REALISMO VS. FUNCIONALISMO MATEMATICO: UNA ALTERNATIVA

Sandra Visokolskis
UNC

RESUMEN: La Filosofía Analítica desde sus comienzos marcó para la Matemática (y la Lógica) un lugar de relativo *privilegio*, aislándola del contexto de lo empírico, dentro del cual la tendencia ha sido un intento de adoptar un criterio unificado a través de una metodología dominante. Se sostiene e intenta justificar que la noción de demostrabilidad, entendida como la noción *fuerte* de justificación en Matemática, ha jugado un papel condicionante en la distinción analítico-sintético subyacente al original planteo de la Filosofía Analítica, a tal punto que haría imposible cualquier propósito holista de incluir a la Matemática en el corpus *verdaderamente* científico. En vistas a no abandonar un proyecto que podría considerarse heredero de Quine, se propone una alternativa de realismo matemático, que tendría sus raíces en una confrontación de las tesis realistas y antirrealistas respecto de las entidades matemáticas, sostenidas por Hilary Putnam y Hartry Field respectivamente, y que daría lugar a extender la misma hacia otras disciplinas científicas. Esto equivaldría a considerar la Matemática como una actividad seudo-empírica.

Diversos filósofos e historiadores de la ciencia han presentado a la Matemática como una dama fiel con todas las *garantías* que los hombres necesitan para comprometerse con ella: una compañía segura en un cálido hogar donde todo queda pautado de entrada y corre por carriles seguros, sin traspiés, como si no pudieran surgir por ningún lado '*proposiciones indecidibles*'.....

Una dama que no molesta a la hora de averiguar qué es lo que pasa ahí afuera, en el mundo *verdaderamente* real, pero que a la vuelta de las andadas de su marido por el mundo de la experiencia, inseguro, riesgoso, le garantiza el único y auténtico refugio capaz de proporcionar el ansiado final feliz ya preconcebido.

En este trabajo, se propone una imagen de la Matemática más *realista*. A la hora de buscar respuestas a todas las preguntas en el terreno de la Filosofía de la Matemática, ninguna teoría conforma enteramente.

Una cuestión crucial que desde la década del 30 ha venido perturbando a aquellos interesados en buscar o refutar un fundamento para la Matemática, ha estado ligada al papel que juegan las oraciones indecidibles en un programa que intente dar cuenta con verdad de todo cuanto enuncia.

Las posturas realistas en Filosofía de la Matemática ven con buenos ojos la presencia de tales enunciados. Ellos permiten justificar la existencia de una verdad más allá de toda capacidad humana para reconocerla, condición suficiente para postular la existencia de objetos independientemente de todo conocimiento que los seres humanos podamos poseer.

Podemos caracterizar al Platonismo como un realismo extremo en Matemática que presenta las siguientes características:

P1. Hay una *realidad matemática.*

P2. Esta realidad está conformada por elementos (llamados los objetos o entidades matemáticas, y las proposiciones matemáticas), que constituyen una totalidad: el Mundo Matemático.

P3. Esta realidad es a priori, objetiva, externa a todo sujeto (y por tanto, a todo lenguaje, descripción y teoría). Llamaremos a esta tesis: tesis de la Autonomía de la Matemática.

P4. La realidad matemática se representa por medio del lenguaje de manera biunívoca a través de una relación de referencia o extensión, según se trate de términos constantes o variables por un lado y objetos por el otro, o a través de una relación de verdad si lo que se pretende relacionar es proposiciones con oraciones o fórmulas bien formadas.

P5. Existe un criterio (o método) *UNICO* de justificación objetiva que determina la existencia (o no) de un supuesto objeto matemático, y la verdad (o falsedad) de una proposición, estipulando si un determinado término refiere o no y si un enunciado o fórmula matemática bien formada es verdadera o no. Este método es la *DEMOSTRACION MATEMATICA* (con sus diversas variantes).

P6. Existe una teoría matemática ideal que permite describir con verdad (aunque no necesariamente actual) la totalidad del Mundo Matemático.

Un realismo platonista no sólo nos presenta un mundo autónomo de objetos y proposiciones matemáticas, sino que además intenta dar cuenta de la justificación de las afirmaciones matemáticas sustentando una particular noción de verdad de tipo correspondentista.

Es posible discutir al platonismo al menos desde dos ángulos o planos distintos: (i) desde la manera en que está compuesta la realidad matemática (plano ontológico), (ii) desde el tipo de justificación (y por tanto el tipo de verdad asumida) que da garantía a sus afirmaciones (plano semántico-epistemológico).

Se intenta defender una caracterización de realismo, contraria al platonismo, que no admitiría una división tajante entre estos dos planos. Veamos por qué.

Comencemos con el plano ontológico:

Pareciera que en la actualidad una relatividad conceptual es aceptada sin un rechazo masivo generalizado. Pero si la intención de uno es, por un lado no abandonar esta actitud, pero por el otro mantener una postura realista, entonces el camino escogido por Hilary Putnam presenta una síntesis de ambos aspectos.

¿Es posible llevar la relatividad conceptual al extremo de suspender el juicio respecto de la manera misma como la realidad matemática está caracterizada en objetos? ¿Se puede dudar respecto de las nociones que han sido consideradas *primitivas* en Teoría de Conjuntos, esto es, de las nociones de «existencia», «pertenencia», «elemento»?

El platonismo responde a esto claramente que no, ya que sin duda, primero tenemos la materia prima a partir de la cual podemos hablar, en un segundo plano, de esquemas conceptuales, teóricos, lingüísticos, todos los cuales son categorizaciones que los sujetos realizan, con el propósito de alcanzar esa realidad primigenia ya autoidentificada y clasificada de por sí en objetos. La tarea epistemológica viene después, y se limita a representar adecuadamente, mediante el uso del lenguaje, una realidad exterior e independiente de cada sujeto, escogiendo cada vez mejores descripciones que se ajusten a una realidad ordenada a priori.

Las entidades matemáticas, según el platonismo, son los conjuntos, las funciones, matrices, ecuaciones, vectores, etc., objetos autónomos, con existencia previa y separada de cualquier sujeto. El matemático tiene entonces por tarea colocar rótulos que permitan bautizarlas. No hay ninguna construcción de parte del sujeto; *sólo hay que hacer arqueología: descubrirlas y etiquetarlas*.

El Realismo Interno de Putnam propone una alternativa a esta visión, respondiendo afirmativamente a la pregunta antes formulada. Supongamos que nos preguntamos cuáles son los elementos que constituyen el plano euclidiano. Una respuesta posible es: los puntos. Entonces, de acuerdo a esto, los puntos son objetos concretos. Pero otra variante sería: no, los puntos no son las partículas elementales del plano; quienes cumplen esta función son las circunferencias, y los puntos son construcciones abstractas a partir de la noción primitiva de circunferencia, como límites de sucesiones de círculos concéntricos. O también, si se quiere, como intersecciones de haces de rectas, siendo en este caso la recta nuestra noción primitiva.

Pero entonces, ¿todo vale? La decisión respecto de lo que existe, ¿es pura convención? No, no da lo mismo cualquier cosa. Pues cada una de estas versiones se apoya en una teoría diferente y, ya dentro del marco de una visión de mundo aceptada, la respuesta deja de ser convencional.

Es imposible evitar cualquier descripción del plano euclidiano que no sea apoyada en alguna teoría. Pero, una vez aceptada convencionalmente una de tales versiones, no se elude la respuesta: ella está determinada, y no está sujeta a convenciones arbitrarias, opiniones o decisiones culturales.

Hay una subdeterminación intrateórica, una relativización a contextos teóricos mayores. Cualquier descripción del plano euclidiano requiere para su comprensión de la posibilidad de asimilar alguna teoría que la englobe.

En *Razón, Verdad e Historia* Putnam dice:

> Los «objetos» no existen independientemente de los esquemas conceptuales, desmenuzamos el mundo en objetos cuando introducimos uno u otro esquema descriptivo, y puesto que tanto los objetos como los símbolos son internos al esquema descriptivo, es posible indicar cómo se emparejan (Pág. 61)

Y en *The Many Faces of Realism* (y la misma cita en *Representación y Realidad* (Pág. 175)) Putnam dice:

> Podemos y debemos insistir que algunos hechos están para ser descubiertos y no meramente legislados por nosotros. Pero esto es algo que se debe decir cuando uno ya ha adoptado una manera de hablar, un lenguaje, un «esquema conceptual». Hablar de «hechos» sin antes especificar el lenguaje a ser usado es hablar de nada; la palabra «hecho» no tiene fijado su uso por la realidad misma más que la palabra «existe» o la palabra «objeto». (Pág. 36)

La perspectiva internalista nos permite responder por ejemplo de dos maneras distintas a la pregunta «¿cuántos objetos posee este conjunto?», si el caso es que en el «mundo lógico de Carnap» hay tres individuos x1, x2, x3. Trivialmente, desde esta teoría, hay tres elementos. Pero si tenemos en cuenta las sumas mereológicas de Lezniewski, diremos que sus elementos son todas las posibles combinaciones de sumas entre x1, x2, x3. Así, según la versión de la Lógica polaca dada, habrá $2^3 = 8$ elementos, a saber: el individuo nulo, x1, x2, x3, x1 + x2, x1 + x3, x2 + x3, x1 + x2 + x3.

Ninguna de ambas teorías es *la* teoría correcta y la otra es la teoría falsa. Ambas pueden convivir. Ambas cumplen dos requisitos muy preciados por cualquier realista:

(i) consistencia interna,
(ii) compatibilidad con nuestra experiencia cotidiana.

Tal vez la verdadera gran revolución respecto del método en Matemática surge con la introducción de computadoras en distintos procesos de su desarrollo.

Hay dos roles distinguibles hoy que juegan la aparición de las mismas:

Por un lado, colaboran con el matemático en el propósito de formalización exhaustiva, cubriendo lagunas de demostración predecibles por el investigador, aunque muchas de ellas tediosas, acortando los tiempos, acelerando los procesos deductivos.

Por otro lado, y tal vez esto presente mayor interés filosófico, colaboran con el matemático, que es quien las programa, en la obtención de resultados no alcanzados previamente por nadie, y por métodos y tiempos que escapan de toda capacidad física y comprensión para rastrearlos.

En particular, el caso más llamativo a que se hace referencia lo constituye la demostración del Teorema de los Cuatro Colores, presentado en 1976 por Appel, Haken y Koch, y que fuera conjeturada cerca de un siglo atrás.

El Teorema plantea la posibilidad de colorear una superficie plana o una esfera usando únicamente cuatro colores, de tal manera que dos regiones con un único punto en común deberían poseer el mismo color.

El problema que aquí se plantea, entre otros, es que se está en presencia de una demostración de dicho teorema pero con la propiedad de permanecer incompleta en principio si se tiene en cuenta que la manera en que opera en determinados pasos es haciendo elecciones probabilísticas de casos. El tiempo que significaría *rastrear*[1] todo el programa haría de este trabajo uno humanamente imposible.

Tanto el caso de Arquímedes con la implementación de un método mecánico, como el del Teorema de los Cuatro Colores, pueden ser pensados como «*buenas estrategias heurísticas*». Pero el propósito de este trabajo es interpretarlos como claros ejemplos de procesos objetivos de convicción que los matemáticos adoptaron como seudo-pruebas de ciertos teoremas, pero que en realidad podrían haber sido considerados verdaderas justificaciones *si* relajáramos las condiciones de garantía demostrativa.

No es que se deba desechar la clásica noción de *demostración matemática* sino que se debería ampliar, a tal punto de incluir por ejemplo demostraciones computarizadas (aún cuando éstas no permitan a los sujetos rastrear paso a paso sus resultados), o por ejemplo las demostraciones mecánicas de Arquímedes o cualquier tipo de *verificación gráfica* o analítica que permita *convencer*, aunque no necesariamente de manera concluyente, a quien accede a ella.

En el trabajo titulado *¿Qué es la verdad matemática?* Putnam cita un ejemplo todavía más sorprendente y que ha estado en boca de todo matemático que se queje de falta de rigor en su disciplina: el caso de la correspondencia biunívoca

[1] La palabra que se tiene en cuenta aquí es traducción del verbo inglés *to survey*, palabra un tanto problemática en cuanto a la determinación de su referencia.

entre números reales y puntos de una recta ilimitada por ambos extremos. Asombra por lo natural que resultó aceptar esta cuestión durante tantas generaciones de matemáticos, como si hubiera plena evidencia de la misma.

La Matemática se nos presenta con un carácter cuasi-empírico en más oportunidades de lo que parece, menos estable y con más fisuras que las que se suelen destacar.

Aún el mismo platonismo muestra la incerteza en el método al aparecer los *famosos* enunciados indecidibles. Estas oraciones sólo muestran los límites de justificación que una determinada teoría posee. Pero no refutan la teoría.

Paradójicamente, éstos tienden a reforzar la imagen de este tipo de realismo, ya que permiten manifestar un tipo de existencia más allá de todo alcance humano. Pero entonces, si este es el caso también de las lagunas que un programa al estilo propuesto por Appel y Haken presentan, ¿por qué no creer en este tipo de resultados si uno se manifiesta realista?

Davis y Hersch en su libro titulado *The Mathematical Experience* (Harvester Press: London 1981) invitan a aceptar al matemático típico como un platonista de lunes a sábado y un formalista los domingos. Dicen:

> Esto es, cuando está [el matemático] haciendo matemática, está convencido que está tratando con una realidad objetiva cuyas propiedades intenta determinar. Pero entonces, cuando se lo desafía a dar un panorama filosófico de la realidad, encuentra más fácil pretender que después de todo no cree en ella (p. 321).
>
> ...
>
> El matemático típico es tanto un platonista como un formalista: un platonista secreto con una máscara formalista que se coloca cuando la ocasión lo requiere [o cuando los filósofos lo presionan con preguntas molestas, como diría Dieudonné] (p. 322).

Lo que se plantea es la *adhesión* a un *realismo pluralista* donde cada teoría tendría sus propios alcances y sus maneras de constituir y justificar la existencia de los objetos matemáticos que ella caracterice. Ser realista no implica aferrarse a una única teoría. Si, como dijimos antes, las demostraciones matemáticas permiten aceptar creencias, estos conjuntos de creencias pueden ir variando con las distintas culturas y épocas. Por tanto, sería razonable hallar nuevas pautas epistémicas que aseguren confiabilidad a otros métodos.

Este pluralismo no es sólo de teorías sino también de metodologías, y, en esto último (lo del método) Putnam no acordaría, aunque tal vez Field tendería a aceptar con menos dificultad, desde su perspectiva nominalista respecto de las entidades matemáticas. A lo sumo Putnam permitiría verdades justificadas a posteriori aún en Matemática pero no ya justificaciones menos fuertes para siempre.

Volviendo a la metáfora de la *dama matemática*, Putnam presenta una alternativa interesante que intenta dar a la señora un papel más activo en el mundo real. Pero pareciera que le exige al menos *a largo plazo* que cumpla con los requisitos severos de proporcionar una verdad según los cánones más rigurosos, aún cuando esa verdad se alcanzara a posteriori. Pero entonces, todavía esta mujer es engañada: seducida a participar en los verdaderos problemas de una disciplina empírica, se le exige más aún que a los demás. ¿Por qué? Porque hasta ahora demostró que podía. Que estaba en posesión de un método *casi* infalible. Que pese a todas las dificultades de no mostrarse enteramente inquebrantable, se comportaba *mejor* pues respetaba más allá de sus propios designios, los cánones establecidos, todo lo que la teoría le permitía.

¿Cuál sería una verdadera alternativa para la Matemática? ¿Cuál sería una verdadera liberación para esta dama?

Dejémosla andar por el mundo empírico y valerse de esos medios para garantizar su participación productiva en el mundo matemático, en el corpus de conocimiento matemático.

Aceptemos patrones de justificación matemática que no se restrinjan tan sólo a las pautas impuestas por la clásica imagen deductiva aportada por la demostración.

Por otra parte, en general los matemáticos en su labor diaria, no son tan rigurosos y al extremo formalistas. Su manera de trabajar, en la mayoría de los casos (si no en todos), no es siguiendo el modelo euclidiano en todos sus pasos. Hay todavía una heurística puesta en marcha que los productos terminados y publicados no reflejan.

Si pretendemos describir una imagen más verosímil de esta actividad humana, no lo vamos a hacer exclusivamente desde un realismo platonista, ni tampoco, en el otro extremo, desde un nominalismo puro. Ninguna de todas estas formas es ni necesita ser refutada. Sólo hay versiones mejores o peores para determinados fines.