LOS NUMEROS NATURALES COMO BASE DE DATOS UNIVERSAL

Jesús Mosterín
Universidad de Barcelona

Quisiéramos poder medir la complejidad (o cantidad de forma o estructura) de cualesquiera objetos simbólicos finitos tales como cromosomas, textos, pinturas y trozos de música. ¿Cuánta forma debe tener tal objeto? Cuán complejo es? Y quisiéramos que nuestra medición fuera uniforme de tal modo que nos permita comparar la complejidad de objetos heterogéneos tales como genes, fotografías y canciones.

Una estrategia prometedora para alcanzar este resultado consiste en codificar los diferentes objetos simbólicos utilizando los números naturales, de tal modo que nuestras preguntas acerca de los múltiples objetos que nos interesan se transformen en preguntas uniformes acerca de números naturales. Específicamente, nuestras indagaciones acerca de la complejidad de los objetos simbólicos se transformarían en indagaciones acerca de la complejidad de números naturales. Esto sería especialmente bienvenido, pues al menos desde Kolmogorov disponemos ya de una medida precisa de la complejidad de los números naturales.

Las numeraciones de Gödel.

La primera codificación numérica de textos o secuencias la introdujo Kurt Gödel en 1931, y desde entonces este tipo de codificaciones numéricas se ha convertido en un estándar en lógica matemática[1] con el nombre de numeraciones de Gödel.

En un sentido muy general, un alfabeto es un conjunto finito de símbolos. Una palabra, un texto o una cadena sobre un alfabeto es una secuencia finita de símbolos de ese alfabeto (por supuesto, el mismo símbolo puede figurar varias veces en diferentes posiciones en la secuencia). Llamemos W al conjunto de todas las palabras o cadenas sobre un alfabeto dado. Para cualquier cadena w con respecto a ese alfabeto, se tiene que $w \in W$.

Una *numeración de Gödel* de un lenguaje escrito W es cualquier función (o asignación de números -llamados números de Gödel- a cadenas) g: $W \to N$, tal que se satisfagan las siguientes condiciones:

[1] Hermes 1971, Boolos and Jeffrey 1980, etc.

(1) La función g es uno-a-uno, i.e., se asignan números de Gödel diferentes a cadenas diferentes: $w_1 \neq w_2 \Rightarrow g(w_1) \neq g(w_2)$.

(2) La función g es computable, i.e., para cualquier cadena dada w es posible computar su número de Gödel g(w) efectivamente.

(3) El rango g(W) es decidible, i.e., para cualquier número natural dado n puede decidirse efectivamente si n es o no un número de Gödel.

(4) La función inversa g-1 es computable, i.e., para cualquier número de Gödel $n \in g(W)$ dado es posible computar efectivamente la cadena w de la cual él es el número de Gödel (i.e., la cadena w tal que g(w) = n).

En una numeración de Gödel dada cada cadena representa un número y cada número de Gödel codifica una cadena.

LA NUMERACIÓN GÖDELIANA DE GÖDEL

Gödel presentó en su comunicación de 1931 la primera numeración de Gödel (así llamada en su honor), una codificación numérica del lenguaje formal de los *Principia Mathematica* tal como Gödel los había reconstruido.

La idea general era la siguiente: Sea *A* el alfabeto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n\}$. Primero asignamos los n primeros números impares consecutivos a los símbolos de *A*: 1 a a_1, 3 a a_2, 5 a a_3, 7 a a_4, ... 2n-1 a a_n. Llamemos γ a esta función de *A* en N . Para cualquier símbolo a_i: $\gamma(a_i) = 2i\text{-}1$. Una vez definido γ: A $\rightarrow$ N, podemos definir la numeración de Gödel g: W $\rightarrow$ N de la siguiente manera: para toda cadena, i.e., para toda secuencia finita $z_1, z_2, z_3, \ldots z_m$ de símbolos de *A*:

$g(z_1 z_2 z_3 \ldots z_m) = p_1^{\gamma(z1)} \cdot p_2^{\gamma(z2)} \cdot p_3^{\gamma(z3)} \cdot \ldots \cdot p_m^{\gamma(zm)}$, en donde p_i es el i-ésimo número primo.

Obviamente g satisface las condiciones para una numeración de Gödel, incluyendo la tercera. La descomposición unívoca de cualquier número natural en números primos nos permite decidir si cualquier número natural dado es o no un número de Gödel. Por ejemplo, $1992 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 83^1$ no es un número de Gödel, pues el tercer número primo de su descomposición no es el tercer número primo, 5, sino 83. Por el contrario, $2700000 = 32 \cdot 27 \cdot 3125 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ sí es un número de Gödel, a saber: $g(a_3 a_2 a_3)$.

Los símbolos del alfabeto S = {*x*, ', ¬, ∧ , ∨ , ∀ , ∃ , =} de la lógica de primer orden con identidad (en la cual las variables son x', x'', x''', etc.) pueden asignarse a los números 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 y 17, respectivamente. Sobre esta base, y de acuerdo con las indicaciones previas, se puede establecer una numeración de Gödel g de todas las cadenas finitas de símbolos de S. Por ejemplo, g(¬∃x' ¬ x' = x') = $2^7 \cdot 3^{13} \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 11^7 \cdot 13^3 \cdot 17^5 \cdot 19^{17} \cdot 23^3 \cdot 29^5$.

Con ayuda de su codificación numérica de las cadenas de símbolos y variables lógicos, Gödel pudo transformar cuestiones lógicas (por ejemplo, si una fórmula era deducible de otra fórmula) en cuestiones aritméticas (si un determinado número estaba en una determinada relación aritmética con otro número). Y esta representación numérica fue esencial para la prueba de su célebre teorema de la incompletitud de la aritmética formal: ninguna teoría formal que incluya a la aritmética elemental puede ser axiomatizable (i.e., enumerable recursivamente), consistente y completa (en el sentido de responder cualquier pregunta formulable en su lenguaje). Si es axiomatizable y consistente, entonces tiene que ser incompleta.

SISTEMAS ARBITRARIOS DE NUMERACIÓN POSICIONAL

Un numeral es un nombre para un número. Sistemas de numeración diferentes proporcionan nombres diferentes para el mismo número.
Un sistema de numeración es un dispositivo notacional que provee nombres para todos los números. Hay diferentes tipos de sistemas de numeración. Muchos sistemas antiguos eran aditivos: cada numeral compuesto (por ejemplo, el romano *XXXII*) representaba la suma de los números representados por sus numerales componentes simples (en este caso, 10+10+10+1+1 = 32; nótese que *X* siempre representa 10, cualquiera que sea la posición que ocupe). Por el contrario, en un sistema posicional de numeración el número representado por cada numeral simple, o dígito, cambia de acuerdo con la posición que ocupa en el numeral compuesto. Por ejemplo, en nuestro sistema decimal habitual, el primer *9* en *909* representa 900, pero el último *9* representa precisamente 9.

Un sistema posicional de numeración se caracteriza por su base b, en donde b es un número natural mayor que 1. El alfabeto del sistema consiste en b símbolos, llamados dígitos (o dígitos b-arios, en donde b es la base). Las cadenas que se construyen sobre ese alfabeto (i.e., las secuencias finitas de dígitos b-arios) son los numerales del sistema.

La palabra *dígito* (del latín *digitus*, dedo) no es un nombre apropiado para los "dígitos", o símbolos numéricos básicos, de cualquier sistema de base b ≠ 10, pues nosotros tenemos exactamente diez dedos, ni más ni menos. No obstante, es habitual llamar a los símbolos básicos de cualquier sistema posicional de numeración "dígitos", y así lo haremos nosotros aquí.

Llamemos $d_1, d_2, \ldots, d_b$ a los dígitos b-arios. El dígito d_1 representa al número 0, el dígito d_2 representa al número 1, el dígito d_3 representa al número 2, y así sucesivamente, hasta el dígito d_b, que representa al número b-1.

Todo número natural puede descomponerse en potencias de b. Y todo número natural tiene una representación unívoca en el sistema posicional de numeración con base b.

Toda secuencia finita de dígitos b-arios representa unívocamente un número natural. Sea a_i el número representado por el dígito a_i.

$$a_1 a_2 .. a_n = a_1 \cdot b^{n-1} + a_2 \cdot b^{n-2} + ... + a_n \cdot b^{n-n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b^{n-i}$$

Cada dígito a_i en el numeral posee un valor nominal (= a_i) y un valor posicional (= b^{n-1}). Su valor total es el producto de ambos valores.

Sea A cualquier alfabeto de k símbolos (i.e., |A| = k), y sea a_0 el primer símbolo de ese alfabeto. Una cadena normal sobre A es cualquier cadena (secuencia finita) sobre A que no comience con a_0. Hay k^n cadenas de longitud n sobre el alfabeto A. Y hay $(k-1)k^{n-1} = k^n - k^{n-1}$ cadenas normales de longitud n sobre este mismo alfabeto. Entre los números naturales y las cadenas normales sobre A, se da una correspondencia uno-a-uno. Más aún, esta correspondencia es una numeración de Gödel del conjunto de cadenas normales, que son los numerales de un sistema posicional de numeración k-ario.

SISTEMA DE NUMERACIÓN UNARIO

La definición general de un sistema posicional de numeración (que se da para la base b > 1) se aplicaría también (aunque esto tiene algo de inocuo) para b = 1, si nos dispensáramos del 0. El 0 no puede representarse, pero todos los demás números sí.

En un sistema de numeración de base 1 hay un "dígito" único: *1*. Cualquier número n es denotado por una cadena de n unos. $11...1 = 1 \cdot 1^{n-1} + 1 \cdot 1^{n-2} + ... + 1 \cdot 1^0 = 1 + 1 + ... + 1 = n$. Por ejemplo, *1* = 1, *11* = 2, *111* = 3, *1111* = 4, *11111* = 5, etc.

El sistema de numeración de base 1 es también un sistema puramente aditivo en el cual cada dígito (i.e., 1) tiene sólo un valor (el valor nominal), independiente de la posición. En el sentido de que no hay valor posicional diferente del valor nominal, quizás podríamos decir que el sistema de numeración de base 1 (las cadenas de marcas, o 1s) no es un sistema posicional de numeración.

Por supuesto, si cambiamos la definición y representamos n como si fuera n+1, entonces podemos representar todos los números naturales, incluyendo el 0. Cada número natural n se representa entonces por una cadena de marcaciones de n+1, o *1*s. Pero este no sería de ningún modo un sistema posicional. Si el dígito *1* representara el número 0 y el sistema fuera posicional, entonces cada cadena de *1*s representaría la suma sumandos que incluye cada 0 como un factor, y así cada cadena de *1*s sería sólo un numeral para el número 0! El sistema de numeración consistente en cadenas de *1*s como numerales es útil y viable (p.ej., en la teoría de la máquina de Turing), sólo que no es un sistema posicional.

SISTEMA BINARIO

El sistema binario es un sistema posicional de numeración de base b = 2. Los dos dígitos binarios son *0*, *1*. El dígito *0* representa el número 0, y el dígito *1* representa el número 1.

Todo número natural puede descomponerse en potencias de 2. Por ejemplo, $1993 = 1\cdot 2^{10} + 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$.

Toda secuencia finita de dígitos binarios representa un número natural. Sea a_i el número representado por el dígito binario a_i.

$$a_1 a_2 \ldots a_n = \mathrm{a}_1\cdot 2^{n-1} + \mathrm{a}_2\cdot 2^{n-2} + \ldots + \mathrm{a}_n\cdot 2^{n-n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{a}_i\cdot 2^{n-i}$$

Por ejemplo, $10011 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 19$.

Cualquier secuencia finita de 0s y 1s es una cadena binaria. Una cadena binaria normal es una cadena binaria que no comienza con un 0. Hay 2^{n-1} cadenas binarias normales de longitud n. Y hay una correspondencia uno-a-uno entre las cadenas binarias normales y los números naturales. Más aún, la correspondencia es una numeración de Gödel del conjunto de cadenas binarias normales, que son los numerales del sistema de numeración binaria.

SISTEMA DECIMAL

El sistema decimal es un sistema posicional de numeración de base b = 10. Los diez dígitos decimales son *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*. El dígito *0* representa el número 0, el dígito *1* representa el número 1, el dígito *2* representa el número 2, y así sucesivamente hasta el dígito *9*, que representa el número 9.

Todo número natural puede descomponerse en potencias de 10. Por ejemplo, $1993 = 1\cdot 10^3 + 9\cdot 10^2 + 9\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0$. Todo número natural tiene una representación unívoca en el sistema decimal. Por ejemplo, 1993 = *1993*.

Toda cadena de dígitos decimales representa un número natural. Sea a_i el número representado por el dígito decimal a_i.

$$a_1a_2...a_n = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + ... + a_n \cdot 10^{n-n}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 10n\text{-}i$$

SISTEMA DE NUMERACIÓN DEL ADN

El sistema de numeración del ADN es un sistema posicional de numeración de base b = 4. Los cuatro dígitos del ADN son *A* (adenina), *T* (timina), *G* (guanina) y *C* (citosina). El dígito *A* representa el número 0, el dígito *T* el número 1, el dígito *G* el número 2, y el dígito *C* el número 3.

Todo número natural puede descomponerse en potencias de 4. Todo número natural tiene una representación unívoca en el sistema de numeración del ADN. Por ejemplo, $1993 = 1 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = TCCAGT$ (Nótese que el primer tripleto, *TCC*, es el código para el aminoácido serina).

Toda cadena de dígitos del ADN representa de manera unívoca un número natural. Sea a_i el número representado por el dígito del ADN a_i.

$$a_1a_2...a_n = a_1 \cdot 4^{n-1} + a_2 \cdot 4^{n-2} + ... + a_n \cdot 4^{n-n}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 4^{n-i}$$

Por ejemplo, las siguientes cuatro cadenas (todas tripletas de codones que cifran el mismo aminoácido, alanina) representan los números 44, 45, 46, 47.

$GCA = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 = 44$
$GCT = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = 45$
$GCG = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 46$
$GCC = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 = 47$

Una cadena normal del ADN es cualquier cadena de dígitos del ADN que no comience con A. Existen $(4\text{-}1)4^{n-1} = 4^n\text{-}4^{n-1}$ cadenas normales del ADN de longitud n. Hay una correspondencia uno-a-uno entre las cadenas del ADN normales y los números naturales. Más aún, esta correspondencia es una numeración de Gödel del conjunto de cadenas normales del ADN, que son los numerales de un sistema posicional de numeración ADN.

La información genética que contiene el plan detallado de toda criatura viviente está codificada en su ADN. Todo segmento de ADN, todo gen[2], todo

[2] La iniciación de un cistron o gene está marcada por el codón *AUG* (en el ARN) o *ATG* (en el ADN). Como este codón comienza con *A*, la cadena que forman él y el gene consiguiente no es una cadena normal, de tal modo que para su codificación se requieren mayores especificaciones.

cromosoma es un numeral del sistema de numeración ADN y representa unívocamente un determinado número natural. El genoma total de un organismo también es un numeral, un nombre de un determinado número natural, "el" número que define o codifica a ese organismo. Los números naturales codifican no sólo los planos detallados de todo organismo pasado, presente y futuro, sino incluso de todo organismo posible que esté basado en el ADN que pueda alguna vez existir.

El sistema de numeración del alfabeto inglés

El sistema de numeración del alfabeto inglés es un sistema posicional de numeración de base b = 40. Los cuarenta dígitos del alfabeto inglés (en una de las posibles versiones del alfabeto inglés) son □, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *U*, *V*, *W*, *X*, *Y*, *Z*, ., ,, ;, :, ¡, -, ?, (,), «, », ', /. Notemos que el alfabeto (en el sentido que es pertinente aquí) incluye no solamente las letras sino también los signos de puntuación y el espacio en blanco necesario para la composición de los textos. □ es el espacio en blanco. El dígito □ representa el número 0, el dígito *A* el número 1, el dígito *B* el número 2, el dígito *C* el número 3, el dígito *D* el número 4, y así sucesivamente, hasta el dígito /, que representa el número 39.

Todo número natural puede descomponerse en potencias de 40. Por ejemplo, $1993 = 1 \cdot 40^2 + 9 \cdot 40^1 + 33 \cdot 40^0$. Así, todo número natural posee una representación unívoca en el sistema del alfabeto inglés. Por ejemplo, 1993 = *AI?*.

Toda secuencia finita de dígitos del alfabeto inglés (todo texto) representa de manera unívoca un número natural. Sea a_i el número representado por el dígito del alfabeto inglés a_i.

$$a_1 a_2 \dots a_n = a_1 \cdot 40^{n-1} + a_2 \cdot 40^{n-2} + \dots + a_n \cdot 40^{n-n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 40^{n-i}$$

Por ejemplo,

$I = 9 \cdot 40^0 = 9$

$DO = 4 \cdot 40^1 + 15 \cdot 40^0 = 175$

$MY = 13 \cdot 40^1 + 25 \cdot 40^0 = 545$

$BEST = 2 \cdot 40^3 + 5 \cdot 40^2 + 19 \cdot 40^1 + 20 \cdot 40^0 = 200780$

$I\,DO = 9 \cdot 40^3 + 0 \cdot 40^2 + 4 \cdot 40^1 + 15 \cdot 40^0 = 576175$

Una cadena normal del alfabeto inglés es cualquier cadena que no comience con □. Existen $(40-1)40^{n-1} = 40^n - 40^{n-1}$ cadenas normales del alfabeto inglés de longitud n. Entre las cadenas normales del alfabeto inglés y los números naturales se da una correspondencia uno-a-uno. Más aún, esta correspondencia es una numeración de Gödel del conjunto de todos los textos del alfabeto inglés, que son los numerales de este sistema posicional de numeración. Cada vez que algún autor escribe un poema, un ensayo o un libro, está eligiendo un determinado número natural de la base universal, el conjunto de los números naturales, la cual codifica cualquier posible obra individual (escrita o no escrita, profunda o absurda) del alfabeto románico[3].

SISTEMA MUSICAL DE NUMERACIÓN (VERSIÓN DC)

Cualquier música, sonido o discurso hablado puede grabarse con un altísimo nivel de precisión en un DC (disco compacto). La conversión del sistema analógico al digital[4] que se utiliza para la grabación de DCs incluye: (1) la muestra de la onda sonora (a una frecuencia de 44 Khz), y (2) la cuantización (*quantizing*) de las amplitudes de la muestra en $2^{16} = 65536$ niveles discretos de amplitud.

El sistema de numeración musical (versión DC) es un sistema posicional de numeración de base $b = 2^{16} = 65536$. Los dígitos musicales son los diferentes niveles de amplitud utilizados en la cuantización de la onda sonora de la muestra. Si los llamamos la *amplitud 1*, *amplitud 2*, *amplitud 3*, etc., entonces el dígito *amplitud 1* representa al número 0, el dígito *amplitud 2* al número 1, el dígito *amplitud 3* al número 2, etc., hasta el dígito *amplitud 65536*, que representa al número 65535.

Todo número natural puede descomponerse en potencias de 65536. Por ejemplo, $1993 = 1993 \cdot 65536^0$. Todo número natural tiene una representación unívoca en el sistema musical de numeración. Por ejemplo, 1993 = *amplitud 1994*.

Toda secuencia finita de dígitos de amplitud (i.e., todo sonido musical) representa de manera unívoca un número natural. Sea a_i el número representado por el dígito de amplitud a_i.

$$a_1 a_2 \ldots a_n = \mathrm{a}_1 \cdot 65536^{n-1} + \mathrm{a}_2 \cdot 65536^{n-2} + \ldots + \mathrm{a}_n \cdot 65536^{n-n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{a}_i \cdot 65536^{n-i}$$

Por ejemplo, *amplitud 3*, *amplitud 82*, *amplitud 59827* = $2 \cdot 65536^2 + 81 \cdot 65536^1 + 59826 \cdot 65536^0 = 4300270000$.

Un DC convencional tiene alrededor de 600 Mb y sólo puede almacenar cerca de dos horas de música como máximo. Por el contrario, los números

[3] Ideas similares se encuentran en Rucker 1987.

[4] Váse Lebow 1991.

naturales son arbitrariamente grandes y pueden codificar cualesquiera música o sonidos de cualquier duración. Todo discurso hablado, canción o sinfonía es codificado por un determinado número natural. Todo lo que un compositor pueda realizar consiste en seleccionar un determinado número. Y toda música posible, aí como todo ruido posible se encuentra ya codificado por un determinado número. Las mejores sinfonías no serán descubiertas ni ejecutadas jamás, pero ya están codificadas en el reino de los números naturales. La grabación sonora completa de cualquier ser humano, cada sonido que él (o ella) produzca a partir del grito primigenio del nacimiento, pasando por las risas, palabras, susurros y canciones de su vida, hasta los estertores finales de la muerte, todo se encuentra precisamente codificado por un número natural unívocamente determinado. Los números naturales son la única biblioteca musical universal[5].

SISTEMA DE NUMERACIÓN DEL ESTADO DEL PIXEL

Las imágenes que vemos en la pantalla del televisor o en el monitor del computador resultan de dividir la pantalla en un gran número de cuadrados iguales, llamados *pixels*, y de producir en cada pixel un determinado color con un determinado brillo. El estado de cada pixel se caracteriza completamente por su color (que debe elegirse a partir de una determinada paleta de colores disponibles) y por su grado de brillo (que debe elegirse a partir de una determinada escala de luminancia disponible[6].

El sistema de numeración del estado del pixel es un sistema posicional de numeración de base k·d (en donde k es el número de colores disponibles y d es el número de grados de brillo disponibles para cada pixel). Los dígitos de este sistema son los estados particulares del pixel (o combinaciones de un color particular con un grado particular de brillo). El dígito *(color 1, brillo 1)* representa el número 0, el dígito *(color 1, brillo 2)* representa el número 1, y así sucesivamente hasta *(color k, brillo d)*, que representa el número kd-1. En general, para cualquier n ($1 \leq n \leq k$) y cualquier m ($1 \leq m \leq d$), el digito *(color n, brillo m)* representa número $(n-1)d+m-1$.

Todo número natural puede descomponerse en potencias de k·d. Por ejemplo (y suponiendo $k > 16$, $d = 128$), $1993 = 1993 \cdot (kd)^0$. Así, todo número natural tiene una representación unívoca en el sistema de numeración del estado del pixel. Por ejemplo, (y suponiendo de nuevo $k > 16$, $d = 128$), 1993 = *(color 16, brillo 74)*. I.e., el número 1993 es representado por un pixel individual con el 16º color de la paleta y el 74º grado de brillo.

---

[5] La codificación numérica es de la ejecución de una pieza musical. Diferentes ejecuciones representan diferentes números naturales. Así, la codificación es relativa tanto a la muestra particular y a los números de cuantización elegidos como a la particular ejecución qu ha sido grabada. (Esta nota sigue a los comentarios privados de Ivor Grattann-Guinness en Bogotá, 1993).

[6] Véase Luther 1989.

Toda secuencia finita de estados del pixel representa de manera unívoca un número natural. Sean $c(s_i)$ y $br(s_i)$ el número del color y el número del grado de brillo del estado del pixel s_i.

$$s_1 s_2 \ldots s_n = ((c(s_1)-1)d+br(s_1)-1)\cdot(kd)^{n-1} + (c(s_2)-1)d+br(s_2)-1)\cdot(kd)^{n-2} +\ldots+ (c(s_n)-1)d+br(s_n)-1)\cdot(kd)^{n-n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} ((c(s_i)-1)d+br(s_i)-1)\cdot(k\cdot d)^{n-i}$$

Por ejemplo, (y suponiendo k = 1024, d = 128), la cadena de dos pixels con estados del pixel *(color 2, brillo 100)*, *(color 20, brillo 3)* representa el número 29755778.

Cualquier imagen o fotografía puede barrerse con un "scanner" en resolución de alta definición utilizando (por ejemplo) tramas de 1024 x 640 = 655360 pixels, una paleta de 1024 colores y 128 grados de brillo. Cualquier trama semejante se codifica digitalmente como una función de bits, o cadena de 655360 estados de pixel y representa unívocamente un número natural.

Todo número natural codifica una determinada secuencia de pixels, pero no necesariamente una trama singular de un formato dado. En el formato considerado previamente, una trama se componía de 655360 pixels (en un orden fijo). Así, si un número codifica una secuencia de, digamos, 20971520 pixels, entonces codifica una secuencia de 32 tramas.

Todas las películas que vemos en el cine y todos los vídeos que vemos en casa son sólo secuencias finitas de tramas. Como se sabe, percibimos el movimiento continuo como respuesta a una sucesión rápida de tramas estáticas (digamos de 30 tramas por segundo) en nuestro campo visual. Así, una película de una hora y media de duración es una secuencia de 162000 tramas (suponiendo 30 tramas por segundo).

Dadas una determinada paleta de colores y una determinada escala de luminancia, todo número natural n codifica una determinada cadena de (digamos, m) pixels. Dado un determinado formato de trama (de, digamos, p pixels), si $m < p$, entonces el número n codifica sólo parte de una trama. Si $m = p$, entonces n codifica exactamente una trama. Si $m > p$, entonces n codifica más de una trama. Si $m/p = t$, entonces n codifica una película de t tramas.

Así, dado cualquier formato fijo para el análisis de imágenes, existe un sistema de numeración del estado del pixel correspondiente en el cual toda imagen o trama representa un número natural, y toda película (toda secuencia de tramas) representa también un número natural. Inversamente, todo número natural codifica una determinada imagen o una determinada película. El conjunto de los números naturales constituye la única auténtica colección universal de pinturas, así como la única filmoteca y videoteca universales[7], que incluye no solamente todas las pinturas, fotografías, películas y videos jamás realizados o por realizarse en el futuro, sino incluso aquellos que jamás serán pintados o filmados realmente. Cada vez que un artista pinta un cuadro, o toma una foto, o dirige una película, sólo está seleccionando un gran número natural en particular. Cualquiera que sea la calidad o la inspiración de su obra, jamás podrá hacer más (ni menos) que representar un determinado número natural en un sistema posicional de numeración más bien peculiar.

REFERENCIAS

Boolos, George & Richard Jeffrey. 1980. *Computability and Logic* (2nd ed.). Cambridge University Press.

Gödel, Kurt. 1931. "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I". *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, p. 173-198.

Hermes, Hans. 1971. *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit* (2nd ed.). Berlin-New York: Springer-Verlag.

Kolmogorov, Andrei. 1968. "Logical basis for information theory and probability theory". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-14, p. 662-664.

Lebow, Irwin: 1991. *The Digital Connection*. New York: Computer Science Press.

Luther, Arch. 1989. *Digital Video in the PC Environment*. New York: McGraw Hill.

Ming Li & Vitanyi, P. 1990. "Kolmogorov complexity and its applications". In Jan van Leeuwen (ed.): *Handbook of Theoretical Computer Science*. Vol. A: *Algorithms and Complexity*. Amsterdam: Elsevier.

Mosterín, Jesús. 1992. "Scientific theories and the flow of information". In Echeverría, Ibarra & Mormann (ed.): *The Space of Mathematics. Philosophical, Epistemological and Historical Explorations*. Berlin-New York: De Gruyter. P. 366-378.

Poundstone, William. 1985. *The Recursive Universe*. New York: William Morrow.

Rucker, Rudy. 1987. *Mind Tools: The Mathematics of Information*. London: Penguin Books.

---

[7] Véanse ideas similares en Poundstone 1985.