

Las Matemáticas y La Ingeniería Química, Una Relación Sinérgica

Luis A. Caicedo*, Gerardo Rodríguez*, Armando Durán*

RESUMEN

Las matemáticas han estado incluidas en los pensums de ingeniería química desde sus comienzos inicialmente como un aspecto formativo, en la aplicación de la lógica deductiva y su carácter formal, y posteriormente como una herramienta para el diseño, el análisis y optimización de procesos químicos.

El modelo matemático trajo una mayor relación entre las dos disciplinas, pues la solución de los modelos requirió de técnicas más exactas y rápidas. Numerosos libros sobre matemáticas aplicadas han sido escritos por ingenieros químicos especializados en matemáticas o matemáticos con especialidad en Ingeniería Química, lo cual demuestra la dualidad que debe darse en la enseñanza de esta asignatura.

ABSTRACT

Since first pensums Mathematics have been in Chemical Engineering programs. They were formative assignature with application of deductive logic and formal character. Now they are a tool to project, to analysis and to optimization of chemical processes. The mathematical models brought about heavy relation between Mathematics and Chemical Engineering. Many books, about Applied Mathematics, were written by Chemical Engineers with mathematical specialization or mathematician with chemical engineering specialization. This aspect demonstrate that the mathematics teaching in chemical engineering requires this duality.

El desarrollo de la Química Industrial, a raíz de la revolución industrial, trajo como consecuencia el paso de la producción artesanal a la de grandes industrias. La primera dificultad encontrada en este cambio de escala fue la disponibilidad de equipos de gran tamaño, lo cual se solucionó transitoriamente al aplicar el criterio de similitud geométrica respecto a los empleados en el laboratorio y a la experiencia de los metalúrgicos en el manejo de materiales resistentes; de esta forma se lograron montar las primeras plantas para la producción de soda, vitriolo, indigo, etc. La ampliación de los

volúmenes trajo consigo problemas estructurales y de planta física que requirieron la intervención de los ingenieros civiles. Estos problemas se incrementaron posteriormente con la producción de ácido sulfúrico y la generación de energía a partir de vapor, que implicaban el manejo de grandes volúmenes de gases y vapores y por lo tanto requerían de la aplicación de las teorías de los gases conocidas en ese momento.

El nuevo enfoque de la producción obligó a que los químicos mediante cursos cortos - lecturas- profundizarán sobre nuevos temas. Los equipos y sus materiales de construcción fueron los tópicos iniciales, pero se requirió del componente matemático dominado por los ingenieros, y para ello se complementó su formación con la enseñanza del álgebra, la geometría analítica y el cálculo diferencial.

Los primeros programas académicos de Ingeniería Química, que aparecieron hace cerca de 120 años [76], tenían además del componente químico industrial (fabricación de jabones, fabricación de vidrio, fabricación de soda, etc.) uno matemático donde se incluía el álgebra, la geometría y el cálculo diferencial (infinitesimal) especialmente encaminado al estudio cinético de los cuerpos rígidos y partículas. El objetivo de esta inclusión dentro de los programas estaba relacionado con el aspecto formativo por la aplicación de la lógica deductiva y el carácter formal, mas que con la aplicabilidad a los procesos, por tanto, los libros empleados y el enfoque impartido eran netamente matemáticos.

La necesidad de transformar el arte de construir equipos en una ciencia, y la de lograr trasladar con mayor certeza resultados del laboratorio a la escala industrial, creó un nuevo campo de la ingeniería química: el modelamiento matemático. Los modelos, como se indicó en alguna ocasión [13], son la única forma que tenemos los ingenieros de comunicarnos con las máquinas, ya que a través de ellos se nos permite predecir y modificar el comportamiento de un sistema conociendo algunas características del mismo, o como señala Bogoya [10] permite experimentar en el laboratorio abstracto a través de la simulación.

*Ingeniero Químico, M.Sc, Departamento de Ingeniería Química, Universidad Nacional de Colombia

En el inicio las técnicas más empleadas fueron los gráficos, el álgebra y las ecuaciones diferenciales simples. Un estudio de 1926 presentado por el *Journal Chemical Education*, mostró que en 1921 de los 324 artículos presentados en la revista *J. Amer. Soc.* el 24,6% empleó gráficos, 4,6% el álgebra y 12,97% ecuaciones diferenciales, este porcentaje en 1925 se incrementó para los dos primeros que pasaron al 28,74% y 8,74% respectivamente, mientras las ecuaciones diferenciales pasaron a un 7,59% [12].

Posteriormente la técnica del análisis adimensional y específicamente el Teorema de Buckingham permitió obtener, en los inicios del presente siglo, los primeros modelos aplicados especialmente al flujo de fluidos y transferencia de calor [27,47]. Aunque posteriormente se hizo un tratamiento matemático riguroso a la técnica de Langhaar H.L [38], en sus aplicaciones no se requirieron herramientas matemáticas muy profundas, lo cual hizo que la ingeniería las abandonara en parte para hacer énfasis en los modelos empíricos. De otro lado, los modelos basados en la descripción fenomenológica podían llevar a ecuaciones diferenciales imposibles de ser resueltas con las técnicas conocidas como herramientas disponibles en el momento. En 1922 aparece un nomograma de cálculo realizado por Rice [59] que permitía efectuar cálculos de multiplicaciones, divisiones, calculados con fraccionarios, raíz cúbica y cuadrada, potencias, solución de triángulos rectángulos y otras operaciones trigonométricas, lo cual muestra los tipos de cálculos matemáticos que más se empleaban en esta época.

El Químico J.W. Mellor conocido entre nosotros más por su aporte a la química inorgánica [48,49] publicó en 1902 uno de los primeros libros, sino el primero sobre matemáticas aplicadas a los procedimientos fisicoquímicos, que estaba dirigido especialmente a químicos y trataba además del cálculo diferencial e integral, las ecuaciones diferenciales aplicadas a problemas de termodinámica, cinética y equilibrio químico.

Un problema adicional al cual se enfrentaron los primeros ingenieros químicos fue la generación y el empleo de la energía calórica. La combustión y la transferencia de calor comenzaron a ser temas de estudio. En 1906 apareció un libro considerado hasta nuestros días como básico en las matemáticas aplicadas y en especial a la transferencia de calor por conducción "Fourier Series and Integrals and Mathematical Theory of the Conduction Heat" escrito por H.S. Carslaw [15] en él se presentaba la solución de ecuaciones diferenciales resultantes de la aplicación de los conceptos de transferencia de calor a cuerpos de diferentes geometrías y condiciones de contorno. Según su autor, el libro estaba planeado para que sirviera, sin alterar su trabajo matemático, a los físicos e ingenieros aprovechando las soluciones gráficas y analíticas que presentaba. Esta gran contribución de las matemáticas aplicadas a la ingeniería fue enriquecida posteriormente por el mismo autor en colaboración con su discípulo J.C. Jaeger. En 1944 apareció la primera edición del nuevo libro que se denominó "Heat Conduction in Solids" y en 1959 tras la muerte de Carslaw, apareció la segunda y última edición [16].

En el período comprendido entre 1920 y 1947 aparecieron varios libros de matemáticas aplicadas, algunos de los cuales dejaron huella en las escuelas colombianas "Differential Equations" escrito en 1922 por B. Phillips [55]; "Modern Operational Mathematics in Engineering" de R.V. Churchill en 1944 [17], "Applied Mathematics in Chemical Engineering", publicado por Sherwood y Reed en 1939 [64] y "The Application of Differential Equations to Chemical Engineering Problems" de Marchall y Pigford en 1947 [46]

En la década de los 40 aparece un ingeniero químico que ayudaría a producir un cambio cualitativo en la enseñanza de las matemáticas aplicadas a la ingeniería química, Neil Amundson de la Universidad de Minnesota, quien después de obtener su grado de maestría en ingeniería química con una tesis totalmente teórica, cosa no usual en la época, obtuvo su doctorado en matemáticas con un estudio sobre ecuaciones de difusión no lineales, aplicadas al secado y encogimiento de geles. Las contribuciones de Amundson al modelamiento de muchas operaciones de separación y reacción de procesos químicos, sentaron las bases para los desarrollos actuales en ese campo. Sus libros "Mathematical Methods in Chemical Engineering: Matrices and their Applications" [1] y "First Order Partial Differential Equations with Applications" [5] escritos en las décadas de los 60 y los 70 son un resumen de muchos trabajos que en ese campo realizó junto con sus alumnos.

A partir de los trabajos en transferencia de calor, la aplicación de las matemáticas se extendió a otros campos como la difusión en sólidos (Lewis, 1921) [41], difusión en secado (Sherwood 1929,1932) [62, 63], destilación (Lewis, 1922) [40], destilación de mezclas binarias con aplicación de matrices y ecuaciones diferenciales solucionadas mediante diferencias finitas Tiller y Toser en 1944 [69] y Amudson [2]

Crank J. en 1956 [18, 19] basado en el trabajo de Carslaw desarrolló las ecuaciones para difusión en medios porosos y en forma especial en polímeros con diferentes geometrías. En la solución de algunas ecuaciones diferenciales introdujo la variación de la difusividad con la concentración.

En el campo de los reactores químicos el matemático Aris Rutherford, quien fue llevado a la Universidad de Minnesota por Amudson, hizo un gran aporte. Aris, quien desarrollo su maestría y doctorado en ingeniería química, desarrollo en 1960 la tesis doctoral titulada "The Optimum Design Chemical Reactors" [4], que consistió en una aplicación de la programación dinámica a varios sistemas de reacción y reactores. En el campo de la catálisis heterogénea los trabajos iniciales de Damkoler (1938 y 1988) [20] y Thiele (1939) [68], introdujeron los conceptos de transporte a las reacciones catalíticas y por ende las ecuaciones diferenciales parciales, posteriormente los cuales fueron ampliados por Smith y Amundson (1951) [65], Bischoff (1965) [9], Wilhelm (1943) [75], Hulburt (1944) [31], entre otros. Hulburt, por ejemplo, resolvió en 1945 un sistema de ecuaciones para modelar un reactor tubular aplicando las funciones de Bessel [32].

Posteriormente técnicas de solución, poco convencionales, de ecuaciones diferenciales se aplicaron a los nuevos sistemas encontrados al modelar el comportamiento de los reactores químicos. Los métodos de colocación estudiados desde el punto de vista matemático por Frazer, Jones y Skan (1937) [32] o Lanczos (1938, 1956) [36, 71], fueron aplicados a la ingeniería química entre otros por Villadsen (1967, 1978) [36,71] quien se formó en el Instituto de Química Técnica de Dinamarca, y cuyo trabajo presentado en 1967 es considerado como uno de los clásicos de la ingeniería [53]. En las décadas de los 70 y 80 se realizaron gran cantidad de aplicaciones de la técnica de colocación ortogonal; en ellas se daba solución a una serie de problemas de simulación de operaciones y procesos en ingeniería química [23,24]. La revista *Computer & Chemical Engineering* aparece en esta época reafirmando la importancia de las matemáticas y las técnicas computacionales en el desarrollo de la disciplina.

Un importante aporte a la aplicación integral de las matemáticas a la ingeniería química fue dado por Bird, Stewart y Lightfoot de la Universidad de Wisconsin, quienes al querer dar énfasis a los principios físicos básicos de los fenómenos de transporte de momento, calor y masa en la construcción de modelos (sobre los empíricos trabajados hasta el momento), terminaron escribiendo el libro "Fenómenos de Transporte" [8]. Este texto primero de su clase en ser editado, muestra la analogía que existe entre estos fenómenos y la posibilidad de aplicar conceptos de análisis tensorial y los diferentes métodos de resolver las ecuaciones diferenciales resultantes como transformadas de Laplace, variables complejas, etc. Con este tratamiento matemático fenomenológico se comprobaron muchas de las ecuaciones encontradas anteriormente en forma empírica. Se reafirmó además que los fenómenos de transporte no son característica exclusiva de los sistemas no reaccionantes (antiguas operaciones unitarias), sino que están presentes también en los procesos con reacción química y por lo tanto pueden estudiarse en forma integral.

La creación de grandes industrias en el sector petrolero y petroquímico en los años 60 hizo necesaria la optimización de diferentes procesos. La programación lineal cuya teoría había surgido en los años 30 (Kantorovich, 1959) [34] hizo su contribución especialmente en el campo de los transportes y planificación industrial. Las teorías de los campos vectoriales y el álgebra de matrices que se estudiaban desde décadas atrás por matemáticos puros encontraron en la programación un punto más de aplicación.

El empleo en la industria de las teorías sobre el control de calidad y las nuevas exigencias sobre rentabilidad de los procesos obligaron a la implementación de procesos continuos y de allí al estudio de la dinámica de los mismos y su control. La teoría sobre estabilidad desarrollada a finales del siglo XIX por el matemático Liapunov y el francés H. Poincare, fue aplicada a reactores inicialmente por Liljenroth en 1918 [43] y posteriormente por Vann Heeden [70], Aris [3], Lapidus [39], Perlmutter [54], Bilous y Amudson [7], entre otros. Bilous y

Amudson [7] en 1955 introdujeron técnicas de mecanismos no lineales para estudiar reactores de mezcla total y posteriormente en 1956 el análisis de sensibilidad paramétrica en reactores tubulares. El control como caso especial de la dinámica de procesos introdujo el uso de las funciones de transferencia, la transformada de Laplace y las técnicas numéricas de inversión y posteriormente al emplear los equipos digitales la Transformada Z. Libros como el de Lapidus (1962) [39], Douglas (1972) [21], Luyben (1973) [44] y Perlmutter [54], seguidos en algunas de nuestras universidades en esta época son recopilaciones que tratan de algunos de estos temas. El estudio de sistemas multivariados y otros más avanzados de control han atraído nuevos retos a las matemáticas y a la ingeniería química. Textos como "Chemical Process Control" de Stephanopoulos (1984) [67] y la segunda edición de Luyben [44] presentan nuevos campos de aplicación de matemáticas y uso de computador.

Los modelos generados para describir un equipo o un proceso sencillo, aumentaron su complejidad al tener en cuenta casi todas las operaciones involucradas en una planta, y se emplearon como herramientas para el diseño y análisis de los procesos, buscando reducir los costos de los ensayos y disminuir los riesgos en los cambios de condiciones de operación; surge entonces la simulación. Inicialmente en ella, se empleó la analogía con circuitos eléctricos para resolver las ecuaciones diferenciales resultantes. Los libros de enseñanza adoptados en esta época fueron generales para todas las ingenierías, por cuanto igualmente debían aplicar las ecuaciones diferenciales y relacionarlas a los circuitos. Libros de matemáticas como los de Kreyzig [35], Wylie y Barret [76] son algunos ejemplos. La aparición de rutinas de cálculo que requerían muchas calculadoras de suma y resta, como la empleada en la segunda guerra mundial para simular la bomba atómica [50], llevó a pensar en una máquina que pudiera realizarlas y aparece el primer computador digital en 1944, construido por la IBM y la Universidad de Harvard, y posteriormente el primer computador electrónico llamado Eniac en la Universidad de Pennsylvania. Estas máquinas ampliaron las perspectivas de las matemáticas aplicadas a la ingeniería. La sustitución de la simulación analógica por la digital desarrolló el campo de los métodos numéricos sin disminuir la importancia del análisis numérico que permite una mayor generalidad en las conclusiones. El lenguaje Fortran fue en esta época el de mayor uso en ingeniería, sobresale en este período (1969) el libro de Carnahan - Luther y Wilkie "Applied Numerical Methods" [14] con una buena recopilación de ejemplos aplicados a ingeniería.

La simulación ampliada a todo un proceso requirió de un trabajo arduo y largo, lo mismo que de técnicas matemáticas muy diversas. Empiezan a aparecer entonces grandes programas de computador como el ASPEN, el DESIG, el PROCESS y el HYSIM entre otros, con más de un millón de líneas y que permiten diseñar y analizar un proceso integral o sus partes. La necesidad de no solo analizar un proceso sino el de optimizarlo llevó a la aplicación de la Programación

Dinámica a finales de los años 60 y comienzos de los 70. Optimización de sistemas de evaporación multiefecto (1968) [33] y otros trabajos permitieron editar libros como "Optimización de Procesos" de Ray y Sztely (1973) [56], "Chemical Process Optimization" de Himmelblau (1970) [30], "Strategy of Process Engineering" de Rud y Watson (1968) [60], "Material and Energy Balance Computations" de Henley y Rosen (1969) [28]. "Process Analysis and Design for Chemical Engineers" de Resnick (1981) [58], "Engineering Optimization" de Reklaitis, Ravidran y Ragsdell (1983) [57].

La ingeniería desde sus inicios aplicó modelos determinísticos, pero una rama de las matemáticas ya había incursionado desde el siglo XIX en el nuevo campo de las probabilidades. Esto permitió una nueva herramienta a la ingeniería y es así como en los años 60 empiezan a aparecer "Los Modelos Estocásticos", que están basados en las teorías probabilísticas. Modelos estocásticos y específicamente las cadenas de Markov han sido empleados para estudiar la cinética de reacciones químicas en reactores por lotes Frefrickson (1966) [26] o distribución de tiempos de residencia R. Nassar [51], Too y Fan (1981) [52] o para modelar el flujo en sistemas que contienen "n" compartimientos. Wen y Fan al respecto editan en 1975 el libro "Models for Flow Systems and Chemical Reactors" [73]. En las últimas décadas empiezan a aparecer con mayor frecuencia artículos donde se aplica a los problemas de ingeniería química el método de Montecarlo [66, 22] desarrollado en 1943 para simular matemáticamente la difusión de los neutrones en los reactores nucleares por los físicos John Von Neuman y S. Ulam, una demostración de cómo la ingeniería plantea nuevos problemas a las matemáticas.

Un ejemplo más de cómo los desarrollos matemáticos encuentran aplicación años después de su publicación es el descubrimiento hecho en el siglo XIX por el alemán Karl Weierstrass, el italiano Giuseppe Peano y el ruso George Cantor, entre otros, de una serie de curvas que poseen un punto denominado "crítico" cerca del cual no son derivables y donde la distancia entre dos de sus puntos es infinita, este fenómeno se denominó "fenómeno crítico". En el año de 1957 los científicos ingleses Broadbent y Hammersley [11] trabajando en la elaboración de caretas antiguas para minas, esbozan las primeras ideas de una teoría que trata de explicar el flujo de gases a través de poros y que se denominó, por analogía con la preparación de café (tinto), Teoría de la Percolación y la cual guarda mucha relación con los fenómenos críticos. La Teoría de la Percolación, basada en variables aleatorias, sirve de base para el estudio de los fenómenos críticos donde las propiedades físicas guardan mucha relación con la geometría y el desorden. Esta "Geometría del Desorden" donde están incluidos los fractales o bloques que conforman el sistema, ha tenido su mayor desarrollo en el estudio de los superconductores, pero son muchos más los campos en los cuales se puede aplicar. A pesar de que no existen libros específicos de la Geometría del desorden y Teoría de la Percolación aplicados específicamente a Ingeniería Química, ya se han editado algunos de carácter general como el de Muhammad Sahimi (1994) [61] y el de

Avnix [6]. La gran cantidad de procesos en ingeniería química que emplean materiales porosos (filtración, lixiviación, catálisis, etc.), abren una amplia posibilidad de aplicar esta teoría para modelarlos, simularlos y explicarlos mucho mejor.

Además de las anteriores aplicaciones actualmente los sistemas inteligentes, las redes neuronales son algunas de las nuevas herramientas con que cuenta la ingeniería química para modelar matemáticamente sus procesos [29], pero sin duda, en el futuro habrá muchas más herramientas, algunas de las cuales se encuentran en el campo de la discusión teórica y abstracta de los matemáticos y requieren encontrar un eslabón que las una a la ingeniería.

Es importante advertir que en esta revisión, es difícil e imposible incluir a todos aquellos que de una u otra forma han hecho contribuciones a las matemáticas aplicadas a la ingeniería química; los libros que han aparecido, de los cuales se mencionan aquí solo aquellos de fácil asequibilidad y lectura en nuestro medio, y los que seguirán apareciendo sobre el tema son una recopilación y ordenamiento bajo la perspectiva de cada autor, de trabajos publicados en revistas y libros de diferentes disciplinas. La labor de muchos investigadores, toma forma de una manera clasificada y sedimentada en los libros que se convierten en la primera fuente de consulta o búsqueda de información. Sin embargo, son las publicaciones periódicas las que enriquecen día a día con nuevos ejemplos y nuevas técnicas matemáticas.

De otro lado, el desarrollo de las matemáticas y su aplicabilidad tienen que ver tanto con el conocimiento de las teorías como de los fenómenos que se desean explicar mediante modelos matemáticos. Por esta razón, la enseñanza de las matemáticas en ingeniería debe comprender por una parte el estudio de las técnicas matemáticas en general, sin importar su aplicación inmediata, buscando como objetivos la formación del espíritu deductivo lógico y el conocimiento de los avances de esta ciencia básica; pero por otra, debe incluir un elemento integrador que conozca tanto las técnicas como los fenómenos, que los pueda describir matemáticamente, que pueda establecer o fijar las restricciones y escoger las técnicas más convenientes para cada caso. Ingenieros con gran capacidad de generación de modelos y alta formación matemática o matemáticos con buena formación ingenieril para poder entender los fenómenos que se desean explicar matemáticamente, podrán ser el elemento de enlace tan necesario en los actuales momentos de la ingeniería. Sólo de esta forma se logrará estar en capacidad de asimilar y generar información en el campo de la ingeniería química, que día a día crece tanto por su propia dinámica como por la de otras disciplinas, como las matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

1. AMUNDSON, N.R. "Mathematical Methods in Chemical Engineering: matrices and their Applications", Prentice Hall, 1966.
2. ———. "Applications of Matrices and Finite Difference Equations to Binary Distillation". En: *Trans. Aiche*, 42, 939-46, 1946.

3. ARIS, R. "Studies in Optimization". En: *Chem. Eng. Sci.*, 12, 243-52, 1960.
4. ———. "The Optimum Design Chemical Reactors". *Tesis Presentada a la Universidad de Minnesota*, 1960.
5. ARIS, R. and AMUNDSON, N.R. "*Mathematical Methods in Chemical Engineering: First Order Partial Differential Equations with Applications*", Prentice Hall, 1973.
6. AVNIX, D. (Ed). "*The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*". J. Wiley.
7. BILOUS, O and AMUNDSON, N.R. "Chemical Reactor Stability and Sensitivity", *AIChE J.* 1, 513,-,211, 1955.
8. BIRD, R.B., STEWAR, W.E. y LIGTFEET, E.N. "*Transport Phenomena*", Wiley, 1960.
9. BISCHOFF, K.R. "Effectiveness Factors for General Reaction Rate Forms". En: *AIChE. J.* 11, 351, 1965.
10. BOGOYA, D. "Naturaleza de la Simulación" En: *Ingeniería e Investigación* No.29, pp 45, Bogotá, 1996.
11. BROADBENT, S.R. y HAMMERSLEY, J.M. En: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 53, 629, 1957.
12. BRODSHAW, B.C. "Relations of Mathematics to Chemistry" En: *J. Chem Educ.* 3, pp. 1293, 1926.
13. CAICEDO, L. *Presentación Oral Seminario de Biotecnología*, Universidad Nacional de Colombia, 1987.
14. CARNAHAM - LUTHER and WILKEE. "*Applied Numerical Methods*", J. Wiley, New York, 1969.
15. CARSLAW, H.S. "*Fourier Series and Integrals, and the Mathematical Theory of the Conduction of Heat*". Macmillan, 1906.
16. CARSLAW, H.S. y JAEGER, J.C. "*Conduction of Heat in Solids*". Oxford, 1959.
17. CHURCHILL, R.V. "*Modern Operational Mathematics in Engineering*". McGraw Hill, 1944.
18. CRANK, J. "Mathematics of Diffusion". *Oxford University Press, London*, 1956.
19. CRANK, J. and PARK, G.S. "Diffusion in Polymers". *Academic Press*, Londres, 1968.
20. DAMKOLHER, G. "Influence of Diffusion, Fluid Flow and Heat Transport on Yield in Chemical Reactors". *International Chemical Engineering*, 28, 132 - 98, 1988, Traducido del original de 1938.
21. DOUGLAS, J.M. "*Process Dynamics and Control*" Cols 1,2. *Prentice Hall*, 1972.
22. DURMEISTER, L.C., "A Monte Carlo Procedure for Straight Convecting Boundaries". *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 28, 717 - 20, 1985.
23. FINLAYSON, B.A. "The Method of Weighed Residuals and Variational Principles". En: *Academic Press*, New York, 1972.
24. ———. "*Nonlinear Analysis in Chemical Engineering*". *McGraw Hill*, New York, 1980.
25. FRAZER, Jones and SKAN, S.W. "Approximations to Functions and the Solutions of Differential Equations". *Gl. Brit. Air Ministry Aero. Res. Comm. Tech. Rept.*, 11, 517-49, 1937.
26. FREDRICKSON, A.G.. En: *Chem. Eng. Sci.*, 21, 687, 1966.
27. GUPTA, S.K. "*Momentum Transfer Operations*", Tata McGraw Hill, New Delhi, 1979.
28. HENLEY and ROSEN. "*Material and Energy Balance Computations*". *McGraw Hill, New York*, 1969.
29. HERNÁNDEZ, G.J., TORRES, L.G. and NIÑO, L.F. "Fundamentos de Neurocomputación". En: *Ingeniería e Investigación*. No. 30, 63-78.
30. HIMMENBLAU, D.M. "*Chemical Process Optimization*". *McGraw Hill*, New York, 1970.
31. HULBURT, H.M. "Chemical Reactions in Continuous Flow Systems: Reaction Kinetics". En: *Ind. Eng. Chem.*, 36, 1012 - 17, 1944.
32. ———. "Chemical Reactions in Continuous Flow Systems: Heterogeneous Reactions". En: *Ind. Eng. Chem.*, 37, 1063-69, 1945.
33. ITHARA, S. and STIEL, L.I. "Optimal Design of Multiple - Effect Evaporators with Vapor Bleed Streams". En: *I&EC Proc. Design and Develop.* 7, 6, 1968.
34. KANTOROVICH, L.V. "*Métodos Matemáticos y Planificación de la Industria*", Universidad Estatal de Leningrado, 1939, en Barsov A.S., "Qué es la programación lineal", Editorial Mir, Moscú, 1977.
35. KREYSZIG, E. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*.
36. LANCZOS, C.J. En: *Math. Phys.*, 17, 123, 1938.
37. ———. *Applied Analysis*. Prentice Hall, 1956.
38. LANGHAAR, H.L. "*Dimensional Analysis and Theory of Models*". Wiley, New York, 1951.
39. LAPIDUS, L. "*Digital Computation for Chemical Engineering*", *McGraw Hill*, New York, 1962.
40. LEWIS, W.K. "The efficiency and design of Rectifying Columns for Binary Mixtures". En: *Ind. Eng. Chem.*, 14, 492-7, 1922.
41. ———. "The Rate of Drying of Solids Materials". En: *Ind. Eng. Chem.*, 113, 427-32, 1921.
42. LIAPUNOV, M.A. "Probleme général de la stabilité de mouvement", 1882. En: *Ann Math. Studies*, 17, Princeton University Press, 1947.
43. LILJENROTH, F.G. "Starting and Stability Phenomena of Ammonia - Oxidation and Similar Reactions". En: *Chem. Met. Eng.*, 19, 287, 1918.
44. LUYBEN, W.L. "*Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers*". *McGraw Hill*, New York, 1973.
45. ———. "*Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers*", 2nd Ed. *McGraw Hill*, New York, 1994.
46. MARSHALL, W.R. and PIGFORD R.L. "*The Application of Differential Equations to Chemical Engineering Problems*". University of Delaware Press, 1947.
47. MC ADAMS, W. "*Heat Transmission*". *McGraw Hill*, New York, 1993.
48. MELLOR, J.W. "*Higher Mathematics for Students of Chemistry and Physics—with Special Reference to Practical Work*". Longmans, Green, 1902.
49. ———. "*A Comprehensive Treatise on Inorganic & Theoretical Chemistry*". Longman, 1922
50. METROPOLIS, N. and ULAM, S. "The Monte Carlo Method". En: *J. Amer. Statistical Assoc.* 44, (247), 335-41, 1949.
51. NASSAR, R.A. *et al.* En: *Chem. Eng. Sci.*, 36, 1307, 1981.
52. NASSAR, R., TOO, J.R. and FAN, L.T. En: *J. Appl. Polym. Sci.* 26, 3745, 1981.
53. NIELSEN, J. "Editorial in Honor of J. Villadsen". En: *Chem. Eng. Sci.* 52, pp V-V1, 1997.
54. PERLMUTTER, J. "*Introduction to Chemical Engineering Control*", J Wiley, New York, 1965.
55. PHILLIPS, H.B. "*Differential Equations*", John Wiley, 1922.
56. RAY, W.H. y SZATELY, J. "*Process Optimization: With Applications in Metallurgy and Chemical Engineer*" J. Wiley. 1973.
57. REKLAITIS, RADVIDRAN y RAGSDELL. "*Engineering Optimization*", 1983.
58. RESNICK. "*Process Analysis and Design for Chemical Engineers*". *McGraw Hill*, New York, 1981.
59. RICE, E.L. *The J. of Ind. & Eng. Chemistry*, 14, 1032 - 36, 1921.
60. RUD y WATSON. "*Strategy of Process Engineering*", 1968.
61. SAHIMI, Muhammad. "*Applications of Percolation Theory*" *Taylor and Francis Publ., London*, 1994.

62. SHERWOOD, T.K. "The Drying of Solids". En: *Ind. Eng. Chem.*, 21, 12-6, 1929.
63. ———. "The Drying of Solids - Application of Diffusion Equations". En: *Ind. Eng. Chem.*, 24, 307-110, 1932.
64. SHERWOOD, T.K. y REED, C.E. "*Applied Mathematics in Chemical Engineering*", McGraw Hill, 1939.
65. SMITH, N.L. y AMUDSON, N.R. En: *Ind. Eng. Chem*, 43, 2156, 1951.
66. SO, R.M., PRATT, D.T. y NOOVEN, M.D. "Modeling of Mass Transport in Turbulent Shear Flows", *Proc. 7th. Int. Heat Transf. Conference*, 3, 301 - 6, 1982.
67. STEPHANOPULOS. "*Chemical Process Control*". Prentice Hall, 1984.
68. THIELE, E. "*Relation Between Catalytic Activity and Size of Particle*". En: *Ind. Eng. Chem*, 31, 916-20, 1939.
69. TILLER, F.M. y TOURS, R.S. "Stagewise Operations: Application of the Calculus of Finite Differences to Chemical Engineering". En: *Trans. Aiche*, 40, 317-31, 1944.
70. VAN HEERDEN, C. "The Character of the Stationary State of Exothermic Processes". En: *Chem. Eng. Sci.*, 8, 133-45, 1958.
71. VILLADSEN, J.V. y MICHELSEN, M.L. "Solution of Boundary Value Problems by Orthogonal Collocation". En: *Chem. Eng. Sci*, 22, 1483- 1501, 1967.
72. ———. "*Solution of Differential Equations Models by Polynomial Approximations*". Prentice Hall, 1978.
73. WEN and FAN. "*Models for Flow Systems and Chemical Reactors*", Marcel Dekker, New York, 1975.
74. WILHELM, R.H., JOHNSON, W.C and ACTON, F.S. "Conduction, Convection and Heat Release in Catalytic Converters". En: *Ind. Eng. Chem.*, 35, 562 - 75, 1943.
75. WHITT, F.R. "Early Teachers and Teaching of Chemical Engineering". *The Chemical Engineer* No. 356, October, 1969.
76. WYLEI, C.R. and BARRET, L.C. "*Advanced Engineering Mathematics*". McGraw Hill, 1982.