil explicación racional, en cuanto a la aplicabilidad de lo formal puro en lo material o fáctico por estar admitiendo, simultáneamente, su universalidad y neutralidad.

Y una observación: es una problemática que básicamente se incardina en la relación Matemática y Física aceptando que ésta es la disciplina más matematizada de las existentes y, desde la Física, se pasa a otras disciplinas calificables de científicas. Se margina, olvida o considera como inexistente la posible aplicabilidad de la Matemática a otros campos.

Esta posición encierra una serie de cuestiones. Entre otras, al mantener

- a. La escisión entre Matemática pura -formal- y matemática aplicada -fáctica- lo que se hace, en el fondo, es aceptar una escisión mucho más general y profunda. Lo que se hace es mantener una
- b. Escisión entre conocimiento puro y conocimiento científico, fáctico. Pero ello supone que aparezca como problema cómo alcanzar el conocimiento puro, si es que el mismo existe y no se mantiene la convicción de que hablar de conocimiento puro es simple metafísica a desterrar. Consecuentemente se mantiene
- c. La pertenencia de la Matemática a un mundo eidético formal -o puramente mental para un intuicionista o puramente signico material finito para un formalista- que nada dice de lo real. Es decir, y en concreto: por un lado, el instrumental matemático, inocuo en cuanto al conocimiento fáctico; por otro, la idea y el concepto físico, el contenido fáctico; y ambos lo que hacen es, simplemente, superponerse.

En la mezcla de estos problemas -y de algunos otros que aquí ni se mencionan- la Concepción heredada se sigue manteniendo, subyacente, en intentos renovadores como los que se pretenden en línea con la epistemología naturalizada de Quine, apoyada en argumentos de carácter holístico por los cuales se intenta eliminar la distinción entre lo a priori y lo a posteriori en el sentido de admitir la idea de que en la falsación de cualquier proposición interviene todo el bagaje teórico previo y, en particular, el lógico-matemático; o

en intentos como de los de quienes se autoconsideran portavoces de las 'nuevas' filosofías de la matemática porque olvidan la problemática de los fundamentos. Y rasgos de la Concepción heredada se mantienen, a pesar de que se hagan aparentes llamadas a semiempirismos o a la supresión de referentes para los objetos matemáticos, porque se acepta como problema esa irrazonable efectividad y se pretende dar cuenta de la misma. Por mucho semiempirismo, de palabra, se acepta la escisión de lo formal y lo material, se mantiene un enfoque formal, apriorístico, del hacer matemático porque, de lo contrario, tal problemática se hace inexistente.

Desde esta separación se admite que, de modo efectivo, la Matemática posibilita que la Física logre un conocimiento de lo real, se admite la Matemática como elemento imprescindible para la Física, pero con la convicción de que no interviene, en momento alguno, en el crecimiento del contenido real de ésta, ni siquiera en plan heurístico.

Y como explicación del enigma, la Matemática se enfoca como instrumento para el hacer físico, bien directo a través de lo formal de sus fórmulas, bien indirecto a través de la elaboración de modelos formales. Se enfoca la Matemática como el lenguaje para formalizar la experiencia que permite la formulación de leyes e hipótesis y, con ello, la obtención de predicciones de la manera más precisa y eficaz (Carnap: 1966). La Matemática se ve como el único lenguaje formal en el que expresar las leyes físicas y, por ello, permite justificar su irrazonable efectividad aunque, como mero lenguaje instrumental, no dé aporte epistemológico alguno.

2. Concepción heredada que, desde mi punto de vista, se muestra, si no insostenible, sí poco razonable, y por dos motivos que estimo básicos.

En primer lugar, si se acepta la crítica al lenguaje natural realizada desde Frege, desde Russell, si se aceptan las consideraciones de Condillac, Tarski, Quine... de que el lenguaje condiciona al pensamiento -y así el lenguaje natural, apoyado en la forma gramatical S-P, entraña una manera de pensar sustantivadora, ontologizadora sobre la que actúa a la vez el llamado contexto de uso- habrá que admitir, desde el propio punto de partida, y si se es consecuente, que la Matemática, aceptada como único lenguaje apto para la expresión de la Física, condiciona el pensamiento del físico, condiciona lo que en la Física va a ser estudiado y conocido. Si se es consecuente, aún enfocada la Matemática como mero lenguaje instrumental para la formulación de la Física, la Matemática ha de ser algo más que mero instrumento formal y tendrá algún aporte epistémico que habría que determinar ya que, como lenguaje, es un condicionador del pensamiento que lo maneja.

En segundo lugar, y más importante aquí: hay que reconocer un hecho que suele quedar oculto y más en momentos en los que se ha difundido la idea de que todo cae bajo lo científico y bajo lo tecnológico. Hay que reconocer que son muy pocos los fenómenos 'naturales' que pueden ser completamente descritos, explicados, predichos mediante el instrumental matemático; más aún, mediante el instrumental esbozado bajo la fórmula einsteniana de ser G+P la que posibilita estudiar el comportamiento de los cuerpos, de los objetos reales. Aún limitándome a la Física, hay que reconocer que incluso en Física fundamental, y con palabras de René Thom:

las grandes leyes clásicas (gravitación, electromagnetismo...) permiten edificar modelos cuya exactitud numérica desafía la imaginación. (...) Pero desde que se sale del dominio -relativamente estrecho- en el que esas leyes se aplican sin pérdida, la situación se degrada rápidamente (1982: 253)

La caída de una hoja, la inclinación de un árbol, el tono de un atardecer en primavera... no entran en juego; pero ni siquiera la estabilidad del sistema solar entraba en juego con el instrumental de las ecuaciones diferenciales de carácter 'cuantitativo' y había que construir las ecuaciones cualitativas; ni siquiera en teoría de fluidos las grandes leyes bastan y hay que ir agregando hipótesis ad hoc, leyes empíricas, aproximaciones...

Lo que hay que reconocer es que lo que entra en juego, realmente, para poder ser instrumentalizado por el hacer matemático -incluso no en sí sino, según la Concepción heredada, a través de la Física- no es lo estrictamente natural, esos objetos reales de los que hablara Einstein, sino un natural, una fisis previamente acotada y transformada por el hombre; no es la fisis, la naturaleza en su globalidad sino sistemas acotados de la misma y acotados desde una determinada perspectiva no global, perspectiva desde la cual sólo se tengan presente algunas cualidades o características ópticas de los sistemas considerados.

Hay que reconocer que en la naturaleza no hay rectas, ni curvas continuas y diferenciables en todos sus puntos, ni cuerpos rígidos, ni gases ideales, ni colores o sonidos puros, ni péndulos, ni sistemas solares de masas puntuales con trayectorias sin rozamientos... Los objetos y los sistemas de los que trata la fisis transformada, la Física, los objetos y sistemas que son materia apta para el hacer matemático, se encuentran en una naturaleza transformada, se encuentran en el laboratorio, en la industria, en los aceleradores de partículas, en la ciudad. Una ley física que enlaza conceptos como presión, volumen, densidad, sólo es factible cuando se manejan gases ideales en un primer momento y números reales: gases ideales, números reales, elementos de una naturaleza transformada por la especie humana que se ponen en interrelación en ese enlazamiento y no por suma a lo G+P como indicaran Einstein y los empiristas y neopositivistas, sino en una interrelación conceptual, interrelación

sólo factible por una previa transformación en la que interviene de modo sustancial la Matemática porque en ella muestra, por una parte, su carácter de imprescindible; por otra, su instrumentalización efectiva. Y muestra esas dos caras porque para que se alcance tal transformación, el hacer matemático se presenta como elemento esencial constitutivo de lo conceptual y, de aquí, se hace irrazonable mantener la escisión entre lo formal y lo material, se deshace el problema de la irrazonable o enigmática aplicabilidad de lo formal en lo material.

3. Dos razones que justifican adoptar una concepción muy diferente a la mantenida en la heredada. Una concepción que ahora parte de la postulación de que el hacer matemático es un proceso y un producto humano -de algunas subespecies humanas, para ser preciso. Como proceso y producto depende, claramente, de unas situaciones temporales y sociales. Pero no mera dependencia sino interdependencia.

Inmerso en la historia el hacer matemático depende, en su elaboración, tanto de su proceso interno como del contexto en el que se produce. En su interior, cabe analizar sus distintos estilos -metodología propia para localizar temas y procesos- o sus distintos haceres -metodología para situar esos temas y procesos en un contexto más amplio-. Pero ese análisis interior no puede desprenderse de su contexto exterior -como se ha venido haciendo- salvo convertir el hacer matemático en algo idealizado, miembro de un mundo eidético que nunca se ha sabido dónde colocar adecuadamente y que, como consecuencia, no se sabe muy bien cómo justificar sus aportes epistémicos, su interacción con un mundo real o natural.

Es concepción que obliga a situar a la matemática, como proceso, en su contexto cultural, aceptando que no es más que reflejo y condicionante de la evolución de una subespecie: la occidental -mercantil burguesa, capitalista. Y es desde esta posición desde la que cobra su valor la afirmación de que el hacer matemático no es únicamente elemento instrumental por ser sólo lingüístico, sino que es constitutivo o matriz de lo epistemológico, y como tal elemento constitutivo es, claro, imprescindible.

Bien entendido -e insisto-: al hablar de lo epistémico acerca de una realidad, se trata de una realidad transformada por el hombre, la cultura, la sociedad, los artefactos... Un real que, como ya señalara Platón en su alegoría de la línea (*Rep. Libro VI*), interpretada en su sentido epistemológico y no ontológico, es lo compuesto, en un primer segmento, por: imágenes; hombres, animales...; artefactos; y en un segundo segmento, por conceptos. La Matemática aporta el conocimiento de lo real de este segundo segmento, de los conceptos, aunque sea aplicable al primer segmento siempre que se enfoquen los elementos de éste no como se muestran sino como transformados en magnitudes.

En este sentido la Matemática no estudia las imágenes o las propiedades físicas concretas, los objetos particulares, propios del primer segmento, sino formas y propiedades de esas formas -geométricas y topológicas, estructurales, numéricas- en distintos niveles y perspectivas. Formas conceptuales que son espacios, modelos o estructuras, que conllevan la posibilidad de crear sistemas de representación materiales, dentro del cuadro marcado por las nociones previas matemáticas.

Un posible dar paso constructivo gracias al previo dato de unos conceptos-núcleo que son elementos constitutivos a priori. Un a priori constitutivo que hace referencia a lo que está puesto en primer lugar, como necesario aunque no suficiente, pero no a estado de conocimiento.

4. He indicado que, de modo tradicional, el posible aporte epistemológico de la Matemática se relaciona de modo casi exclusivo con el papel que pueda tener en relación con la Física. Si se ve sólo como soporte lingüístico para ésta, se pretende su generalización, también instrumental, para otras disciplinas sin que en ellas influya en cuanto al aumento cognoscitivo de las mismas, ni en un plano heurístico respecto al investigador ni, mucho menos, en los aspectos metodológico u ontológico.

Frente a esta visión, cabe afirmar que, condicionada, la Matemática condiciona, a su vez, el desarrollo de cierto tipo de sociedad al ser elemento constitutivo para el conocimiento. Factor constitutivo en distintos planos y no sólo en su relación con la Física. Así, puede afirmarse que lo es para:

- a. una determinada captación y organización del mundo;
- b. la racionalidad conceptual, para el razonamiento;
- c. las Ciencias Físicas y el saber científico en general;
- d. hasta para la elaboración de obras literarias o plasmación de movimientos artísticos como los vanguardistas...

Brevemente, esbozo alguno de los elementos básicos que conllevan las afirmaciones anteriores en aspectos que van, claramente, más allá de lo epistémico puro.

El hacer matemático interviene en cuanto a la concepción o visión que del mundo llega a tener la especie humana. Lo hace a través de las distintas Burbujas o Ambitos en los que el hombre se encuentra escindido. Como he venido sosteniendo en otros lugares, según las distintas Burbujas en las que se encuentra inmerso el individuo se tienen diferentes formas de hacer matemático: hay un hacer matemático simbólico, uno conceptual, uno computacional.

Bajo lo simbólico hay sociedades que han desarrollado la técnica de manera impresionante. Así, la China coetánea de la Europa renacentista poseía una técnica muy superior a la europea. Superioridad técnica que China mantendrá

unos dos siglos más. En ese tiempo Europa pasa a un tipo de sociedad en la cual se elabora una Matemática conceptual apoyada tanto en la Geometría sintética como en el Cálculo infinitesimal y, con ella, se obtiene una Física y una ciencia que en su unión con la técnica posibilitan un fuerte y continuado desarrollo tecnológico. En ese tiempo, China permanece bajo la Burbuja simbólica. Y esa permanencia impide que la Matemática dé el salto conceptual, la ruptura epistemológica que permita su transformación y, con ella, el de la Física. Consecuentemente, China queda marginada en el desarrollo tecnológico posterior.

De modo análogo cabe considerar el s.XVI español como uno de los momentos de mayor desarrollo técnico, incluso equiparable al Siglo de Oro literario; pero España permanece bajo un Ambito simbólico y la Matemática se enfoca o bien como un hacer propio de ese Ambito -así el tratado del cubo y la esfera de Herrera, las exigencias de aprendizaje del cuadrivium a los médicos para mantener el principio de correspondencia entre el micro y el macrocosmos...- o bien como instrumento de cálculo para contar y medir, mero instrumento al servicio de la técnica. Consecuentemente, España va a quedar en muy segundo plano en lo organizativo-social.

Y si el mundo está escrito en lenguaje matemático, como sostenían hermetistas, alquimistas y cabalistas, lo está en una criptografía inmersa en la red de las palabras, en las Escrituras y Libros sagrados asociados. Y la Matemática es clave, como hacer simbólico, para el desciframiento de ese lenguaje y para expresarse en él; expresión con la que se logra manifestar el orden del cosmos que está hecho conforme a número, peso y medida. Orden del cosmos que se manifiesta en la elaboración arquitectónica, en el trazado de las ciudades que rompiendo la visión central del Paraíso o ciudad amurallada con su centro en el Palacio y la Catedral, se hacen a escuadra con su centro ahora en la Plaza Mayor porticada con su Ayuntamiento y Catedral...

Frente al hacer simbólico y al perceptivo, el hacer conceptual también va a considerar, en un primer momento, que la naturaleza está escrita en lenguaje matemático. Pero ahora la naturaleza que así está escrita no es el espacio natural, sino un espacio conceptual, establecido al modo geométrico: un cosmos homogéneo, isotropo, ilimitado, vacío en el que se pueden introducir sistemas de coordenadas que permiten identificar cada uno de los puntos, pero también se pueden introducir masas puntuales que, bajo la noción de fuerza, describen trayectorias sin rozamientos, curvas dadas por funciones analíticas, diferenciables y continuas en todos sus puntos. Y esto último equivale a afirmar que en ese cosmos se puede conocer la tangente o velocidad y la aceleración, es decir, se puede conocer la trayectoria, el comportamiento de un sistema puntual no sólo en su totalidad, sino en cada uno de sus puntos. Pero equivale a afirmar, igualmente, que es en el interior de este espacio conceptual matemático en el que surgen

conceptos físicos como velocidad instantánea, aceleración, y no como conceptos yuxtapuestos a un lenguaje formal, sino como conceptos sólo caracterizables en dicho espacio, intrínsecos al mismo. Y a la inversa, dadas las fórmulas diferenciales en un punto cabe conocer, por resolución de la ecuación o del sistema de ecuaciones diferenciales, y teniendo presente las condiciones iniciales, la trayectoria o función global, el comportamiento del sistema como un todo, clave para la predicción que se ha identificado, erróneamente, con determinismo.

Bien entendido que, en ambos casos, se trata del comportamiento -ya local, ya global- no de un sistema 'natural' sino de aquel sistema dinámico que sea compatible, que pueda estar inmerso en el espacio conceptual matemático. Como señalara Galileo nitidamente -en paralelo a la alegoría citada de Platón- no se está hablando del espacio que nos rodea, sino de un espacio -a distancia infinita del nuestro, serían sus palabras- donde los sistemas dinámicos inerciales carecen, por ejemplo, de rozamiento.

La puesta en marcha de la racionalidad conceptual, diseccionadora o analítica *junto a*, pero, más importante, *frente a* la racionalidad sintética o global de lo Simbólico, *frente a* lo estrictamente empírico o perceptivo, provoca la creación de una escisión entre un mundo conceptual y un mundo natural, con la valoración o apuesta ahora por lo conceptual en el sentido de que se estima como el que da el saber verdadero, mientras que el natural ha de ser acotado en cuanto a los fenómenos a estudiar y conocer. Acotación que dará, únicamente, aproximaciones a lo veritativo porque es el sistema del mundo conceptual el que se convierte en modelo al cual tiende lo natural. Término de aproximación que carecería de sentido si no se tuviera, de antemano, el modelo al que 'imitar'.

Si la Matemática era elemento básico para la expresión y captación de lo global en lo simbólico a través de la numerología y las proporciones de las figuras geométricas, la Matemática, en lo conceptual, sigue siendo clave para la comprensión y conocimiento de la fisis, de la naturaleza. He indicado, desde un plano epistémico sólo la Matemática producirá el conocimiento cierto, verdadero de la fisis; cualquier disciplina que pretenda alcanzar un conocimiento del mismo tipo tendrá que seguir su configuración. Y, en ella, como uno de sus elementos básicos, tendrá que seguir el método matemático, establecer sus principios, expresarlos en fórmulas o ecuaciones, única manera de convertirlos en leyes, y a continuación, elaborar la disciplina deductivamente. Y Galileo, Descartes, Leibniz, Newton -por no decir, Spinoza, Hume...- tratarán de captar principios físicos -aquí de fisis, naturaleza, que comprende la naturaleza social y la humana- pero como principios matemáticos. Y ello significa que, gracias al razonamiento, se pueden estudiar los fenómenos de dicha fisis.

Pero el método matemático no se centra en sólo lo deductivo como se quiere ver desde una óptica tradicional, lo deductivo es consecuencia, a veces instrumental, del método matemático. Lo importante es observar que el matemático no sólo busca proposiciones, teoremas y demostraciones de las mismas. El matemático, en su hacer, construye espacios o mundos imaginarios -que vienen a calificarse de modelos- que son los que ha de imitar lo real y es en estos mundos en los que, ahora sí, busca propiedades y relaciones que en él se satisfagan. Pero también son modelos posibles matemáticos de lo real en los que pueden establecerse y definirse unas determinadas relaciones físicas.

Modelos matemáticos a través de sus distintos haceres como el representacional o figural, global o estructural, computacional. Modelos que permiten describir, actuar, transformar aquello que representan y que se convierten, a su vez, en objeto de estudio. Como tales requieren de herramientas propias como son el signo escrito y la figura, el proceso deductivo, el proceso computacional. Como modelos, son polimorfos y hacen aparecer nuevas propiedades -que hay que comprobar o demostrar- y nuevos objetos cuya existencia hay que construir desde lo figural, demostrar desde lo global, computar desde lo computacional. Y ello porque en tales marcos se manejan significados y representaciones mentales y no sólo procesos lingüísticos sintácticos formales sino que entran en juego construcciones directas -bajo lo perceptivo-, indirectas -bajo lo descriptivo-, imágenes, analogías...

Por mero ejemplo muy elemental y en el interior de un marco representacional o figural: Sea Σ una superficie esférica -el solo enunciado indica que el marco es el de la Geometría métrica euclídea; si se toma un arco de longitud d sobre un círculo máximo, se encuentra que la proporción entre d y la longitud L de la superficie esférica es igual a la proporción entre el arco interior α que subtiende d y los grados de la circunferencia total 360° . Se tiene $d/L = \alpha/360$, con $L = 2\pi r$, siendo estas afirmaciones proposiciones a demostrar. Si se sale del interior de este marco matemático y se lo enfoca como un modelo posible de lo real, si ahora se identifica la tierra con la superficie esférica Σ , puede obtenerse, y no de modo inmediato sino mediante un trabajo experimental guiado por el modelo esférico, el valor del radio de la Tierra. Si acudiéramos a lo estructural, cabe estudiar una noción como la de grupo y sus propiedades y la de los subgrupos correspondientes; y, al salirse del interior del hacer matemático y tomarlo como modelo posible de lo real, puede interpretarse tal estructura desde disciplinas como la cristalografía, la antropología, la Física de partículas...

Por un ejemplo y más desde lo exterior, desde la concepción del hacer matemático como modelo posible de lo real: el matemático construye espacios homogéneos en los que prima la proporcionalidad numérica como clave para el comportamiento de objetos individuales, y se tiene el tipo de física elaborado por

Galileo, básicamente figural; o construye espacios con un concepto-núcleo como el de linealización y posibilita el estudio de sistemas inerciales dinámicos en el que cobran todo su sentido las relaciones conceptuales de la Mecánica newtoniana clásica; o, a través de las geometrías diferenciales, construye espacios de curvatura variable en el entorno de cada uno de los puntos y establece la posibilidad de expresar relaciones espacio-temporales dependientes de la distribución masa-energía y, con ello, aparece la posibilidad de crear una teoría de la relatividad general, inviable en un cuadro como el que posibilita la mecánica clásica.

Los modelos posibles matemáticos de lo real -en lo figural, lo global, lo computacional- son los que, al construirse conceptualmente, determinan las propiedades de los objetos conceptuales, de aquellos que pueden pertenecer a esos modelos o espacios. Modelos posibles matemáticos de lo real o marcos contruidos al intentar captar unos conceptos-núcleo que, posteriormente, podrán sistematizarse mediante su formalización en sistemas axiomáticos. Sistemas axiomáticos que nunca podrán captar, en su totalidad, la totalidad de esos conceptos-núcleo, por lo que dichos sistemas no pueden estimarse como únicos.

Construcción de modelos posibles que sólo la experiencia permitirá señalar como factibles a alguno de ellos, sólo la experiencia permitirá delimitar aquellos sistemas acotados que puedan corresponder a tales modelos posibles de lo real. Teniendo presente que esa experiencia viene condicionada, por sucesivamente enriquecida, por el dato previo de los sucesivos mundos contruidos desde lo conceptual.

Esos modelos también condicionan la manera de enfocar las leyes físicas, las propiedades y relaciones a considerar. Así, si se parte del marco previo del Análisis infinitesimal, con sus conceptos de infinitésimos, proporcionalidad y linealización, las leyes físicas que pueden estimarse como centrales del cosmos van a plasmarse en fórmulas dadas por ecuaciones diferenciales, y esas leyes físicas, las que rigen a las demás, no van a ser otras que las que expresan propiedades compatibles con el marco homogéneo, ilimitado, isotropo, vacío... Compatibilidad manifestada, precisamente, en principios como los de conservación: de energía -que se irá desglosando en distintos aspectos como en potencial gravitacional y cinética, eléctrica, gravitatoria, elástica...-, de cantidad de movimiento o impulso, de momento cinético... Si el punto de partida viene dado por espacios con estructura algebraica, las leyes a considerar como centrales serán aquellas que permanezcan invariantes mediante transformaciones dadas por ciertas simetrías, que pueden ser internas y no externas como las establecidas por traslaciones de coordenadas espacio-temporales, así como por simetrías locales o dependientes de los puntos del espacio-tiempo que sirven de base al espacio de estados internos (Cfr. Boutrot). Si el marco de partida es el Cálculo de Probabilidades, las leyes vendrán en función de los grandes números.

No sólo las leyes físicas: es en el marco previo en el que se constituyen los conceptos científicos, conceptos que no se muestran como meros yuxtapuestos a unas fórmulas o leyes formales matemáticas. Y he hecho referencia a conceptos como velocidad instantánea o aceleración, sólo factibles en el marco de un espacio matemático determinado. O, en términos más generales, los conceptos científicos, bien cualitativos con su relación de equivalencia asociada; o bien cuantitativos, o magnitudes, extensivas o intensivas, con sus obligados teoremas de representación y de unicidad que conducen a medir lo que la estructura relacional acotada señala que puede medirse.

Lo que quiero indicar es que el marco matemático no puede considerarse como simple elemento lingüístico al que habría que agregar unos conceptos 'materiales', sino que el dato de ese marco es el que establece un punto de partida mucho más importante: determinar los elementos ónticos que pueden ser estudiados en su interior. He indicado que la Física nueva acepta como punto de partida, como su dato constitutivo a priori, un espacio homogéneo, isotropo, ilimitado, vacío; esa aceptación supone que en dicho espacio no cabe estudiar objetos que sean incompatibles con las notas determinativas del mismo. Sólo serán cualidades ónticas a estudiar y experimentar las que puedan 'entrar' en este marco: las cualidades que se calificarán de primarias de los cuerpos, es decir, las reducibles a masa, aceleración, fuerza. Reducibles a esas notas por lo cual se obliga a una transformación de lo que calificar real, a una transformación también de lo que en ese real ha de ser obsevado, estudiado, experimentado... y sólo serán objetos reales los que posean esas cualidades ónticas y, por ello, se perciban a través de las mismas. Cualidades ónticas que, precisamente, son notas esencialmente antiperceptivas. Pero, con ello, se logra una transformación de lo que estimar percepción y, claramente, de lo que llamar empírico.

Transformación de lo perceptivo y empírico que ha llegado al extremo de que algunos autores han sostenido que el espacio euclideano era el espacio natural cuando el espacio posible métrico euclídeo es el más antiperceptivo que existe.

Por otro lado, gracias al modelo matemático que aporta la captación de los principios y, consecuentemente, de conceptos calificables de científicos, se puede trabajar en lo epistémico sin tener que recurrir obsesiva y constantemente a la observación, siempre imprecisa. Observación que ha de hacerse en un momento posterior a la constitución del marco científico, porque es éste el que posibilita saber qué es lo que hay que obsevar, medir, cuantificar. Y dos puntos: por un lado, el modelo matemático es mucho más potente que lo natural observado pero requiere, siempre, de la particularización a ese observado; por otro lado, la observación no es sólo imprecisa sino, en ocasiones, imposible.

En cuanto al primer punto, el cuadro previo es clave para el experimento porque es el que colabora en el establecimiento de los protocolos necesarios -de preparación, de experiencia- que sólo pueden tener sentido una vez que se ha acotado y transformado lo natural para, en esa acotación y transformación, realizar cualquiera de las funciones exigibles al experimento. Funciones del experimento entre las que señalo: la falsación de una proposición ya obtenida deductivamente en el interior del sistema conceptual, la obtención de una proposición nueva consecuencia de los trabajos realizados en el laboratorio o función de soportar el lenguaje de descubrimiento, mantener un proceso constructivo teórico en la interrelación teoría-aparato-técnica, facilitar el dominio social de la disciplina a quienes trabajan en el laboratorio.

El establecimiento de acotación y transformación del sistema 'natural' -es decir, del campo en el que se va a experimentar-, de protocolos, de pruebas, de funciones... es lo propio de lo que se denomina experimento científico. Todo un haz de elementos conceptuales, teóricos y técnicos que no suelen tener presente quienes hablan del carácter semi-empírico del hacer matemático desde la epistemología naturalizada y que conducen a identificar 'a priori' no con elemento constitutivo sino con simple estado de conocimiento.

En cuanto al segundo punto de los señalados, en cuanto a la potencia del modelo posible matemático de lo real respecto a lo observado, he indicado que a veces esa observación es inviable fácticamente, pero ello no implica que, desde el modelo posible de lo real, no se establezca la existencia y propiedades de unos elementos que, por principio, se presenten como inobservables. El modelo posible matemático de lo real tiene, así, no sólo un papel epistémico sino uno ontológico, existencial. Papel que obliga, a su vez, a una heurística para tratar de alcanzar el conocimiento de esos elementos predichos desde lo conceptual, inexplicable desde la Concepción heredada.

Cuando se adopta, como los geógrafos helenos, el modelo esférico para la tierra, se hace inviable observar la parte invisible de la esfera, lo que no es obstáculo para afirmar la existencia y el comportamiento de los elementos que en ella tienen que encontrarse; no es obstáculo para afirmar la existencia del polo sur, si estamos en el norte, o la existencia de una esfera local para la cual los polos están en el horizonte, o el comportamiento de las estrellas circumpolares. Con palabras de Gémino

No tenemos ninguna información correcta sobre este punto, pero dado el sistema esférico, la matemática quiere que...

O, en términos más recientes, 'la matemática quiere que' existan ontológicamente unas determinadas partículas o una determinada simetría no previamente observada, y ello porque se parte del modelo posible de grupo.

Debo señalar -y es insistencia- que el modelo matemático sólo es de lo posible, quiero decir, no afirma que el espacio construido sea 'el' espacio -los geógrafos helenos no sostienen que la tierra es una esfera-, sino que sus construcciones señalan qué tipo de espacios son los posibles reales y es sólo la experiencia la que permitirá elegir entre los construidos por el matemático. Construcción siempre, y vuelvo a insistir, en función de unos determinados contextos sociales y temporales, de contextos condicionados también por la Burbuja en la cual se encuentre inmerso el matemático, que hacen que tales construcciones de lo posible no sean meras elucubraciones formales.

5. Desde la Burbuja conceptual el hacer matemático tiene un papel no sólo en cuanto a su hacer interno reflejado en unos estilos y haceres propios, sino que tiene el de constituir y plasmar la racionalidad conceptual. En esa labor la Matemática no aporta única y exclusivamente un instrumental formulístico, sino que comporta, por elemento constitutivo, una heurística e incluso un papel ontológico que se refleja en la aceptación de magnitudes inobservables o magnitudes imposibles, pero no simbólicas, como los números negativos carentes de magnitudes como referenciales, o los complejos, imaginarios o ideales pasando por los irracionales... Su manejo sólo puede venir dado, al carecer de referencial, por la razón metódica conceptual y, con ella, por mecanismos demostrativos que no implican mecanismos de derivación sintáctica formal -salvo en el Ambito Tecnológico, donde la demostración-derivación se convierte en algoritmo computable, y razonar no es más que una parcela de computar-, sino mecanismos constructivos que permitan comprobar que, de modo efectivo, se cumple lo puesto en los principios o postulados; más, que las proposiciones demostradas satisfacen las notas ónticas de los marcos delimitados por los conceptos-núcleo correspondientes.

En este plano de constituir y plasmar lo racional conceptual, cabría señalar cómo son los matemáticos los que discuten leyes lógicas como la denominada ley de Clavius por Russell-Whitehead o los procesos demostrativos que se incardinan en esas magnitudes imposibles elaborando, si es preciso, y en búsqueda de eliminarlas por la problemática ontológica que entrañan, sistemas formales, algoritmos de formalización de series a lo Euler o Lagrange...

Bastaría recordar el papel que la Aritmética superior va a tener para la crítica a la forma S-P y, con ella, para la creación de las conceptografías y los sistemas formales correspondientes, convirtiendo la forma lógica -o más bien matemática- en función y argumento y, consecuente con la aceptación del papel del lenguaje y su influencia en la captación del mundo, anteponer una visión funcional al enfoque sustantivador existente desde la aceptación de la forma gramatical anterior.

La Matemática no se me presenta sólo como condicionadora de asentamiento de lo conceptual y, con ello, de formas de razonamiento. He señalado un elemento mucho más sutil: el manejo de las cantidades imposibles, de las geometrías no-euclídeas -y hago referencia a las geometrías diferenciales y no por modo exclusivo a lo que se denomina geometría no-euclídea métrica- posibilita romper con elementos de carácter ontológico y sustantivador apoyados en lo referencial material objetual. Posibilita la creación de mundos conceptuales, racionales y no simbólicos -mundos ideales a los que muestra su rechazo un Kant, por ejemplo-, con más de tres dimensiones o con curvatura variable en cada punto... La problemática de reificación clásica, sustantivadora, queda desde estas construcciones en radical entredicho. Problemática que se incardina de modo absoluto en lo epistémico, en esa pregunta de qué podemos conocer y cómo lo podemos conocer. Un qué, un cómo subordinados desde lo fiscalista, y desde cualquier intento empirista, a lo observacional perceptivo, como si la razón no pudiera crear mundos conceptuales que posibilitan su posterior plasmación en lo observacional y empírico, un observacional empírico previamente transformado desde lo conceptual.

6. Condicionado, el hacer matemático no condiciona tan sólo un tipo de racionalidad interior a la Burbuja conceptual y, en ella, unos tipos de hacer como los incardinados en las disciplinas calificables de científicas. Si elementos como los antes mencionados son algunos que comportan el papel del hacer matemático para el ámbito conceptual y no reducido a lo sólo epistémico, la escisión provocada por la ruptura epistemológica de alcanzar lo conceptual desde lo simbólico y, consecuentemente, el paso de una fisis a una Física, refleja la escisión que se produce en el hombre al tener que distinguir entre verdad racional y verdad simbólica o revelada en cuanto al plano individual, con su secuela de distinción entre fe y obras; escisión del hombre ahora enfrentado a la naturaleza y no sólo inmerso en ella. Es el reflejo de la escisión que se produce en lo social, en el paso de una sociedad desde lo Simbólico a una sociedad que se transforma en Sociedade civil, pretendidamente racional o conceptual. Un paso que involucra el establecimiento de Constituciones y Leyes; de parlamentos enfrentados a la estructuración jerárquico-simbólica, establecimiento que en muchos momentos tiene como modelo el matemático: más, la razón conceptual analítica que el mismo encierra.

Razón conceptual por la cual desde lo Simbólico va a ser denostado y atacado el hacer matemático, por la conversión que supone anteponer la fe en la razón conceptual a la fe en la razón simbólica, en la verdad revelada; o el intentar la identificación de alguno de los mundos posibles matemáticos con el considerado mundo real, natural, del que se despojan sus cualidades mágicas y simbólicas.

En lo conceptual el Análisis infinitesimal exige manejar el concepto-núcleo de indivisible, infinitésimo o diferencial con el concepto-núcleo de linealidad. Infinitésimo que, en su individualidad, es idéntico a los demás reflejando en su composición como triángulo característico el comportamiento de la curva en cada uno de sus puntos, curva explicitada por una ley, ecuación o fórmula a la que a la vez viene sometido, pero dando, en la suma de una totalidad de infinitésimos, el arco de curva o la integral, la longitud o el área correspondiente. De la misma manera, el individuo social, igual en derechos y deberes a los demás, en su unión de iguales, dará paso al comportamiento de la sociedad civil como un todo, bajo una ley que subsume a ese individuo.

Y no es mera analogía literaria sino la afirmación de que el hacer matemático se ha constituido como uno de los subsistemas clave para la evolución del sistema social occidental y, con él, en estos momentos, del sistema social general. Y, de aquí, la negativa a aceptar la pretendida neutralidad y universalidad atribuidas al hacer matemático desde la ideología que subtiende la Concepción heredada y sus herederas, ideología que ha posibilitado, precisamente, y desde su enfoque formal lingüístico del hacer matemático, el desarrollo de lo computacional.

Se podría desarrollar la afirmación anterior poniendo en relación el hacer no sólo Figural, como en las palabras anteriores, sino el Global, que parte del concepto de sistema, agregado o conjunto en el que la naturaleza de sus elementos llega a no importar, en el que esos elementos vienen dados por la propiedad caracterizadora del conjunto, con el surgimiento de unos enfoques en la Biología en los que prima la especie -cuyas propiedades caracterizan a sus miembros- siendo tal especie la que evoluciona, rivaliza con otras...; o en política, la aparición de las clases sociales o las nacionalidades... Elementos conceptuales, científicos, políticos, económicos, propios del s. XIX.

O, en este siglo, los enfoques computacionales, básicamente organizativos y estructurales, que reflejan el paso de una Burbuja pretendidamente conceptual a una Burbuja Tecnológica, con sus repercusiones claras en los haceres matemáticos y la influencia de éstos, en reciprocidad, para la plasmación más o menos definitiva de tal Burbuja organizativa.

7. El hacer matemático, una clave en la visión y desarrollo de alguna de las subespecies humanas que ha impuesto su visión a las demás. La Matemática, con sus aportes en lo epistemológico y, más aún, en lo heurístico, metodológico, ontológico...

Permítanme terminar, ya que no entro en otros condicionantes y reflejos del hacer matemático, con una cita, larga cita, de una novela. En *El hombre sin atributos* se puede leer:

en ella (la Matemática) está la nueva lógica y el espíritu en su misma esencia, en ella están las fuentes del tiempo y la génesis de una transformación formidable. (.) Hemos conquistado la realidad y perdido el sueño. (.) No es necesario dar muchas vueltas a esto: hoy día aparece evidente a la mayor parte de los hombres que la matemática se ha mezclado como un demonio a todas las facetas de la vida. (.) Hubo gente que predijo el hundimiento de la cultura europea porque había desaparecido del corazón del hombre la fe, el amor, la sencillez y la bondad; y es significativo que todos ellos habían sido, de estudiantes y en su juventud, pésimos matemáticos. Con ello ha quedado demostrado más tarde que la matemática, madre de las ciencias exactas, abuela de la técnica, fue también matriz de aquel espíritu que engendró los gases asfixiantes y los aviones de combate. (48-49).

BIBLIOGRAFÍA

- BOUTOT, A., 1990
«Mathématiques et ontologie: Les symétries en physique.» *Revue philosophique* 3: 481-519.
- CARNAP, R., 1969
Fundamentación lógica de la física. Trad. N. Miguens de *Philosophical Foundations of Physics*, 1966. Ed Suramericana.
- DE LORENZO, J. 1971
Introducción al estilo matemático. Ed. Tecnos. M. 1989.
- DE LORENZO, J. 1992
Experiencias de la razón. Ed. Univ. Va.
- DE LORENZO, J. 199?
«Dónde situar la Matemática y La razón constructiva matemática y sus haceres». *Mathesis*. México. (a aparecer)
- EINSTEIN, A. 1980
Mi visión del mundo. Tusquets Eds. B. En particular, «Geometría y experiencia» (1921): 171-181 y «Acerca del método de la física» (1930): 153-161.
- HOLLAND, R.A. 1992
«Apriority and Applied Mathematics». *Synthese* 92:349-370.
- MUSIL, R. 1969
El hombre sin atributos. Seix Barral. B.
- SHERRY, D. 1991
«The Logic of Impossible quantities». *Stud. Hist. Phil. Sci.* 22-1:37-62.
- THOM, R 1982
«Mathématique et théorisation scientifique». En *Penser les mathématiques*: 252-273. Ed. Seuil. París.