EL TIEMPO Y LA TEORIA DE CONJUNTOS[1]

Jose M. Muñoz Quevedo
Universidad Nacional de Colombia.

Resumen: Después de algunas consideraciones sobre el concepto «tiempo», se bosqueja la forma como se puede hacer una legítima teoría temporal de conjuntos, en la cual todos los conjuntos no existen simultáneamente, sino que el universo conjuntista se va expandiendo con el tiempo. Para ello se usa un cálculo predicativo temporal de tipo modal, evitándose con ello la cuantificación sobre el tiempo. Se muestra la forma como el tiempo influye sobre el universo conjuntista y recíprocamente, cómo la validez de ciertas propiedades deseables de los conjuntos, condicionan la estructura temporal.

1. Consideraciones iniciales.

¿Qué es EL TIEMPO? ¿Existe realmente o es tan sólo una invención del hombre?

Durante miles de años se ha tratado de dar respuesta a estos interrogantes, sin llegarse a una definición o a una explicación que nos satisfaga plenamente. Es extraño, pero vivimos en función del tiempo, nos vemos limitados por él, y sin embargo no sabemos lo que es. El tiempo no se ve, ni se oye, ni se palpa; está fuera de nuestra inmediata percepción sensible; no cae dentro de nuestra experiencia sensorial.

El tiempo no es una propiedad de la materia; en el terreno de lo físico, objetivo, e independiente de nosotros, no hay tiempo. Fué Kant quien afirmó que el tiempo no es algo que existe en sí mismo de manera independiente del sujeto, sino que es un producto de la mente, una parte de nuestra estructura psicológica. Heidegger propuso que la existencia humana, más que un modo espacial de ser,es un modo temporal de ser. De acuerdo con esta perspectiva, nosotros somos en el tiempo, pero no existimos en él, sino que más bien el tiempo existe en nosotros. Así, el tiempo no sería una condición de nuestra existencia, sino que nosotros somos la condición de existencia del tiempo.

---

[1] Este trabajo ha sido elaborado dentro del proyecto de investigación *El tiempo en la lógica y la teoría de conjuntos*, cofinanciado por COLCIENCIAS, la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia y el CINDEC, entidades a las cuales estoy altamente agradecido.
También estoy en deuda con el profesor Xavier Caicedo F., quien me planteó este tema de investigación y me ha orientado en él, y con el profesor Jorge Páramo por la influencia que han tenido en mí sus valiosas ideas sobre el concepto de tiempo.

La noción de tiempo es entonces secundaria, derivada; ¿Cómo llegamos en nuestras mentes al concepto de tiempo? Su fundamentación objetiva la constituyen las sucesiones de acontecimientos reales. Estas sucesiones son perceptibles, objetivas y registrables. Por acontecimiento se entiende un suceso cualquiera, y no necesariamente un «suceso importante». Entre los acontecimientos están aquellos experimentados por el sujeto en un momento dado, lo mismo que aquellos de los cuales el sujeto tiene memoria en ese instante, y aquellos que en ese mismo momento, el sujeto puede considerar como posibles o puede imaginar, desear o predecir. El hombre además de percibir, tiene la capacidad de recordar y la de soñar y conjeturar. Para cada sujeto humano normal, los acontecimientos de la experiencia actual distinguen y separan los que ya pasaron, de aquellos por venir; con esto se crea en cada sujeto una tripartición de los acontecimientos. Sin embargo, todo el panorama es «visto» por el sujeto en el mismo momento; tenemos conciencia en el mismo instante, de lo presente, lo pasado y lo futuro. Si no fuese así, no poseeríamos registros claros en nuestra conciencia. Para todo sujeto normal, es posible evocar y contemplar toda una sucesión de acontecimientos, los cuales se presentan ordenados. Quizás esa tripartición instantánea en pasado, presente y futuro que efectuamos en cada momento, ha sido la causa de que los acontecimientos se registren como sucesiones ordenadas.

Las sucesiones ordenadas de acontecimientos, al contrario de lo que sucede con el tiempo, son fenómenos perceptibles, representables y registrables; podemos notarlas como lo hacemos usualmente en matemáticas, utilizando índices naturales: $A1 < A2 < A3 < ... < An$.

No hay acontecimiento que realmente se repita, así que todo acontecimiento es único, por lo cual la relación de precedencia es irreflexiva (ningún acontecimiento se precede estrictamente a sí mismo); también es antisimétrica (dados dos acontecimientos, no es posible que el primero preceda al segundo y que simultáneamente el segundo también preceda al primero) y transitiva. Así las sucesiones de acontecimientos siempre se hallan provistas de una relación de orden estricto.

Nosotros también tenemos la capacidad mental de relacionar entre sí dos sucesiones de acontecimientos, es decir, dada una sucesión primaria de acontecimientos, podemos relacionar éstos, uno a uno, con los acontecimientos de una segunda sucesión, la cual puede adquirir así la función de sucesión de parámetros ubicadores de los eventos primarios. Esta última generalmente está constituída por acontecimientos relativamente importantes. Posteriormente, esta sucesión de parámetros ubicadores es reemplazada por otra más regular y por consiguiente más adecuada para la fijación de fechas de los eventos.

Generalmente se recurre a los acontecimientos llamados periódicos (días, noches, estaciones, fases de la luna), y aun cuando hemos dicho que los acontecimientos no son repetibles (un verano no es el verano anterior ni el siguiente), el hombre abstrae, generaliza y así considera que el día, las estaciones, etc., se repiten y forman ciclos, los cuales debidamente correlacionados con alguna sucesión numérica natural (primer día, segundo día, tercer día,...), agrupa en intervalos mayores: semanas, meses, años, siglos, eras. En esta forma las diferentes apariciones del mismo fenómeno, debidamente indizadas, constituyen una nueva sucesión, considerada muy especial y empleada como secuencia cronoparamétrica por exelencia, a la cual Páramo (ver [10]) llama una secuencia temporal. Así mismo afirma que «En la historia real humana, se pasará del empleo de una secuencia temporal a otra, hasta llegarse a aceptar, como prácticamente única y válida universalmente la sucesión de los movimientos del reloj».

Una vez creada ésta, sus términos se subdividen una y otra vez a voluntad, (los días en horas, las horas en minutos, etc), convirtiéndose en una secuencia «cada vez más contínua», de términos cada vez más pequeños y próximos, hasta que el hombre llega a concebirla como un continuo siempre unidimensional, con un orden estricto, en el cual podrá ubicar cualquier acontecimiento pasado, presente o futuro. Este continuo viene a ser considerado por la reflexión humana como «EL TIEMPO». No disponiendo de una forma «temporal» de representarlo, lo hace espacialmente, mediante una línea recta dirigida.

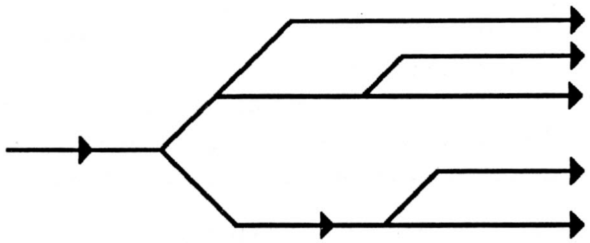
Así el tiempo no es sino un concepto elaborado por el hombre a partir de sucesiones de acontecimientos y de las correlaciones de diferentes secuencias de eventos. El tiempo pues, es una abstracción, es el registro y la «medida» (humanas) del cambio permanente de las cosas; es una creación cultural, pero no un objeto o fenómeno que el hombre haya descubierto en la naturaleza. «El tiempo que 'sentimos', vivimos y nos angustia, el tiempo como realidad humana, no es sino la proyección al exterior de nuestras propias ideas, conceptos y representaciones» [11].

Las ideas acabadas de exponer como casi todas las ideas, son discutibles, pueden ser aceptadas o no. Quizás otras personas posean visiones muy diferentes del tiempo. Por este motivo, cuando una ciencia como la Física tiene que ver directamente con el tiempo, evita tener que definirlo en la forma como lo hemos hecho; en lugar de ello, da una respuesta simplista. Por ejemplo, para la Física contemporánea, «El tiempo es lo que miden los relojes». Esta sencilla definición conlleva sutilezas profundas, ya que como lo muestra la teoría de la relatividad, lo que mide un reloj depende del sitio donde se halle, de la clase de movimiento en que se encuentre y de la gravedad que lo afecte. Desaparecen las ideas intuitivas vulgares de simultaneidad de eventos y de duración absoluta.

Para el trabajo matemático en el cual nos hemos empeñado, el tiempo es tan sólo un conjunto no vacío de elementos que llamaremos instantes o momentos, provisto de una relación de orden estricto.

A toda persona psicológicamente normal, el futuro se le presenta lleno de posibilidades, de alternativas, mientras que al pasado lo contempla constituído por un único camino recorrido.

Este fenómeno de la vida real puede reflejarse en nuestro modelo matemático, agregando a la ordenación estricta de los instantes, la condición de que el orden sea lineal hacia el pasado, es decir, que dados dos momentos cualesquiera, siempre uno de ellos precede al otro. Se deja abierta la posibilidad de que el tiempo sea ramificado hacia el futuro, pero en forma tal, que una persona situada en cualquier momento, al mirar retrospectivamente ve una única historia, una única linea hasta su instante inicial.



2. Motivaciones matemáticas

George Cantor, uno de los creadores de la teoría de conjuntos, usaba una definición de conjuntos por comprensión sumamente vaga ([2], pg.85), la cual puesta en forma explícita y más precisa por Gottlob Frege ([4], pg. 9), sería a grandes rasgos en la terminología actual, el axioma siguiente:

Sea $\sigma(\ldots,x)$ cualquier propiedad de objetos; entonces existe el conjunto de los objetos que poseen dicha propiedad, es decir, la fórmula siguiente es un axioma:

$$\exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow \sigma(\ldots,x))$$

El permitir esta forma tan amplia y general de formar conjuntos, llevó rápidamente a la aparición de contradicciones en la teoría.

Aún a pesar de precisarse el concepto de propiedad y restringirse el axioma anterior a propiedades descriptibles en el lenguaje de la teoría de conjuntos, surgieron nuevamente contradicciones. Una de ellas, encontrada por Bertrand Russell en 1.902, causó un verdadero desconcierto entre quienes trabajaban en los problemas de fundamentación de la Matemática, debido a que dicha contradicción no surgió en un área especializada o sofisticada de la teoría, sino en sus propios cimientos. Russell se la comunicó en carta a Frege en los momentos en que éste daba los toques finales a su trabajo de diez años (1.893-1.903) *Grundgesetze der Arithmetik*, basado precisamente en la teoría intuitiva de conjuntos. Recordemos brevemente la paradoja de Russell:

Si $A=\{x \mid (x\notin x)\}$ y p es $A\in A$, se obtiene $p \leftrightarrow \neg p$.

Es fácil deducir formalmente de esta equivalencia una contradicción:

1. $p \rightarrow \neg p$ (Parte « $\rightarrow$ » de la paradoja)
2. $\neg p \rightarrow \neg p$ (Teorema lógico)
3. $\neg p$ (de $\alpha\rightarrow\beta$ y $\neg\alpha\rightarrow\beta$ se deduce β)
4. $\neg p \rightarrow p$ (Parte « $\leftarrow$ » de la paradoja)
5. $p \rightarrow p$ (Teorema lógico)
6. p (La misma razón de 3.)

En consecuencia, si se usan por ejemplo los primeros tres axiomas de un sistema deductivo como el propuesto en [1] o en [7], a partir de $p \leftrightarrow \neg p$ se deduce fácilmente p y $\neg p$ (en simbología lógica, $(p \leftrightarrow \neg p) \vdash p, \neg p$).

La paradoja de Russell produce una contradicción aún en algunas lógicas más débiles que la clásica, como por ejemplo en la lógica intuicionista. En ésta vale la demostración por contradicción débil (CD), es decir,

si $\Gamma,\alpha \vdash \beta,\neg\beta$, entonces $\Gamma \vdash \neg\alpha$

Usemos este principio para producir una contradicción a partir de $p \leftrightarrow \neg p$, es decir, de $p \rightarrow \neg p$ y $\neg p \rightarrow p$:

Claramente $p \rightarrow \neg p, p \vdash p, \neg p$ luego por CD, $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$.

Análogamente, $\neg p \rightarrow p, \neg p \vdash p, \neg p$ luego por CD, $\neg p \rightarrow p \vdash \neg(\neg p)$.

En consecuencia,

$p \rightarrow \neg p,\ \neg p \rightarrow p \vdash \neg p, \neg(\neg p)$

o sea que se deduce una contradicción.

¿Cómo tratar de arreglar la situación para que, manteniendo el axioma de comprensión tan general como sea posible, no se presenten las paradojas?

Dentro de la fundamentación clásica, las formas más conocidas y más utilizadas para conservar el axioma amplio de comprensión, son a) la teoría de tipos de Russell y b) las diversas variantes de la Teoría de Clases, en las cuales se hace distinción entre las clases propias (aquellas que no pueden ser miembros de otras clases) y los conjuntos, o sea aquellas clases que sí pueden pertenecer a otras. El axioma de comprensión toma la forma restringida siguiente:

$$\exists z\ \forall x\ [x \in z \leftrightarrow (\exists y)(x \in y) \wedge \sigma(\ldots,x)].$$

Permite formar clases constituídas solamente por conjuntos. La paradoja de Russell se evita ya que

$\{x \mid (\exists y)\ (x \in y) \wedge x \notin x\}$ resulta ser una clase propia y en particular no puede pertenecer a sí misma.

En la teoría de tipos de Russell, las variables se jerarquizan; existen numerables tipos de variables, pero cada variable es de un único tipo; «$x \in y$» solo es fórmula bien formada si el tipo de x es una unidad menor que el tipo de y. Con esta restricción sintáctica, «$x \notin x$» no es una fórmula admisible y así el conjunto paradójico ni siquiera puede formarse.

Otra alternativa natural consiste en cambiar la lógica clásica por otra más débil, aun cuando en general esto solamente no basta, como se demostró al deducir una contradicción dentro de la lógica intuicionista.

El presente trabajo tiene por objeto mostrar sin mayores detalles técnicos, la posibilidad de una nueva opción, en la cual a pesar de admitirse un axioma de comprensión prácticamente tan amplio como el de Cantor, no se presente la paradoja de Russell (y quizás ninguna otra). Dicha alternativa radica en hacer intervenir el tiempo en el proceso de formación de los conjuntos: No todos los conjuntos existen simultáneamente sino que el universo se va expandiendo «con el paso del tiempo».

Por ejemplo, intuitivamente, primero existe un conjunto y posteriormente existe su conjunto de partes; de esta forma el universo de los conjuntos viene a ser un universo en expansión, como el postulado por la Física actual; inclusive se puede pretender que sea semejante al modelo del «Big Bang»; en un primer instante podrían existir solamente el conjunto vacío o unos cuantos conjuntos primitivos (los «quarks») y los demás conjuntos se irían creando a partir de ellos, a medida que transcurre el tiempo.

Cuando se fundamentan las Matemáticas en la teoría de conjuntos, se observa que casi todos sus axiomas son reglas para asegurar la existencia de ciertos conjuntos asociados a otros objetos dados. en este contexto es claro que el universo de los objetos matemáticos puede imaginarse entonces como construído a lo largo del tiempo, a partir de unos cuantos objetos iniciales, utilizando los axiomas como leyes de construcción de conjuntos nuevos con base en los ya existentes.

Aun cuando esta idea de la construcción gradual de los objetos matemáticas ha estado presente en algunas discusiones filosóficas sobre los fundamentos de la Matemática, dicha idea se ha mantenido a nivel informal en el desarrollo oficial de esta ciencia.

En nuestro trabajo queremos mostrar que si se toma en serio la temporalidad de la existencia de los objetos matemáticos, hay vías para construir genuinas teorías temporales de conjuntos.

Es claro que dicho desarrollo de teorías temporales de conjuntos solo será posible si de antemano se crean lógicas temporales dentro de las cuales se establezcan los axiomas conjuntistas y se lleven a cabo las deducciones. Por esta razón dentro de nuestra labor investigativa, primero hemos construído un cálculo proposicional temporal y luego un cálculo predicativo temporal de primer orden, adecuados los dos a nuestros fines, los cuales nos han servido como un marco dentro del cual estamos desarrollando teorías temporales de conjuntos.

3. UN CÁLCULO PROPOSICIONAL TEMPORAL

Debido a que creemos que la forma como se manejan los conceptos de pasado, presente y futuro en el lenguaje usual puede servirnos de guía y de medio de contrastación de nuestros resultados, insistiremos en trabajar dentro de una lógica temporal sencilla, en la cual no tengamos que usar ni cuantificar variables temporales, utilizando tan solo la sucesión temporal PASADO-PRESENTE-FUTURO, similar a la de los tiempos gramaticales de muchas lenguas indoeuropeas.

Sin embargo, considerando la forma como pretendemos colectivizar objetos, no emplearemos para nada el futuro; tampoco consideraremos qué tan en el pasado ha tenido lugar un evento. Trataremos de precisar y formalizar todas las ideas anteriores construyendo un sistema que llamaremos H-cálculo (o simplemente H), debido a que el operador temporal de tipo modal H será tomado como primitivo. Dicho sistema resulta ser epistemológicamente interesante, ya que permite formalizar (de manera un poco burda, claro está) segmentos importantes del lenguaje usual. Además en él (cuando posteriormente se expanda a un cálculo de predicados), el tiempo es algo externo al universo sobre cuyos individuos se hacen las afirmaciones.

Pretendemos que este sistema sea un intento de formalización de la situación en la cual la verdad es fruto de la experiencia, es decir, una afirmación es válida (en nuestro universo) hoy, si es verdadera hoy y si siempre (en el pasado) ha sido verdadera. Si esto se cumple en todo instante, entonces la afirmación vale para nuestro universo. Si esta última condición se cumple para todo universo posible, entonces dicha afirmación es válida universalmente, es una «verdad del sistema».

El futuro no se tiene en cuenta de manera directa, sino que la validez se obtiene con base en nuestra experiencia. Claro está que como el presente es transiente, la misma situación se tendrá en cualquier momento futuro cuando éste se vuelva presente.

Por dichas razones, «$H\sigma$» tendrá el significado intuitivo «Siempre en el pasado, σ» o «En todo instante pasado σ ha sido verdadera».

Determinemos ahora el sistema que hemos llamado H-cáculo, o simplemente «sistema H»:

Comencemos tomando como base un cálculo proposicional usual; agreguemos a los símbolos del cálculo proposicional anterior el operador H, y a sus reglas de formación de fórmulas añadamos la siguiente:

Si σ es una fórmula, también lo es $H\sigma$.

Además consideremos $P\sigma$ como una abreviación de $\neg H \neg\sigma$ y llamemos «DEF» precisamente a la equivalencia $P\sigma \leftrightarrow \neg H \neg\sigma$.

En consecuencia, el significado intuitivo de este operador modal P será el siguiente:

$P\sigma$: En el pasado, σ; en algún instante del pasado, σ.

Como sus axiomas, tomemos los siguientes:

1. Todos los teoremas del cálculo proposicional clásico dado antes como base, con sus letras proposicionales posiblemente reemplazadas por fórmulas de H.

2. $H(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (H\alpha \rightarrow H\beta)$ AX1

3. $H\alpha \rightarrow HH\alpha$ AX2

De otra parte, una verdad en nuestro sistema deberá ser válida en todo instante, lo cual nos llevará a probar una regla deductiva como si $\vdash \sigma$, entonces $\vdash H(\sigma)$. Para ello tan solo necesitaremos que dicha propiedad se cumpla para los axiomas:

4. GH: (Generalización hacia el pasado): Todos los de la forma HA, donde A es cualquiera de los axiomas pertenecientes a los tres grupos anteriores.

Seguimos considerando Modus Ponens (MP) como la única regla deductiva primitiva para este sistema.

El H-cálculo resulta ser consistente; su prueba puede verse en [8].

Dentro de este lenguaje y teniendo en cuenta la idea inicial de formación de los conjuntos con el paso del tiempo, un axioma de comprensión tan general como el de Cantor, puede ser el siguiente:

Dada una condición $\sigma(x)$ del lenguaje antes mencionado, podemos colectivizar a todos los objetos que en algún instante del pasado han cumplido la condición σ, es decir, existe al menos de ahora en adelante el conjunto constituido por todos los elementos que en el pasado han verificado σ; en nuestra simbología, sería:

$$\exists y \ \ \forall x \ (x \in y \leftrightarrow P(\sigma(x))$$

o sea que si A es un tal y, $A = \{x \mid P(\sigma(x))\}$

El axioma de extensionalidad será el clásico: dos conjuntos son iguales si y solamente si poseen los mismos elementos.

Nos preguntamos: ¿Se dará aquí la paradoja de Russell?

Tomemos como σ a la fórmula $(x \notin x)$; por el axioma de comprensión anterior,

$\exists y \ \forall x \ (x \in y \leftrightarrow P((x \notin x)))$

Si A es un conjunto que cumple este caso particular del axioma,

$\forall x \ [x \in A \leftrightarrow P((x \notin x))]$

En particular, si x es A,

$A \in A \leftrightarrow P((A \notin A))$

propiedad un tanto extraña pero que sin embargo no es una contradicción en sí misma, como se verá posteriormente mediante un modelo. Además, realmente no es posible aceptar $A \in A \leftrightarrow P(A \notin A)$ ya que si el conjunto A ha sido formado precisamente en un instante t mediante el axioma de comprensión propuesto, no existe antes de dicho instante, de manera que $A \in A$ y $(A \notin A)$ ni siquiera tendrían sentido en momentos anteriores a t.

Otro aspecto que debe destacarse es que todas las consideraciones y los razonamientos anteriores son independientes de la fórmula «$A \in A$», o sea que la situación es la misma para una expresión de la forma

$$\sigma \leftrightarrow P(\neg(\sigma))$$

sin importar qué sea la fórmula σ, por lo cual podemos para efectos del análisis de esta paradoja, trabajar dentro del sistema H.

Teniendo en cuenta que nuestro sistema solamente incluye al cálculo proposicional, una estructura que llamaremos de tipo H, adecuada para él, constará de un conjunto $(T,<)$ parcialmente ordenado por una relación de orden estricto «<», y una familia $(v_t)_{t \in T}$ de valuaciones, o sea de funciones definidas en el conjunto L de las letras proposicionales y a valores en el conjunto $\{0,1\}$. Tiene por objeto asignar en cada instante t, valores de verdad a todas las letras proposicionales del léxico.

Es rutinario demostrar que estas valuaciones se extienden de manera única al conjunto de todas las fórmulas de tal forma que por ejemplo,

$v_t(\neg\sigma) = 1$ ssi $v_t(\sigma) = 0$

$v_t(\alpha \vee \beta) = 1$ ssi $v_t(\alpha) = 1$ o $v_t(\beta) = 1$

y de acuerdo con nuestra idea intuitiva de que el pasado es estricto,

$v_t(P\sigma) = 1$ ssi existe s menor que t tal que $v_s(\sigma) = 1$.

o sea ssi $\exists s(s< t \wedge v_t(\sigma) = 1)$.

Se sigue que

$v_t(H\sigma) = 1$ ssi $\forall s[s< t \rightarrow v_s(\sigma) = 1]$

en concordancia con la interpretación que hemos dado de antemano.

En adelante, si $\mathfrak{R} = \langle (T,<), (v_t)_{t \in T} \rangle$ es una estructura de tipo H, muchas veces en lugar de $v_t(\sigma) = 1$, escribiremos

$\mathfrak{R} \underset{t}{\Vdash} \sigma$, o simplemente $\underset{t}{\Vdash} \sigma$

y lo leeremos «La estructura $\mathfrak{R}$ verifica σ en el nodo t», o «En el nodo t se verifica σ».

También si $\mathfrak{R}$ es una estructura de tipo H, $\mathfrak{R} \Vdash \sigma$ significa «En todo nodo de $\mathfrak{R}$ se verifica σ»; en tal caso diremos simplemente «$\mathfrak{R}$ verifica σ» o «σ se verifica en la estructura $\mathfrak{R}$».

Análogamente, $\Vdash \sigma$ significa « σ se verifica en toda estructura de tipo H»; se dice en este caso que σ es H-válida.

Por la forma como extendimos las valuaciones, concluímos que en cada nodo razonamos dentro de una lógica clásica bivalente, por lo cual dada una contradicción $(p \wedge \neg p)$, en toda estructura de tipo H y en todos sus nodos se deberá tener $v_t\,(p \wedge \neg p)= 0$.

Hemos definido «estructura de tipo H» de tal forma que en todo nodo de toda estructura, se verifiquen no sólo todas las tautologías sino también Def., Ax1 y Ax2. Por este motivo, es realmente sencillo probar la validez de nuestro sistema H, es decir que si una fórmula σ se deduce en el sistema, entonces σ es H-válida.

Observemos que si en un nodo de una estructura se verifican tanto σ como $\sigma \rightarrow \beta$, entonces por la forma como extendimos las valuaciones, es claro que también debe verificarse β en ese nodo. Esto significa que MP preserva la propiedad de verificabilidad; además si $\Vdash \sigma$, entonces claramente $\Vdash H\sigma$, y debido a que todos los axiomas de H se verifican en todas las estructuras de tipo H, entonces todos los teoremas de H se verifican en todas las estructuras de tipo H, obteniéndose así la validez del sistema.

El H-cálculo también resulta ser completo, es decir, si $\Vdash \sigma$, entonces $\vdash \sigma$; su prueba puede verse en [8].

4. ASPECTOS SEMÁNTICOS ADICIONALES

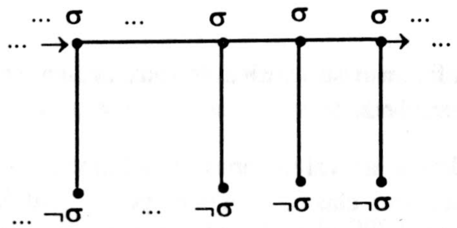
Veamos que si a los axiomas de H añadimos $\sigma \leftrightarrow P(\neg\sigma)$ y $H(\sigma \leftrightarrow P\neg\sigma)$, aún se obtiene un conjunto consistente de fórmulas:

Una estructura $\mathfrak{R}$ con $T = \{1, 2\}$, $2 < 1$ y en la cual la fórmula σ satisface $v_1\,(\sigma) = 1$ y $v_2\,(\sigma) = 0$,

$$\begin{array}{ccc} \neg\sigma & & \sigma \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 2 & & 1 \end{array}$$

es tal que $\Vdash_1 \sigma \leftrightarrow P\,\neg\sigma$ de manera evidente y $\Vdash_2 \sigma \leftrightarrow P\,\neg\sigma$ ya que en el nodo 2 no se verifica σ y tampoco $P\,\neg\sigma$, al no existir un nodo anterior en donde se satisfaga $\neg\sigma$. Así, $\mathfrak{R} \Vdash \sigma \leftrightarrow P\,\neg\sigma$ y $\mathfrak{R} \Vdash H\,(\sigma \leftrightarrow P\,\neg\sigma)$.

Inclusive, estructuras con infinitos nodos como



verifican igualmente $\sigma \leftrightarrow P\ \neg\sigma$ y $H(\sigma \leftrightarrow P\ \neg\sigma)$.

Todo lo anterior hace ver que estas dos fórmulas no producen dentro del sistema H contradicciones por sí solas, de manera que en el sistema no será posible derivar la paradoja de Russell.

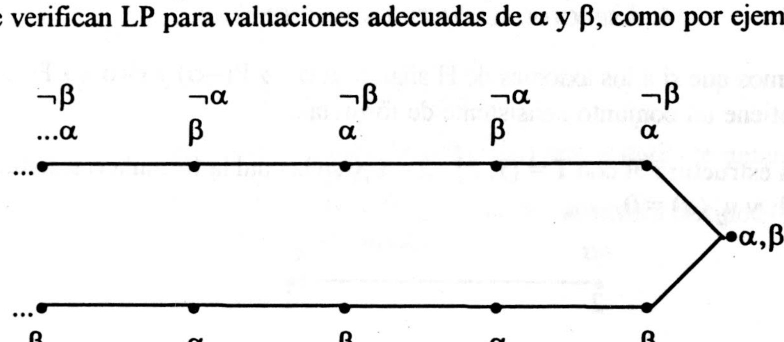
Nos preguntamos: ¿Dentro de nuestro sistema H de lógica temporal puramente proposicional, qué propiedades debemos agregar como axiomas para garantizar la linealidad del tiempo hacia el pasado? Es decir, ¿para que las únicas estructuras que las verifiquen sean precisamente aquellas (T,<) con la propiedad

$$(\forall s)(\forall t)(\forall u)(s < u \wedge t < u) \rightarrow (s < t \vee s = t \vee t < s))\ ?$$

En la bibliografía sobre el tema, p.ej. [6] y [12], se propone el axioma siguiente para caracterizarla:

$$(P\alpha \wedge P\beta) \rightarrow [P(\alpha \wedge \beta) \vee P(P\alpha\wedge\beta) \vee P(\alpha \wedge P\beta)] \qquad \text{(LP)}$$

Sin embargo existen estructuras de tipo H, no lineales hacia el pasado que verifican LP para valuaciones adecuadas de α y β, como por ejemplo



Esta verifica LP en todos sus nodos.

En general, dada una colección C de estructuras modales, es muy difícil, si no imposible, hallar un conjunto de axiomas-esquemas que la caractericen, es decir, tal que las únicas estructuras que verifiquen dichos axiomas sean precisamente las de C. Por ejemplo, en [3], pg. 94, se muestra que las sentencias que se satisfacen en todas las estructuras (T,R) con R irreflexiva, son las mismas que se verifican en todas las estructuras (T,S) con S antisimétrica, y las mismas que se satisfacen en todas las estructuras (T,D) con D relación binaria sin ninguna condición adicional.

Es entonces conveniente modificar la semántica para que la colección de estructuras con respecto a la cual un sistema sea válido y completo, sea la más pequeña posible, y las estructuras posean de antemano las propiedades relevantes para determinados propósitos. Por esto, en vez de considerar como estructura de tipo H a cualquier conjunto provisto de una relación de orden estricto, junto con su correspondiente familia de valuaciones, tomaremos en adelante parejas (T,<), $(v_t)_{t\in T}$ cuya segunda componente sea una familia de valuaciones, y cuya primera componente sea una pareja constituida por un conjunto T no vacío y por una relación «<» que satisface las condiciones siguientes:

1) $\forall x\, \neg(x < x)$

2) $\forall x\, \forall y[x \neq y \rightarrow \neg(x < y \wedge y < x)]$

3) $\forall x\, \forall y\, \forall z[(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z]$

4) $\forall x\, \forall y\, \forall z[(x < z \wedge y < z) \rightarrow (x < y \vee x = y \vee y < x)]$

Las tres primeras condiciones exigen que «<» sea un orden estricto, y la cuarta le fuerza a ser lineal hacia el pasado; las estructuras de este tipo son intuitivamente plausibles para desarrollar una teoría de conjuntos con un universo que se expande hacia el futuro.

5. EL SISTEMA PRED (H)

Dentro de nuestro trabajo hemos hallado un cálculo de predicados temporal (al cual llamaremos Pred(H)) apto para el desarrollo posterior de una teoría temporal de conjuntos, el cual bosquejaremos a continuación.

Tomemos como base un cálculo de predicados de primer orden con igualdad y agreguemos a su léxico el operador H.

Sus reglas de formación de fórmulas son las del cálculo de predicados básico (ver p. ej. [5]), junto con la siguiente:

Si σ es una fórmula, entonces también lo son $P\sigma$ y $H\sigma$.

Una ESTRUCTURA DE TIPO PRED(H) será una tripla

$$\Re = \langle (T,<), (@\,(t))_{t\in T}, (h_{st})_{s<t} \rangle$$

tal que (T,<) es un conjunto no vacío con una relación «<» que verifica las cuatro condiciones dadas anteriormente.

Además $(@\,(t))_{t\in T}$ es una familia de estructuras todas del tipo del cálculo de predicados básico de Pred(H), y $(h_{st})_{s<t}$ es una familia de monomorfismos fuertes (isomorfismos no necesariamente sobreyectivos) h_{st}: $@(s) \to @(t)$, para cada pareja (s,t) con $s < t$, de forma tal que si $r< s< t$, entonces $h_{rt} = h_{st} \circ h_{rs}$.

Dichos monomorfismos son fuertes (ver [5], pg. 90) en el sentido siguiente:

Si R es un símbolo relacional eneario y $s< t$, entonces para $a_1, a_2,...,a_n$ elementos cualesquiera del universo existente en el instante s,

$(a_1,...,a_n) \in R^{@(s)}$ si y sólo si $(h_{st}\,(a_1),...,h_{st}\,(a_n)) \in R^{@(t)}$.

Aquí $R^{@(t)}$ es la relación enearia que en la estructura @(t) interpreta R.

Además, si f es un símbolo funcional eneario,

$h_{st}\,(f^{@(s)}\,(a_1, a_2,...,a_n)) = f^{@(t)}\,(h_{st}\,(a_1),...,h_{st}\,(a_n))$

En particular si $s< t$, $h_{st}\,(c^{@(s)}) = c^{@(t)}$ para todo símbolo constante c del lenguaje.

Hemos impuesto a h_{st} la condición de ser un monomorfismo fuerte para que tanto la igualdad como los modelos, sean decidibles, y para que si $s< t$, el universo existente en el instante s sea una subestructura del universo existente en el instante t y así los universos sean crecientes con el paso del tiempo. Además los modelos tendrán en esta forma un comportamiento correcto con respecto a los símbolos funcionales que puedan existir en el lenguaje. En particular si las h_{st} son inyecciones canónicas (h_{st} (x)=x, para todo x), el universo existente en el instante s es una subestructura elemental del universo existente en el instante t, y así todo modelo de tipo Pred(H) corresponde exactamente al modelo de un universo en expansión.

Las condiciones anteriores también tienen como cansecuencia el que los individuos sean eternos hacia el futuro, es decir, cuando comienzan a existir, siguen existiendo siempre. Además, como elementos distintos poseen imágenes distintas, individuos diferentes nunca serán iguales en el futuro.

La verificabilidad en cada instante se define a la manera clásica para las fórmulas sin H ni P.

Si σ es una fórmula, diremos que $H\sigma$ se verifica en el instante t cuando evaluamos sus variables libres con $a_1, a_2, \ldots, a_m$, (elementos del universo existente en el instante t), si para todo momento s anterior a t, cuando todas las preimágenes por h_{st} de $a_1, a_2, \ldots, a_m$ existen en el «universo s», entonces la estructura @(s) verifica σ evaluando sus variables libres con las preimágenes de las a_i.

Cuando todas las h_{st} son inclusiones (es decir, inyecciones canónicas), lo anterior equivale a que $H\sigma$ (evaluada con las a_i) se verifica en el instante t, si en todo instante s anterior donde todas las a_i hayan existido simultáneamente, entonces dichas a_i verificaron σ en el momento s. Notaremos este hecho mediante $\mathfrak{R} \underset{t}{\Vdash} H\sigma[a_1,..a_m]$

Como consecuencia tenemos que bajo las mismas condiciones anteriores, la estructura $\mathfrak{R}$ verifica $P\sigma$ en el instante t con valores $a_1, a_2, \ldots, a_m$ para sus variables libres, siexiste un instante s anterior a t en el cual todas las preimágenes por h_{st} de las a_i existieron simultáneamente y verificaron σ.

Además, diremos que $\mathfrak{R} \underset{t}{\Vdash} \sigma(\bar{x})$ si y solo si $\mathfrak{R} \Vdash \sigma(\bar{x})[\bar{a}]$ para toda enepla $\bar{a}$ de elementos de $\mathfrak{R}(t)$. Análogamente al caso clásico, $\mathfrak{R} \Vdash \sigma$ si y sólo si $\mathfrak{R} \underset{t}{\Vdash} \sigma$ para todo t de T. Finalmente, diremos que σ es válida ($\Vdash \sigma$) si y solamente si para toda estructura $\mathfrak{R}$ de tipo Pred(P), $\mathfrak{R} \Vdash \sigma$.

Pongamos de presente que la igualdad, definida en la forma usual en cada instante, captura la idea de que dos individuos son iguales si lo son a lo largo de toda su historia, es decir, si comienzan a existir simultáneamente y son iguales en cada momento de su existencia.

Introduzcamos a continuación una notación que nos será útil para enunciar una regla deductiva muy importante para este sistema:

$$H\, x_1\ x_2 \ldots x_m\, B \text{ abreviará } H[(x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge \ldots \wedge x_m = x_m) \rightarrow B]$$

cuyo significado es el siguiente: Siempre que $x_1, x_2, \ldots, x_m$ y las variables libres de B existieron simultáneamente, se verificó B.

La regla deductiva que buscamos (la notaremos RK+) viene a ser la siguiente:

Si $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B$, entonces $HA_1 \wedge HA_2 \wedge ... \wedge HA_n \rightarrow Hx_1\, x_2 ... x_m\, B$

donde $x_1, x_2, ..., x_m$ son las variables libres de $A_1, A_2, ..., A_n$ que no ocurren libres en B.

Nótese que si el conjunto de variables libres de $A_1, A_2, ..., A_n$ es un subconjunto del conjunto de variables libres de B, entonces la regla anterior viene a ser simplemente la llamada usualmente RK, no habiendo necesidad de colocar subíndices a H.

Una consecuencia inmediata de la regla anterior, es la siguiente:

$$H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow Hx_1\, x_2 ... x_m\, B) \qquad (AX1+)$$

Vale la pena notar que si solo se consideran estructuras de tipo Pred(H) con universos constantes, todos los individuos existen simultáneamente en todos los universos, y entonces son válidos sin restricciones de ninguna naturaleza todos los resultados del H-cálculo.

Una fórmula que permita actualizar los sucesos del pasado, podría ser la siguiente:

$$P\exists x\sigma(x) \rightarrow \exists x\sigma(x) \qquad (PT)$$

Nos preguntamos: ¿Será válida para cualquier σ?

Si lo fuese, se debería verificar $P\ \exists x\ \forall y(x=y) \rightarrow \exists x\ \forall y(x=y)$, o sea que si en algún instante del pasado el universo tuvo un único elemento, entonces de dicho instante en adelante también debe poseer un solo elemento, y así se frenaría su expansión. Esta fórmula no sólo perpetúa las propiedades de los individuos, sino del universo mismo como se acaba de ver, lo cual es muy restrictivo. Un objeto debe ser el mismo con el paso del tiempo, pero puede ir adquiriendo nuevas propiedades a medida que cambia el entorno en el cual se encuentra.

¿Valdrá alguna versión restringida de dicha fórmula?

Debido a que las funciones h_{st} de paso de un universo a otro son monomorfismos fuertes, se puede demostrar que la fórmula debe valer cuando σ es atómica o negación de atómica, o más aún, cuando sea obtenida combinando atómicas y negaciones de atómicas mediante conectivos proposicionales. A una fórmula de esta naturaleza la llamaremos «puramente proposicional».

PT: Si σ es una fórmula puramente proposicional o una tal fórmula precedida del cuantificador «$\exists$», entonces $\Vdash P\sigma \rightarrow \sigma$.

Sin embargo PT no vale cuando σ es de la forma Hß, ni siquiera para ß atómica.

6. AXIOMATIZACIÓN DEL SISTEMA PRED(P)

Como AXIOMAS LOGICOS parece lo más natural tomar aquellos del H-cálculo que siguen siendo válidos en toda su generalidad para nuestra semántica, junto con los cuantificacionales usuales, y con aquellos propios de la semántica acabada de definir, es decir,

1. Todos los teoremas de un cálculo proposicional clásico, con sus letras proposicionales posiblemente reemplazadas por fórmulas de Pred(H).

2. $P\sigma \leftrightarrow \neg H \neg \sigma$ DEF

3. $H\sigma \rightarrow HH\sigma$ AX2

4. $(P\sigma \wedge P\beta) \rightarrow [P(\sigma \wedge \beta) \vee P(P\sigma \wedge \beta) \vee P(\sigma \wedge P\beta)$ LP

C1: $\forall x\, \sigma(x,\bar{y}) \rightarrow \sigma(t,\bar{y})$ siendo t un término libre para x en $\sigma(x,\bar{y})$.

C2 : $\forall x(\sigma \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\sigma \rightarrow \forall x\beta)$.

C3 : $\sigma \rightarrow \forall x\sigma$ si x no ocurre libre en σ.

C4 : $t = t$ siendo t un término cualquiera

C5 : $(t_1 = t_2) \rightarrow [\sigma(...t_1 ...) \rightarrow \sigma(...t_2 ...)]$ siendo $\sigma(...t_2 ...)$ la fórmula obtenida al reemplazar en $\sigma(...t_1 ...)$ todas, algunas o ninguna de las ocurrencias de t_1, por t_2.

Como axiomas cuantificacionales específicamente temporales, tenemos los siguientes:

FB : $P\, \exists x\sigma(x) \rightarrow \exists x P\sigma(x)$

PT : $P\, \exists x\sigma(x) \rightarrow \exists x\sigma(x)$, cuando $\sigma(x)$ es una combinación proposicional de fórmulas atómicas y negaciones de atómicas, o una tal combinación precedida del operador P.

GH : Si A es cualquiera de los axiomas anteriores, entonces HAt ambién es un axioma.

Con esto se pretende que los axiomas y teoremas del sistema valgan tanto en el presente como en todos los momentos del pasado.

GU: Si σ es un axioma, entonces $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \sigma$ también es un axioma. Aquí n es un número natural cualquiera.

En particular las clausuras universales de los axiomas son también axiomas.

Como únicas reglas deductivas primitivas tomamos MODUS PONENS y RK+.

El axioma PT (de permanencia temporal) tiene como finalidad garantizar que los objetos definibles sean «eternos hacia el futuro», en el sentido de que si en un instante pasado hubo en el universo existente en ese instante, un objeto que verificó la condición σ, entonces en el universo actual también existe un elemento verificador de σ. Por ejemplo, y de manera informal, si b es un elemento existente en un instante s, y t es un momento posterior ($s<t$) al cual podemos considerar como el presente, entonces en el instante s se verifica $\exists x(x=b)$, luego en el momento t se cumple $P\, \exists x(x=b)$ y por PT también en el instante t se verificará $\exists x(x=b)$. El axioma garantiza entonces que todo elemento existente en un instante dado, deberá continuar existiendo siempre.

Si definimos las deducciones con premisas en la forma usual, entonces también vale el TEOREMA DE GENERALIZACION UNIVERSAL:

Si $\Gamma \vdash \sigma(x,\bar{y})$ y x no ocurre libre en ninguna fórmula de Γ, entonces $\Gamma \vdash \forall x\, \sigma(x,\bar{y})$.

Su demostración viene a ser la misma dada por ejemplo en [1], pg. 133, o en [7] para el teorema de generalización usual.

Un resultado que vale la pena mencioner, es el siguiente:

$$HI: \ (t_1 = t_2) \to H(t_1 = t_2)$$

Es la generalización hacia el pasado de la igualdad, la cual formaliza la idea: si dos objetos son iguales en un cierto momento, es porque siempre (que hayan existido) han sido iguales.

Usando la forma contrarrecíproca y el axioma Def, se llega de inmediato a que HI es equivalente a

$$HI^{*} \ : \ P\,(t_1 \neq t_2) \to (t_1 \neq t_2)$$

Intuitivamente esta expresión afirma que si dos objetos son distintos en el pasado, también deberán ser distintos en cualquier momento posterior a aquel en el cual fueron diferentes. Esto trae como consecuencia que en todo modelo para nuestro sistema Pred(H), si existen morfismos de un mundo en otro posterior, entonces como se puso de presente en la parte semántica, dichos morfismos deberán ser inyectivos, confirmándose aun más que el universo deberá ser creciente con el tiempo.

Como todos los axiomas que hemos dado son válidos para la semántica definida antes, y es claro que las reglas de inferencia dadas producen conclusiones válidas a partir de premisas válidas, se concluye que el sistema propuesto es válido para la semántica considerada.

7. UNA TEORÍA TEMPORAL DE CONJUNTOS

A continuación vamos a bosquejar una forma de resolver el problema que nos motivó para realizar todo el trabajo precedente, es decir, vamos a delinear la construcción de una teoría temporal de conjuntos, la cual resultará ser hasta cierto punto sencilla y acorde con nuestra intuición. Se deberá entender que dicha construcción no es definitiva ni acabada, sino tan solo una propuesta de trabajo, un tema de investigación en el cual nos hallamos empeñados en este momento. Quizás por ello los axiomas que daremos no sean independientes y posiblemente tampoco sean los mejores, pero servirán como punto de partida para la búsqueda de un sistema óptimo.

Suponemos claro está que en el cálculo de predicados temporal Pred(H) se han incluido el símbolo relacional binario «$\in$» y también el símbolo de igualdad para obtener así el lenguaje de primer orden adecuado para nuestra teoría temporal de conjuntos.

Como AXIOMA DE COMPRENSION tomaremos el propuesto de antemano, el concebido desde el momento mismo en que nos propusimos hacer una teoría en la cual no todos los conjuntos existieran simultáneamente, sino que se fueran formando con el paso del tiempo: Dada una condición $\sigma(x)$, existe el conjunto constituido por todos los objetos que en algún instante anterior verificaron la condición σ, es decir,

$$\exists Y\ \forall x(x \in Y \leftrightarrow P\sigma(x))$$

Más precisamente, en un instante dado una condición define un conjunto formado por todos aquellos elementos que ya existían en un momento anterior, y que en dicho momento verificaron la condición dada.

Como AXIOMA DE EXTENSIONALIDAD simplemente tomamos el usual

$$\forall x\ \forall y[(x = y) \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)]$$

Lo hacemos así para que esta teoría no difiera demasiado de la usual; este axioma nos permite decidir sobre la igualdad de conjuntos existentes en un mismo universo; además hace que cuando un conjunto comience a existir, él siga siendo el mismo siempre en adelante. Como se dijo antes, quizás adquiera nuevas propiedades a medida que se expande el universo en el cual se halle, pero el conjunto será el mismo.

Este axioma hace que para cada instante t, el conjunto cuya eistencia se afirma en el axioma de comprensión, sea único en el universo existente en dicho instante. Podemos denotarlo en la forma $\{x^{\cdot\cdot} \mid @(t) \Vdash P\sigma(x)\}$.

Con estos dos únicos axiomas, es posible demostrar que

$$\exists A\ \forall x(x \notin A)$$

Aun cuando el axioma de compresión establece la existencia de conjuntos cuyos elementos verifican una condición en el pasado, este resultado pone de presente que la existencia del conjunto vacío (pues es el único sin elementos) se establece sin hacer referencia al pasado. Semánticamente, esto significa que el conjunto vacío existe en todo instante, o sea que ha existido, existe y existirá siempre.

La contenencia entre conjuntos se define en la forma usual y posee las propiedades corrientes.

Un resultado que muestra la coherencia de la teoría, es el siguiente:

Si en un determinado instante a y b existen y a∈b, también se tiene a∈b en todo momento anterior o posterior en el cual a y b existan simultáneamente.

Otra consecuencia inmediata de estos dos axiomas, es el llamado «axioma del conjunto binario»:

$$\exists A\ \forall x(x \in A \leftrightarrow P[(x = a) \vee (x = b)]$$

Su formación evidentemente debe ser retardada, debido a que se quiere que primero existan a y b y posteriormente {a, b}.

Continuando con las ideas iniciales sobre la acción del tiempo en la formación de los conjuntos, la colección (B) de subconjuntos de un conjunto dado B, debe existir después de A; la formación de (B) es entonces retardada con respecto a la existencia de B, por lo cual, no se necesita de un nuevo axioma, sino que su existencia es una consecuencia del axioma de comprensión:

EXISTENCIA DEL CONJUNTO DE PARTES: $\forall B \exists C \forall X\ [X \in C \leftrightarrow P(X \subseteq B)]$

Es interesante notar que en el universo actual está presente como elemento el conjunto unión de todos los universos anteriores: sea A_s el universo actual; entonces en él existe $\{x \mid P(x = x)\}$. Pero este conjunto no es otro que el formado por todos los conjuntos que han existido en uno cualquiera de los universos anteriores, o sea precisamente el conjunto unión de todos los universos A_t con $t<s$.

De manera similar, si se agrega el AXIOMA DE REGULARIDAD usual

$$\forall B[B \neq \varnothing \rightarrow \exists C(C \in B \wedge \forall y(y \in C \rightarrow y \notin B))]$$

una de sus consecuencias conocidas es que $\forall x(x \notin x)$. Si se usa el axioma de comprensión tomando como $\sigma(x)$ la condición usada por Russell para su paradoja, se obtiene que $\exists C\ \forall x(x \in C \leftrightarrow P(x \notin x)$, de manera que en cada instante t dicho conjunto C será también la unión de todos los universos A_s con $s<t$. En particular, si t fuese el instante siguiente a s, C sería A_s y así A_s sería elemento de A_t.

Creemos que no es conveniente postular un axioma del infinito como el usual, ya que si tal axioma es válido, se debe verificar en todo instante, inclusive en el momento inicial, o sea que desde el primer instante habrá infinitos conjuntos, lo cual va en contra de la filosofía del presente trabajo: formación de los conjuntos poco a poco, quizás tan sólo a partir del conjunto vacío.

La existencia de conjuntos infinitos y de infinitos conjuntos en un universo, vendrá a ser determinada por la estructura del tiempo. Si por ejemplo, $(T,<)$ es isomorfo al primer ordinal infinito ω con su buen orden, entonces no necesariamente existirán conjuntos infinitos. Pero si $(T,<)$ es isomorfo a $\omega+2$, debido a que el conjunto vacío existe desde el primer instante y su conjunto de partes existe en el instante siguiente, entonces $A_{\omega+1}$ será infinito y se podrá comprobar la existencia de conjuntos infinitos en $A_{\omega+2}$. Si el tiempo es denso, entonces en cualquier instante posterior al primero habrá conjuntos infinitos, ya que entre dichos dos instantes habrá infinitos momentos en los cuales el universo irá expandiéndose.

Sean $h_{st} : @(s) \rightarrow @(t)$ y sea A_s el universo existente en el instante s. Si $B \in A_s$, usaremos $h_{st}\langle B\rangle = \{h_{st}(x) \mid x \in B\}$ para distinguir este conjunto de la imagen $h_{st}(B)$ de B por h_{st}.

Es trivial mostrar que

$$h_{st}\langle B\rangle \subseteq h_{st}(B)$$

pero entre ellos no se cumple necesariamente la igualdad. Es posible tener modelos conjuntistas donde la contenencia sea estricta (p. ej. $\varnothing = h_{st}\langle\varnothing\rangle \neq h_{st}(\varnothing)$), lo cual significa que el universo también crecería «por debajo».

Para establecer la igualdad, propiedad deseable si queremos que esta teoría no se aparte demasiado de la clásica, se requieren dos condiciones:

Primera, la introducción de un nuevo axioma puramente conjuntista y bastante natural

$$\forall a\ \forall b\ (a \in b \rightarrow P\ \exists z(a = z))$$

el cual trata de expresar la idea intuitiva de que los elementos de un conjunto existen antes que dicho conjunto; primero deben existir los objetos y luego sí trabajarse con ellos, colectivizarse, unirse, intersectarse.

La segunda condición, un poco sorprendente, es que el segmento temporal

$$(s,t) = \{r \in T \mid s < r < t\}$$

debe ser bien ordenado.

Esta implica en particular que el tiempo no podría ser contínuo, no podría tener la estructura de los números reales con su orden usual.

Es posible que la igualdad antes mencionada se logre establecer para un tiempo continuo agregando algún axioma conjuntista más fuerte que el dado; en caso contrario, tendríamos que resignarnos a aceptar un tiempo discreto con estructura de «árbol».

BIBLIOGRAFIA

[1] Caicedo, Xavier. *Elementos de Lógica y Calculabilidad*. Universidad de Los Andes, Bogotá, 1978.

[2] Cantor, George. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. Dover P. C., New York, 1915.

[3] Chellas, Brian F. *Modal Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[4] Frege, Gottlob. *Grundgesetze der Arithmetik*. Jena, vol. I, 1893.

[5] Enderton, Herbert. *A mathematical introduction to logic*. Academic Press, New York, 1972.

[6] Gardies, Jean-Louis. *Lógica del tiempo*. Paraninfo, Madrid, 1979.

[7] Mendelson, Elliot. *Introduction to mathematical logic*. D. van Nostrand C., New York, 1979.

[8] Muñoz Q., José M. «Consistencia, validez y completitud de un sistema proposicional de lógica temporal». *Boletín de Matemáticas*, Vol. XXIII, Nos. 1-2 de 1993.

[9] Muñoz Q., José M. *Lógica temporal y teoría de conjuntos*. Trabajo de titularidad, Univ. Nal. de Colombia, 1991.

[10] Páramo P., Jorge. «La lingüística y el tiempo. El tiempo y las lenguas». *Cuadernos de Filosofía y letras*, Vol. VIII, Nos. 1-2, 1985.

[11] Pérez, Augusto. «El concepto de tiempo en la psicología y la dimensión temporal de alteraciones psicológicas». *Cuadernos de Filosofía y letras*, Vol. VIII Nos. 3-4., 1985.

[12] Rescher, N. and Urquhart A. *Temporal Logic*. Springer-Verlag, Wien, New York, 1971.