

# DETERMINACIÓN DE LAS INCERTIDUMBRES DE LAS FUNCIONES ÓPTICAS EN LOS PUNTOS DE INTERACCIÓN DEL LHC

## UNCERTAINTY OF OPTICAL FUNCTIONS AT THE INTERACTION POINTS OF THE LHC

Federico Villadiego-Forero\*, Javier F. Cardona

Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, Departamento de Física, Grupo Física de Aceleradores, Colombia.

(Recibido: oct./2023. Aceptado: feb./2024)

### Resumen

En los puntos de interacción de un colisionador, los haces de partículas son fuertemente comprimidos para alcanzar el tamaño más pequeño posible y así maximizar el número de colisiones requeridas por los grandes experimentos como ATLAS o CMS. El tamaño de los haces alrededor de los puntos de interacción está fundamentalmente determinado por dos parámetros:  $\beta_w$ , que es el mínimo valor que las funciones ópticas del acelerador toman en la región de interacción y  $w$ , que mide qué tan alejado está ese mínimo del punto de interacción. Estos dos parámetros son de crucial importancia para determinar posteriormente las funciones ópticas en el punto de interacción y en otros lugares estratégicos del acelerador. En este trabajo, se presenta un análisis de incertidumbres del método actualmente empleado para determinar  $\beta_w$  y  $w$ . Dicho análisis está basado en simulaciones y es inicialmente hecho asumiendo valores de incertidumbre nominales en el tono o frecuencia de las oscilaciones del haz, que es la cantidad que realmente se mide para inferir posteriormente  $\beta_w$  y  $w$ . Las incertidumbres de  $\beta_w$  y  $w$  obtenidas de esta forma son comparadas con las incertidumbres medidas, encontrando diferencias significativas. De los

---

\* fvilladiego@unal.edu.co

datos experimentales, se trata entonces de inferir cuál es el valor real de las incertidumbres asociadas al tono del haz  $y$ , una vez determinada esta incertidumbre, se repiten las simulaciones para estimar las correspondientes incertidumbres asociadas a  $\beta_w$  y  $w$ . Sabiendo la fuerte influencia que las incertidumbres de  $\beta_w$  y  $w$  tienen en la determinación de las funciones ópticas, se deduce un método alternativo para obtener dichas funciones sin necesidad de conocer  $\beta_w$  y  $w$ .

**Palabras clave:** haz de partículas, puntos de interacción, funciones ópticas, LHC.

### Abstract

Particle beams are strongly packed at the interaction points of a collider in order for them to reach the smallest possible size, and thus, maximize the number of collisions required by renowned experiments such as ATLAS or CMS. The size of particle beams around the interaction points is determined by two parameters:  $\beta_w$ , the minimum value of the optical functions of the accelerator at the interaction region and  $w$ , which is the distance of this minimum to the interaction point. These two parameters are of key importance for calculating the optical functions at the interaction point and other strategic positions of the accelerator. In this work an uncertainty analysis of the current method to obtain  $\beta_w$  and  $w$  is carried out. This analysis is based on simulations, initially done using nominal values of uncertainty in the tune, or frequency of beam oscillations, which is the measured quantity from which  $\beta_w$  and  $w$  are subsequently obtained. The uncertainties of  $\beta_w$  and  $w$  are then compared to the measured ones, where significant differences were found. From the experimental data the real value of the tune uncertainties is inferred and simulations are repeated with these values to estimate the uncertainties of  $\beta_w$  and  $w$ . As the optical functions are strongly influenced by the uncertainties of  $\beta_w$  and  $w$ , an alternative method is deduced to obtain the optical functions without the values of  $\beta_w$  and  $w$ .

**Keywords:** particle beam, interaction points, optical functions, LHC.

## Introducción

Los modernos colisionadores de partículas consisten de 2 tubos de vacío moldeados de tal forma que cada uno de ellos forma un curva cerrada y dentro de los cuales se hacen circular partículas que son aceleradas en direcciones opuestas. Estos tubos de vacío se colocan tal que partículas viajando en direcciones contrarias y con la máxima aceleración posible se puedan encontrar y colisionar en ciertos puntos que se conocen como puntos de interacción (IP, por sus siglas en inglés). Esto divide el colisionador en 2 tipos de regiones: los arcos y las regiones de interacción (IR, por sus siglas en inglés). Los arcos corresponden a las partes curvas y las IR son las regiones rectas que están alrededor de los IP, tal como se muestra en la figura 1.

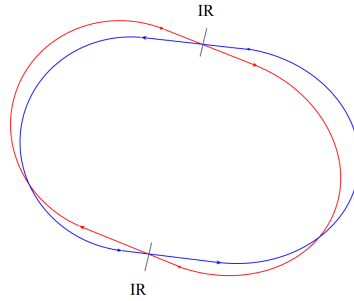


FIGURA 1. *Esquema de un colisionador con sus arcos y sus regiones de interacción*

Para garantizar que los haces de partículas se muevan en el interior de estos tubos de vacío, y en particular en los arcos, se usan imanes de campo constante, conocidos como imanes dipolares. Para concentrar dichos haces y evitar que crezcan en tamaño se usan los imanes cuadrupolares. Los imanes cuadrupolares determinan la óptica del acelerador y están asociados a las llamadas funciones beta del acelerador que describen el tamaño del haz en los diferentes puntos del acelerador a través de:

$$\sigma^2 = \epsilon\beta(s) \quad (1)$$

donde  $\epsilon$  es una constante que caracteriza el haz conocida como la emitancia y  $\beta(s)$ , son las funciones beta que dependen de la

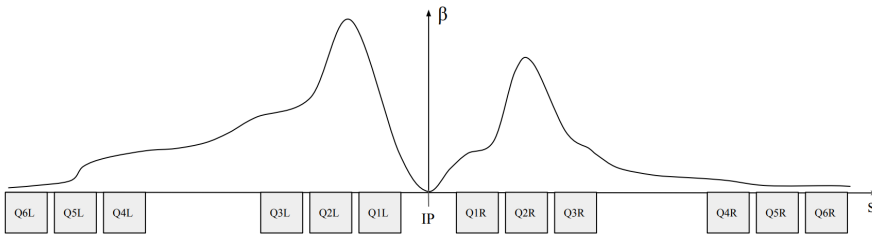


FIGURA 2. Diagrama de los cuadrupolos más cercanos a un punto de interacción y comportamiento de la función  $\beta$ , no a escala

coordenada longitudinal  $s$ . La coordenada longitudinal  $s$  señala el punto específico del acelerador donde se evalúa la función. Típicamente, las funciones beta en los IP ( $\beta^*$ ) son muy pequeñas, lo cual garantiza que el tamaño del haz sea lo más pequeño posible en los IP para lograr el mayor número posible de colisiones en estos puntos del acelerador.

Estructuras especiales de cuadrupolos se utilizan para lograr las reducidas dimensiones requeridas para el haz en los IP, tales como la mostrada en la figura 2. De los cuadrupolos mostrados, las estructuras más importantes son los llamados tripletes, que están conformados por los cuadrupolos Q1, Q2 y Q3 izquierdos (a la izquierda del IP) y derechos (a la derecha del IP). De especial importancia para el estudio de este artículo son las funciones beta en el espacio que existe entre los cuadrupolos Q1L y Q1R. Este espacio no contiene ningún imán dipolar ni cuadrupolar y por lo tanto se le puede considerar como un espacio libre (en realidad, los grandes detectores como ATLAS y CMS se colocan en estos espacios). Las funciones beta en estos espacios son relativamente fáciles de describir; al tratarse de un espacio libre, estas obedecen a una función cuadrática de la forma:

$$\beta(s) = \beta_w + \frac{(s \pm w)^2}{\beta_w} \tag{2}$$

donde  $\beta_w$  corresponde al mínimo de las funciones beta en este espacio y  $w$  a la distancia entre la IP y dicho mínimo. La figura 3 muestra un esquema alrededor de la IP.

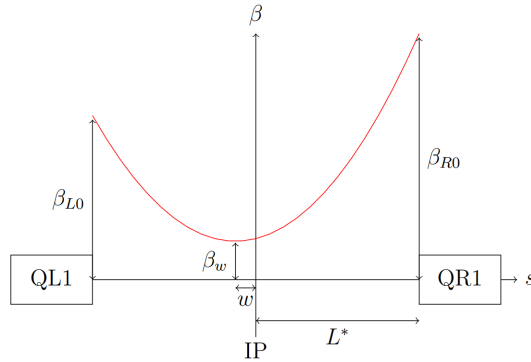


FIGURA 3. Esquema del IP1 del LHC y los diferentes valores de la función beta

Si no hay errores magnéticos,  $w$  es igual a cero y  $\beta^*$  coincide con el valor de  $\beta_w$ . Cualquier error magnético en los cuadrupolos del IR hace que  $w$  ya no sea igual a cero y puede aumentar considerablemente el valor del  $\beta^*$  respecto del valor diseñado. Es entonces de suma importancia medir estos valores para detectar la presencia de errores y, si es necesario, efectuar las correcciones respectivas.

Actualmente, en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC, por sus siglas en inglés) existe un método [1] que permite hallar  $\beta_w$  y  $w$  conocido como k-modulation. Los valores de  $w$  y  $\beta_w$  son usados por diversos métodos de medición y corrección de errores, entre los cuales se pueden destacar el método de salto de acción y fase (APJ, por sus siglas en inglés)[2, 3]. Este método permite hallar correcciones que suprimen el efecto de los errores presentes en los tripletes de los IR de alta luminosidad del LHC, donde se ubican los grandes experimentos, como CMS y ATLAS. También permiten hallar compensaciones a los errores presentes en los cuadrupolos Q4, Q5 y Q6 pero en este caso, la incertidumbre en  $w$  debe ser especialmente pequeña [4]. Otro método utilizado en el LHC para compensar errores en los IR es el llamado método de segmento por segmento (SBS, por sus siglas en inglés) [5]. Este método utiliza como entrada las funciones beta al inicio y al final del espacio libre entre los cuadrupolos Q1L y Q1R ( $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$ ), que se calculan utilizando la ecuación 2 con los valores medidos de  $w$  y  $\beta_w$ . En

este caso, la incertidumbre en  $w$  también tiene un efecto muy importante en la incertidumbre asociada a la determinación de  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$ . Adicionalmente, otros métodos utilizan los valores  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$ , como es el caso de una técnica de calibración de los Beam Position Monitors (BPM) basadas en el método de APJ [6]. Es por tanto de suma importancia conocer las incertidumbres asociadas a  $w$  y  $\beta_w$  y ver cómo se relaciona con la incertidumbre en las mediciones del tono. Estudios detallados de cómo estas incertidumbres afectan el valor del  $\beta^*$  se pueden encontrar en [1] pero no de cómo afectan  $\beta_w$  y  $w$ . En este artículo se pretende hacer estos estudios, incluyendo también el análisis de las respectivas incertidumbres asociadas a  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$ . Adicionalmente, se desarrolla un método algebraico para hallar  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$ , prescindiendo de  $w$  y  $\beta_w$ , ya que sabemos que las incertidumbres asociadas a estas variables contribuyen a la incertidumbre propagada de  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$ .

### Descripción del método actual para hallar $w$ y $\beta_w$

Bajo condiciones normales, el haz de partículas se desplaza a lo largo del acelerador oscilando alrededor de la trayectoria diseñada. La frecuencia de estas oscilaciones está relacionada con lo que se conoce como el tono  $Q$ , el cual está principalmente determinado por la intensidad de campo de los imanes cuadrupolares, y es una cantidad constantemente medida usando los BPM.

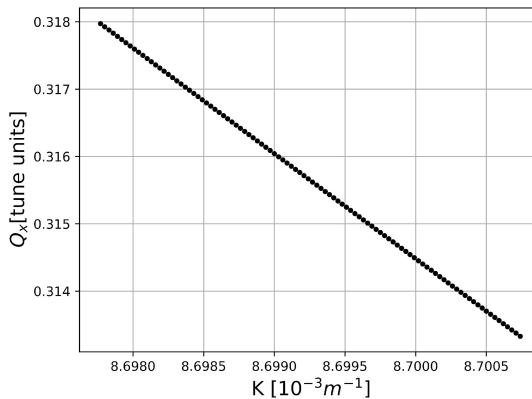


FIGURA 4. Ejemplo curva  $\Delta Q$  vs  $\Delta k$

El método actual para determinar  $\beta_w$  y  $w$  es conocido como *k-modulation*. En este método se realiza una modulación de la intensidad cuadrupolar  $\Delta K$  mientras se registran los respectivos cambios de tono  $\Delta Q$ . Esta modulación se hace variando la corriente que alimenta los imanes de forma sinusoidal mientras se van registrando los respectivos cambios de tono, dando lugar a curvas de  $\Delta Q$  vs.  $\Delta k$ , tal como se ve en la figura 4. Las variaciones de tono son proporcionales a las variaciones de intensidad cuadrupolar y dicha constante de proporcionalidad corresponde al promedio de las funciones beta dentro del cuadrupolo Q1 de acuerdo a:

$$\bar{\beta}_{x,y} = \pm 4\pi \frac{\Delta Q_{x,y}}{\Delta KL} \quad (3)$$

donde el signo da cuenta del plano horizontal o vertical.

Por otro lado, las funciones beta de los Q1s pueden obtenerse desde la matriz de propagación de las funciones de red para un cuadrupolo:

$$\begin{pmatrix} \beta(s) \\ \alpha(s) \\ \gamma(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & -2CS & S^2 \\ -CC' & SC' + S'C & -SS' \\ C'^2 & -2S'C' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{R0} \\ \alpha_{R0} \\ \gamma_{R0} \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde  $\alpha(s)$  está relacionada con la derivada de la función  $\beta(s)$ , y  $\gamma(s)$  es función de las anteriores dos variables. Las tres en conjunto se conocen como parámetros de Twiss, parámetros de Courant - Snyder o funciones de red. Si el cuadrupolo es enfocante entonces  $C(s) = \cos(\sqrt{K}s)$  y  $S(s) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s)$ , y si es desenfocante entonces  $C(s) = \cosh(\sqrt{K}s)$  y  $S(s) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh(\sqrt{K}s)$ . De particular interés es la ecuación para  $\beta(s)$ , la cual al promediarse a lo largo del cuadrupolo, considerando que este es enfocante, se obtiene:

$$\bar{\beta}_f = \frac{\beta_{R0}}{2} \left( 1 + \frac{\sin(2\sqrt{K}L)}{2\sqrt{K}L} \right) - \alpha_{R0} \frac{\sin^2(\sqrt{K}L)}{KL} + \frac{\gamma_{R0}}{2K} \left( 1 - \frac{\sin(2\sqrt{K}L)}{2\sqrt{K}L} \right) \quad (5)$$

Expresando  $\alpha_{R0}$  y  $\gamma_{R0}$  en función de  $w$  y  $\beta_w$  mediante la ecuación 2, asumiendo que  $L \gg \beta_w$  y realizando el mismo cálculo para el otro cuadrupolo se llega a las siguientes dos ecuaciones de la forma:

$$\bar{\beta}_f = \frac{(L^* - w)^2}{\beta_w} f_0 + \frac{(L^* - w)}{\beta_w} f_1 + \frac{1}{\beta_w} f_2 \quad (6)$$

$$\bar{\beta}_d = \frac{(L^* + w)^2}{\beta_w} d_0 + \frac{(L^* + w)}{\beta_w} d_1 + \frac{1}{\beta_w} d_2 \quad (7)$$

donde las constantes  $f_0, f_1, f_2, d_0, d_1, d_2$  dependen únicamente del largo del cuadrupolo y la intensidad cuadrupolar, y cuyas formas explícitas se pueden encontrar en [1]. Al dividir las ecuaciones 6 y 7 se llega a la ecuación 8, de la cual se obtiene el valor numérico de  $w$  si los valores promedios de las funciones beta en los cuadrupolos Q1s han sido medidos previamente:

$$(\chi f_0 - d_0)w^2 - [2L^*(\chi f_0 + d_0) + (\chi f_1 + d_1)]w + (L^*)^2(\chi f_0 - d_0) + L^*(\chi f_1 - d_1) + (\chi f_2 - d_2) = 0 \quad (8)$$

donde  $\chi = \bar{\beta}_d/\bar{\beta}_f$ . Una vez se conoce  $w$ ,  $\beta_w$ , se halla mediante alguna de las ecuaciones 6 o 7 y los valores de  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$  son calculados con la ecuación 2.

### Determinación de las incertidumbres asociadas a $w$ y $\beta_w$ usando la incertidumbre nominal asociada a la medición del tono

La precisión nominal o esperada para la medición del tono al realizar la modulación de cuadrupolos es de  $2.5 \times 10^{-5}$ . Utilizando la óptica del LHC con un valor nominal de  $\beta^* = 0.25$  en IR1, se usó el programa de MADX [7] para simular la modulación de los cuadrupolos más cercanos a la IP1. Cada una de estas simulaciones da una gráfica de  $\Delta Q$  vs.  $\Delta k$ , como la mostrada en la figura 4. Las pequeñas desviaciones respecto del comportamiento lineal se deben a la incertidumbre en el tono que fue introducida a través de una distribución gaussiana con un ancho de  $2.5 \times 10^{-5}$ . Esta incertidumbre es la que hace que cada vez que se repita esta simulación se obtengan valores ligeramente diferentes de las



pendientes de las gráficas de  $\Delta Q$  vs.  $\Delta k$ , que corresponden a las funciones beta promedio de los cuadrupolos Q1 y que, de acuerdo a las ecuaciones 6 y 7, afectan los valores de  $w$  y  $\beta_w$ . Para hallar estos valores, los datos de modulación simulados son alimentados al software de *k-modulation* desarrollado por el equipo de correcciones y medidas del CERN (OMC) [8].

La figura 5 muestra las distribuciones obtenidas para  $w$  y  $\beta_w$  después de repetir el mencionado procedimiento 400 veces. El valor de la desviación estandar para la distribución de  $w$  permite concluir que para una incertidumbre en el tono de  $2.5 \times 10^{-5}$ , la correspondiente incertidumbre esperada para  $w$  está alrededor de los 2 centímetros, que es un poco grande para los valores que originalmente reportaba el software de OMC, los cuales estaban alrededor de 1 cm. Como se mencionó en la introducción, existe un método basado en APJ que permite estimar las correcciones cuadrupolares en los IR [4], que incluye no solo los cuadrupolos Q1 a Q3 sino también los cuadrupolos Q4 a Q6. La aplicación de dicho método a datos del LHC tomados en el 2016 condujo a correcciones razonables para los tripletes, pero para el grupo de cuadrupolos Q4 a Q6 resultó ser demasiado grande. Las altas incertidumbres asociadas a  $w$  y  $\beta_w$ , podrían explicar los grandes valores de correcciones obtenidos. Conocidas las incertidumbres asociadas a  $w$  y  $\beta_w$  también se estimaron las incertidumbres de  $\beta_{R0}$  y  $\beta_{L0}$ . Dichas incertidumbres fueron de 0.24 % y 0.20 % respectivamente, y sus distribuciones se muestran en la figura 6. Adicionalmente, se obtuvo que la incertidumbre únicamente en  $w$  generaba un error del 0.16 % en  $\beta_{R0}$  y  $\beta_{L0}$ , mientras que la de  $\beta_w$  conllevó a un error del 0.14 % en  $\beta_{R0}$  y  $\beta_{L0}$ , siendo menor pero igualmente considerable.

### **Determinación de las incertidumbres asociadas a $w$ y $\beta_w$ con incertidumbres de la medición del tono extraídas de datos experimentales**

Al inicio del llamado run3 del LHC se hicieron experimentos para la determinación experimental de los valores de  $w$  y  $\beta_w$  en diferentes IR del acelerador. En particular, en junio del 2022, se hicieron

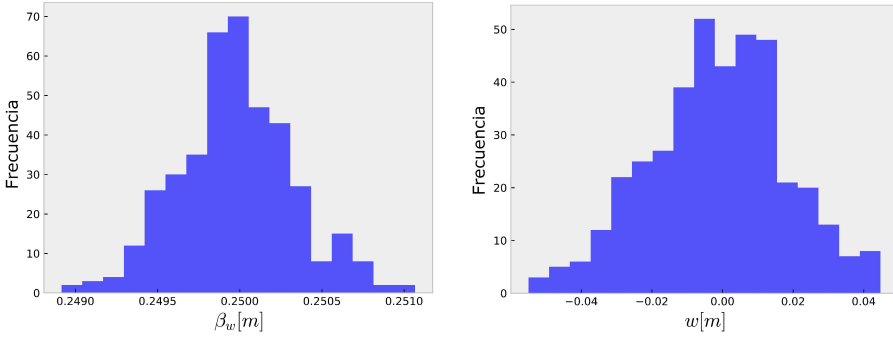


FIGURA 5. Distribuciones de  $\beta_w$  y  $w$  para simulaciones con error en la medición del tono de  $2.5 \times 10^{-5}$

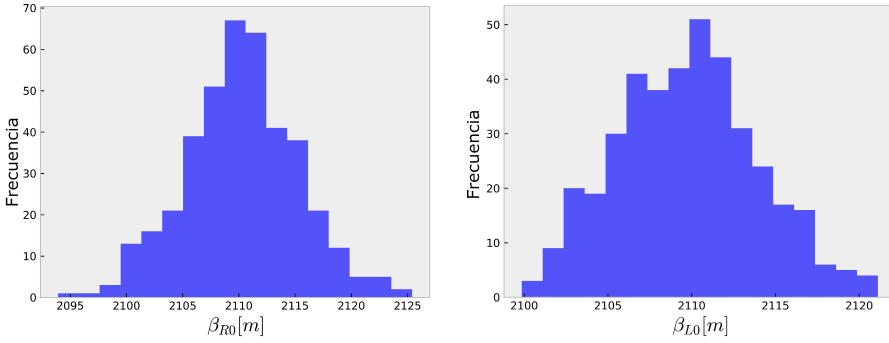


FIGURA 6. Distribuciones de  $\beta_{R0}$  y  $\beta_{L0}$  para simulaciones con error en la medición del tono de  $2.5 \times 10^{-5}$

varias repeticiones de toma de datos de  $\Delta Q$  vs.  $\Delta k$ , manteniendo la misma óptica del acelerador. A diferencia de lo esperado y lo visto en la simulaciones anteriores, se encontraron diferencias mucho mayores a 2 cm en el valor de  $w$ . Las diferencias a veces podían ser más grandes que 10 cm, lo que indicaba que la incertidumbre en el tono era mucho más grande que la que se había asumido previamente ( $2.5 \times 10^{-5}$ ). El objetivo de esta sección del artículo es determinar la incertidumbre de tono que se puede inferir de los datos experimentales. Para ello puede simplemente usarse la ecuación para la desviación estandar

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Q_i - \hat{Q}_i)^2} \tag{9}$$

donde  $Q_i$  corresponde al dato de algún punto experimental del tono y  $\hat{Q}_i$  el respectivo valor dado por la regresión lineal de los datos. Esta fórmula puede ser probada con las simulaciones hechas en la sección previa. Al aplicarla a dichos datos, el sigma obtenido es el mismo que se usó para generar los datos de la simulación. Esta fórmula, sin embargo, no puede aplicarse directamente a los datos experimentales. Datos reales del LHC para el 2022 muestran un ruido adicional al realizar la modulación de los cuadrupolos que dan lugar a valores bastante alejados de la tendencia. El equipo del OMC implementó el método *outliers* con el objetivo de eliminar aquellos datos con desviaciones mayores a las de un error dado como argumento. La figura 7 muestra el efecto de aplicar dicho método *outliers* a unos datos del 2022. Después de haber aplicado este filtro, fue posible usar la ecuación 9 a los datos restantes y las incertidumbres en los tonos horizontales y verticales resultaron ser significativamente superiores al valor esperado de  $2.5 \times 10^{-5}$ , tal como se puede ver en la tabla 1.

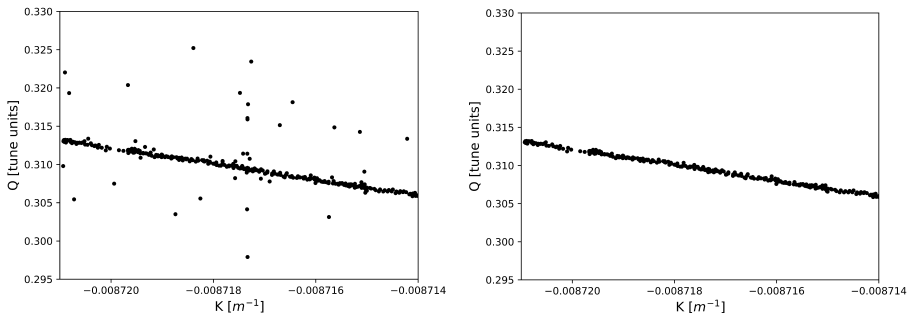


FIGURA 7. Datos de modulación del cuadrupolo  $QL1$  para el plano vertical de los datos de junio antes de aplicar el método *outliers* (izquierda) y posterior a la aplicación de este (derecha)

	$\sigma_{Q_x}$	$\sigma_{Q_y}$
Datos mayo 2022	$9.03 \times 10^{-5}$	$7.81 \times 10^{-5}$
Datos junio 2022	$1.57 \times 10^{-4}$	$1.6 \times 10^{-4}$

TABLA 1. Desviaciones obtenidas para la incertidumbre del tono a partir de datos experimentales obtenidos por modulación del tono

Las simulaciones de la sección anterior se repiten entonces con los nuevos valores de incertidumbre en el tono, dando lugar a las distribuciones en  $\beta_w$ ,  $w$ ,  $\beta_{R0}$ ,  $\beta_{L0}$  mostradas en las figuras 8 y 9. Los correspondientes valores de sigma que se pueden extraer de esas distribuciones se muestran en la tabla 2. Se analizan entonces los datos usados para la corrección en mayo del 2022 [9] y, en efecto, las desviaciones en todos los parametros relevantes no son tan grandes como en el caso anterior. Sin embargo, las incertidumbres en el tono son al menos 3 veces mayores a  $2.5 \times 10^{-5}$  lo que da lugar a incertidumbres en el  $w$  3 veces mayor que la esperada (6 cm) y la incertidumbre porcentual para  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$  pasa a ser de alrededor del 0.7 %. Incertidumbres en  $w$  tan grandes como 6 cm no solo no permitirían hallar las correcciones en los cuadrupolos Q4 a Q6 como se mencionó antes, sino que además podrían afectar las estimaciones de correcciones en los cuadrupolos Q1 a Q3. Es muy probable que esto sea lo que ocurrió en mayo del 2022, donde las correcciones fueron calculadas para IR1 (ATLAS) y IR5 (CMS) y se observó que el cálculo con APJ presentó muy buenos resultados para la IR1 pero no tanto para IR5 [9]. Si se asume que la medición utilizada para el  $w$  tenía una incertidumbre de 2 sigma (12 cm), esto seria suficiente para desviar de forma significativa los valores calculados con APJ para la corrección en IR5.

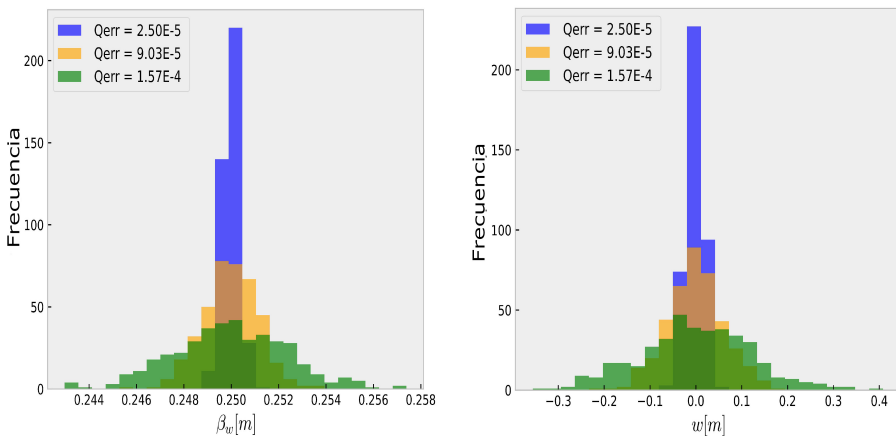


FIGURA 8. Distribuciones de  $\beta_w$  y  $w$  para el plano horizontal con errores en el tono dados por la tabla 1

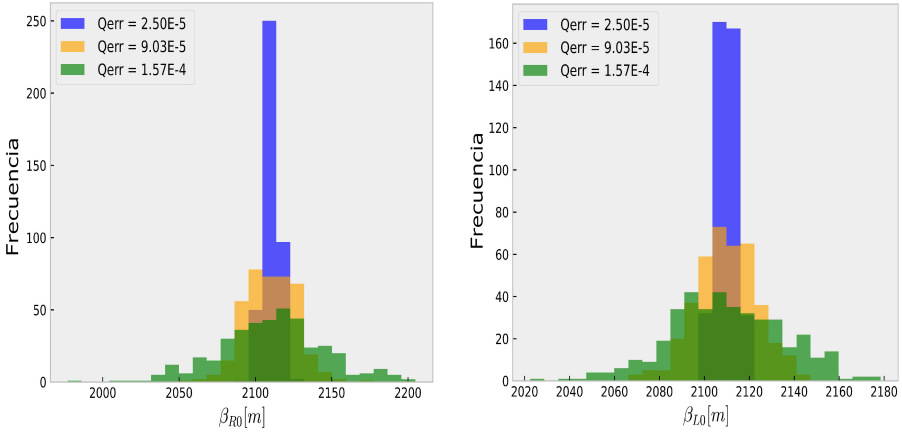


FIGURA 9. Distribuciones de  $\beta_{R0}$  y  $\beta_{L0}$  para el plano horizontal con errores en el tono dados por la tabla 1

$\sigma_{Qx}$	$\sigma_{\beta_w} [m]$	$\sigma_w [cm]$	$\sigma_{\beta_{R0}}$	$\sigma_{\beta_{L0}}$
$2.50 \times 10^{-5}$	$3.49 \times 10^{-4}$	1.92	0.24 %	0.20 %
$9.03 \times 10^{-5}$	$1.17 \times 10^{-3}$	6.30	0.78 %	0.65 %
$1.57 \times 10^{-4}$	$2.42 \times 10^{-3}$	12.18	1.64 %	1.20 %

TABLA 2. Desviaciones obtenidas para  $\beta_w$ ,  $w$ ,  $\beta_{R0}$  y  $\beta_{L0}$  con errores en la medición del tono

Se destaca también que el incremento en las incertidumbres de  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$  afectaría las calibraciones de los monitores de posición del haz que se encuentran a los extremos del espacio libre del IR (BPMSW). Si  $\sigma_w = 1$  cm se espera que  $\sigma_{\beta_{R0,L0}} \simeq 0.1$  %, lo que conduce a una descalibración del orden del 0.3 % en los BPMSW [6]. Con los datos de mayo 2022,  $\sigma_w \simeq 6$  cm correspondiendo a  $\sigma_{\beta_{R0,L0}} \simeq 0.7$  %, incrementando la descalibración de los BPMSW hasta un 0.8 % .

Dada la dependencia de  $\beta_w$  y  $w$  y de sus altas incertidumbres en la determinación de  $\beta_{R0}$  y  $\beta_{L0}$ , en la siguiente sección se propone un método para determinar estas cantidades sin necesidad de usar los parámetros  $\beta_w$  y  $w$ .

### Cálculo directo de $\beta_{L0}$ y $\beta_{R0}$

La matriz de propagación para un espacio libre permite relacionar las funciones de red con subíndice  $R0$  y  $L0$ ,

$$\begin{pmatrix} \beta_{R0} \\ \alpha_{R0} \\ \gamma_{R0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4L^* & 4(L^*)^2 \\ 0 & 1 & -2L^* \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{L0} \\ \alpha_{L0} \\ \gamma_{L0} \end{pmatrix} \quad (10)$$

donde  $\gamma_{R0} = \gamma_{L0} = \gamma$ . A partir de la ecuación 10 se busca obtener las funciones  $\alpha$  y  $\gamma$  en términos de  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$ . Por la definición de la función  $\gamma$  entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$\gamma = \frac{1 + \alpha_{R0}^2}{\beta_{R0}} = \frac{1 + \alpha_{L0}^2}{\beta_{L0}} \quad (11)$$

Utilizando las expresiones para  $\beta_{R0}$ ,  $\alpha_{L0}$  de la ecuación 10 y  $\gamma$  se llega a la siguiente ecuación cuadrática para  $\alpha_{R0}$ :

$$-4(L^*)^2 \alpha_{R0}^2 - 4L^* \beta_{R0} \alpha_{R0} - \beta_{R0}^2 + \beta_{R0} \beta_{L0} - 4(L^*)^2 = 0 \quad (12)$$

A partir de la ecuación 12 y la expresión para  $\alpha_{L0}$  de la ecuación 10 se obtienen las ecuaciones 13,14,15. En estas últimas, las expresiones tienen solución positiva y negativa, pero para  $\gamma$  se toma la solución positiva y esto define el signo de las demás.

$$\alpha_{R0} = \frac{-\beta_{R0} + \sqrt{\beta_{R0} \beta_{L0} - 4(L^*)^2}}{2L^*} \quad (13)$$

$$\alpha_{L0} = \frac{\beta_{L0} - \sqrt{\beta_{R0} \beta_{L0} - 4(L^*)^2}}{2L^*} \quad (14)$$

$$\gamma = \frac{\beta_{R0} + \beta_{L0} + 2\sqrt{\beta_{R0} \beta_{L0} - 4(L^*)^2}}{4(L^*)^2} \quad (15)$$

Para relacionar estas funciones con la medición de la función beta promedio en los cuadrupolos se realiza el mismo procedimiento de la segunda sección, utilizando la ecuación 4 y promediando  $\beta(s)$  a lo largo de ambos cuadrupolos para obtener las ecuaciones:

$$\bar{\beta}_R = r_0 \beta_{R0} + r_1 \alpha_{R0} + r_2 \gamma \quad (16)$$

$$\bar{\beta}_L = l_0 \beta_{L0} + l_1 \alpha_{L0} + l_2 \gamma \quad (17)$$

donde para las constantes del cuadrupolo ubicado a la derecha de la IP se define:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{S(2L)}{2L} \right) \\ r_1 &= -\frac{S^2(L)}{L} \\ r_2 &= \pm \frac{1}{2K} \left( 1 - \frac{S(2L)}{2L} \right) \end{aligned}$$

y para las constantes del cuadrupolo a la izquierda de la IP:

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{S(2L)}{2L} \right) \\ l_1 &= \frac{S^2(L)}{L} \\ l_2 &= \pm \frac{1}{2K} \left( 1 - \frac{S(2L)}{2L} \right) \end{aligned}$$

utilizando las definiciones de  $S(s)$  y  $C(s)$  dadas en la segunda sección de este trabajo.

Para  $r_2$  y  $l_2$  se toman las soluciones positivas cuando su respectivo cuadrupolo es enfocante, y las negativas en el caso contrario. Con estas relaciones y las ecuaciones 13, 14, 15, 16 y 17, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones para  $\beta_{R0}$  y  $\beta_{L0}$  que se puede resolver numéricamente,

$$A_1\beta_{R0}^2 + B_1\beta_{L0}^2 + C_1\beta_{R0}\beta_{L0} + D_1\beta_{R0} + E_1\beta_{L0} + F_1 = 0 \quad (18)$$

$$A_2\beta_{R0}^2 + B_2\beta_{L0}^2 + C_2\beta_{R0}\beta_{L0} + D_2\beta_{R0} + E_2\beta_{L0} + F_2 = 0 \quad (19)$$

donde se definió:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left( r_0 - \frac{r_1}{2L^*} + \frac{r_2}{4(L^*)^2} \right)^2 \\ B_1 &= \left( \frac{r_2}{4(L^*)^2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= 2 \left( r_0 - \frac{r_1}{2L^*} + \frac{r_2}{4(L^*)^2} \right) \left( \frac{r_2}{4(L^*)^2} \right) - \left( \frac{r_1}{2L^*} - \frac{r_2}{2(L^*)^2} \right)^2 \\
D_1 &= -2 \left( r_0 - \frac{r_1}{2L^*} + \frac{r_2}{4(L^*)^2} \right) \bar{\beta}_R \\
E_1 &= -2 \left( \frac{r_2}{4(L^*)^2} \right) \bar{\beta}_R \\
F_1 &= \bar{\beta}_R^2 + 4(L^*)^2 \left( \frac{r_1}{2L^*} - \frac{r_2}{2(L^*)^2} \right)^2 \\
A_2 &= \left( \frac{l_2}{4(L^*)^2} \right)^2 \\
B_2 &= \left( l_0 + \frac{l_1}{2L^*} + \frac{l_2}{4(L^*)^2} \right)^2 \\
C_2 &= 2 \left( l_0 + \frac{l_1}{2L^*} + \frac{l_2}{4(L^*)^2} \right) \left( \frac{l_2}{4(L^*)^2} \right) - \left( \frac{l_1}{2L^*} + \frac{l_2}{2(L^*)^2} \right)^2 \\
D_2 &= -2 \left( \frac{l_2}{4(L^*)^2} \right) \bar{\beta}_L \\
E_2 &= -2 \left( l_0 + \frac{l_1}{2L^*} + \frac{l_2}{4(L^*)^2} \right) \bar{\beta}_L \\
F_2 &= \bar{\beta}_L^2 + 4(L^*)^2 \left( \frac{l_1}{2L^*} + \frac{l_2}{2(L^*)^2} \right)^2
\end{aligned}$$

Para comparar este método con el actual, se generaron nuevas distribuciones para calcular los valores de  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$  con el método de la segunda sección y el presentado en esta parte del artículo. La figura 10 muestra las distribuciones obtenidas para  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$  usando ambos métodos, con datos generados con un error en el tono de  $2.5 \times 10^{-5}$  donde se ve que son completamente equivalentes.

Considerando un error en el tono como el obtenido para los datos de mayo ( $9.03 \times 10^{-5}$ ), se volvieron a comparar los métodos. Los resultados se encuentran en la figura 11, donde nuevamente ambos métodos fueron equivalentes. La diferencia absoluta promedio entre los valores encontrados con el método de la sección anterior y el



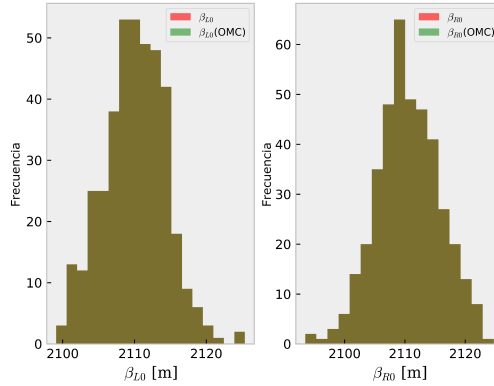


FIGURA 10. Distribuciones de  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$  asociadas a errores gaussianos en la medición del tono con error  $\Delta Q_{err} = 2.5 \times 10^{-5}$  comparando ambos métodos

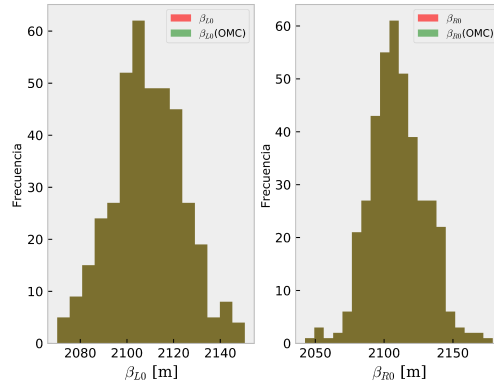


FIGURA 11. Distribuciones de  $\beta_{L0}$  y  $\beta_{R0}$  asociadas a errores gaussianos en la medición del tono con error  $\Delta Q_{err} = 9.03 \times 10^{-5}$  comparando ambos métodos

OMC es del orden de  $10^{-9}$ , por lo cual se puede interpretar como ruido numérico al solucionar las ecuaciones.

## Conclusiones

Las funciones ópticas en la IR son áltamente dependientes de los parámetros  $\beta_w$  y  $w$  y, por ende, de sus incertidumbres. Los diferentes análisis de este artículo muestran que las incertidumbres asociadas a la medición de los tonos del acelerador, las cantidades que se usan para determinar  $\beta_w$  y  $w$ , son significativamente más altas que las esperadas originalmente con los respectivos efectos

adversos para la determinación de las funciones ópticas. Se hace necesario entonces encontrar un camino alternativo para determinar las funciones ópticas sin tener que acudir a los parámetros  $\beta_w$  y  $w$ , lo cual se muestra en este artículo a través de cálculos analíticos que son verificados posteriormente a través de simulaciones.

## Referencias

- [1] F. Carlier and R. Tomás, *Phys. Rev. Accel. Beams* **20**, 011005 (2017).
- [2] J. F. Cardona and S. G. Peggs, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **12**, 014002 (2009).
- [3] J. F. Cardona, A. C. G. Bonilla, and R. T. García, *Phys. Rev. Accel. Beams* **20**, 111004 (2017).
- [4] J. F. Cardona, Y. Rodríguez, and R. Tomás, arXiv preprint arXiv:2002.05836 (2020).
- [5] A. Langner, J. M. Coello de Portugal, P. Skowroński, and R. Tomás, *Developments of the Segment-by-Segment Technique for Optics Corrections in the LHC*, Tech. Rep. (2015).
- [6] J. F. Cardona, arXiv preprint arXiv:2103.03964 (2021).
- [7] L. Deniau, H. Grote, G. Roy, and F. Schmidt, *User's Reference Manual* (2017).
- [8] R. Tomás, J. Cardona, F. Carlier, and et al., in *Proceedings, 10th International Particle Accelerator Conference (IPAC 2019): Melbourne, Australia* (2019).
- [9] J. F. Cardona, H. Garcia, M. Hofer, and et al., *JACoW IPAC 2022*, 1850 (2022).