ALGEBRA DE CLIFFORD

Ma. Carolina Spinel G. (*)
Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá

1. Introducción

El álgebra de Clifford (o álgebra geométrica) como lenguaje unificado para matemáticos y físicos ha adquirido auge en los últimos años y David Hestenes ha sido uno de sus grandes impulsores con trabajos de datan desde los años 60 [1], [2],[3].

Esta álgebra reúne y unifica conceptos geométricos de diferentes álgebras que han sido desarrolladas de manera independiente para expresar o describir determinadas relaciones geométricas con aplicaciones bien definidas en física, como el sistema de numeros complejos, el álgebra de matrices, los cuaterniones, las álgebras de vectores, tensores, espinores y formas diferenciales.

Una vez que uno se familiariza con la notación, la estructura geométrica y las relaciones básicas que definen esta álgebra, tiene a su disposición un formalismo matemático sencillo y de gran operatividad con un amplio rango de aplicaciones en física, desde la mecánica clásica hasta la física de partículas [4],[5],[6].

Nuestro objetivo es divulgar el álgebra de Clifford mediante un resumen de sus axiomas y relaciones fundamentales que permitan al lector comprender su estructura. Con esta base, en posteriores artículos de divulgación, presentaremos algunas aplicaciones que muestren la ventaja de su empleo en la descripción de sistema físicos.

Dado el amplio conocimiento que se tiene de los espacios vectoriales, la estructura y propiedades del álgebra de Clifford suele presentarse con base en los elementos de un espacio vectorial. En esta dirección, en la sección 2 se define la notación y se describe la estructura de un álgebra de Clifford $\mathbf{G}_n$, introduciendo con detalle las operaciones básicas entre los elementos del álgebra. La sección 3 se dedica a describir una base tensorial de $\mathbf{G}_n$.

2. Axiomas y relaciones básicas

Los elementos de un álgebra de Clifford $\mathbf{G}_n$ son denominados **multivectores** y suelen notarse con las letras mayúsculas A,B,C,... . Los multivectores de $\mathbf{G}_n$ puede ser generados mediante el **producto geométrico** de los elementos de un espacio vectorial $V_n(\mathbf{R})$. Los elementos de V_n se denominan vectores y se notan con letras minúsculas a,b,c,...

Se definen la adición conmutativa y el producto geométrico de multivectores con las siguientes propiedades: tanto la adición como el producto geométrico son asociativos; existen únicas identidades aditiva y multiplicativa (0 y 1 respectivamente); el producto geométrico es distributivo a derecha e izquierda respecto a la adición; los escalares conmutan con los multivectores. Estas propiedades junto con axiomas básicos que mencionaremos adelante, definen un álgebra de Clifford.

Producto geométrico, interior y exterior

El producto geométrico ab de dos vectores a y b se puede expresar mediante la siguiente igualdad:

$$ab = 1/2(ab + ba) + 1/2(ab - ba).$$

El primer término de la derecha define un producto conmutativo denominado **producto interior**:

$$a \bullet b = 1/2(ab + ba) = b \bullet a, \tag{1}$$

mientras que el segundo término define un producto anticonmutativo denominado **producto exterior**:

$$a \wedge b = 1/2(ab - ba) = - b \wedge a \tag{2}$$

El producto geométrico, que en general no es conmutativo ni anticonmutativo, queda definido como la suma de los dos anteriores productos:

$$ab = a \bullet b + a \wedge b \tag{3}$$

Uno de los axiomas básicos afirma:

$$ab = \text{escalar}\ ,\ \text{si y solo si a y b son colineales} \tag{4}$$

El cuadrado de la norma de un vector se define como el producto geométrico del vector por sí mismo: $aa = |a|^2$.

El producto geométrico del vector (a+b) por sí mismo es igual a:

$$(a+b)(a+b) = aa + bb + [ab + ba],$$

de acuerdo con (1), el término entre paréntesis cuadrado es igual al doble del producto interior de a y b, y según (4) los demás términos de esta ecuación son escalares. Concluímos entonces que el producto interior de dos vectores es igual a un escalar:

$$a \cdot b = \text{escalar}. \tag{5}$$

El producto exterior de dos vectores no colineales (linealmente independientes, L.I.) es denominado 2-vector o bivector. Cuando los dos vectores son colineales (linealmente dependientes) su producto exterior es nulo:

$$a \wedge b = 0, \qquad \text{si } a \text{ y } b \text{ son colineales.} \tag{6}$$

Esta afirmación se concluye de las ecuaciones (3),(4) y (5). Dos vectores se denominan ortogonales cuando su producto interior es nulo:

$$a \cdot b = 0, \qquad \text{si } a \text{ y } b \text{ son ortogonales.} \tag{7}$$

Entonces:

$$ab = a \cdot b = b \cdot a = ba \qquad \text{si } a \text{ y } b \text{ son colineales.}$$

$$ab = a \wedge b = -b \wedge a = -ba \qquad \text{si } a \text{ y } b \text{ son ortogonales.}$$

En estos dos casos particulares el producto geométrico es conmutativo y anticonmutativo respectivamente.

El producto exterior de vectores es asociativo:

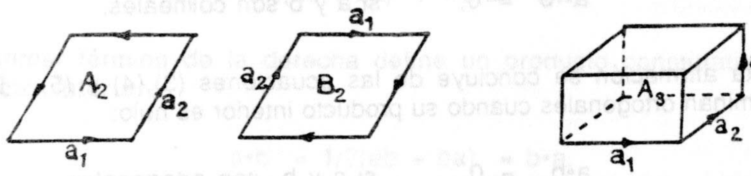
$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b \wedge c$$

y es una consecuencia de la asociatividad del producto geométrico.

Se denomina **multivector simple** o **r-vector** al producto exterior de r vectores L.I.(no colineales), con $r \geq n$ y se nota $A_r = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_r$. El **grado** de un r-vector es igual a r, esto es, igual al número de vectores L.I. que lo constituyen.

Interpretación geométrica del producto exterior:

Cualquier r-vector de G_n: $A_r = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_r$ representa un volúmen r-dimensional orientado de V_n. Esta interpretación puede entenderse como una extensión del concepto de **número dirigido**: así como un vector caracteriza la noción de segmento de línea dirigido, el bivector $A_2 = a_1 \wedge a_2$, por ejemplo, se puede considerar como una nueva clase de número dirigido que caracteriza la noción de segmento de área dirigido, su magnitud es igual al área del paralelogramo formado por los dos vectores, y su orientación (que podría entenderse como la dirección en que fue generado el segmento de área: desplazando a_1 en la direccion de a_2) se representa por flechas que asignan un sentido al segmento de área. El bivector $B_2 = a_2 \wedge a_1$ representa el mismo segmento de área pero con orientación contraria como se indica en la figura.



De igual manera el 3-vector $A_3 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$, representa un volúmen orientado de V_n y caracteriza la noción de segmento de volúmen dirigido. Su magnitud es igual al volumen del paralelepípedo formado por estos tres vectores y su orientación se representa por flechas que asignan un sentido a dicho segmento de volumen de V_n.

El 3-vector $B_3 = a_3 \wedge a_2 \wedge a_1$ representa el mismo volumen de V_n pero con orientación contraria.

Los términos escalar, vector, bivector, trivector, etc. se utilizan para designar un 0-vector, 1-vector, 2-vector, 3-vector, etc.

r-vectores que representen un mismo volúmen r-dimensional de V_n con diferentes orientaciones son linealmente dependientes. Por ejemplo, los trivectores A_3 y B_3 son linealmente dependientes ya que por medio de permutaciones de sus vectores, se puede expresar el primero en términos del segundo: $A_3 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 = -a_2 \wedge a_1 \wedge a_3 = a_3 \wedge a_2 \wedge a_1 = B_3$. Mientras que los trivectores $A_3 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$ y $C_3 = a_2 \wedge a_3 \wedge a_4$ son L.I.

El producto exterior se constituye en un medio sencillo para estudiar la dependencia lineal de un conjunto de vectores de V_n, ya que el resultado del producto será nulo si uno de los vectores que entra en el producto es linealmente dependiente de cualquier otro.

El máximo grado que puede tener un r-vector generado por vectores de V_n es n, que es precisamente el máximo número de vectores L.I. de V_n. Los términos seudoescalar y seudovector se emplean para designar los n-vectores y (n-1)-vectores de G_n, respectivamente.

Como consecuencia de la anticonmutatividad del producto exterior de dos vectores:

$a\wedge b = -b\wedge a$, el producto exterior de un vector y un r-vector será conmutativo si r es par y anticonmutativo si r es impar:

$$a\wedge A_r = a\wedge a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_r = (-1)^r a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_r\wedge a = (-1)^r A_r\wedge a \qquad (8)$$

De manera similar al producto geométrico de dos vectores, ecuación (1), el producto geométrico de un vector y un r-vector se puede expresar según:

$$aA_r = 1/2[\, aA_r - (-1)^r A_r a] + 1/2[\, aA_r + (-1)^r A_r a]\,, \qquad (9)$$

el segundo término de la derecha es conmutativo para r par y anticonmutativo para r impar, y de acuerdo con (8) define el producto exterior:

$$a\wedge A_r = 1/2[\, aA_r + (-1)^r A_r a]\,, \qquad (10)$$

mientras que el primer término, que es conmutativo para r impar y anticonmutativo para r par, define el producto interior:

$$a\bullet A_r = 1/2[\, aA_r - (-1)^r A_r a]\,. \qquad (11)$$

Reemplazando (10) y (11) en (9) obtenemos para el producto geométrico:

$$aA_r = a\bullet A_r + a\wedge A_r \qquad (12)$$

Un axioma fundamental del álgebra de Clifford afirma que cualquier multivector de G_n, se puede descomponer en una suma de r-vectores de diferente grado:

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + \ldots + M_n$$

Es así como el multivector resultante del producto geométrico de dos vectores es igual a la suma de un escalar M_0 y un bivector M_2 (ver ecuación (2)). Puesto que r-vectores de diferente grado son L.I. , si un multivector es no nulo entonces al menos una de sus componentes r-vectoriales es diferente de cero; y si el multivector es nulo, cada una de sus componentes r-vectoriales será igual a cero. El grado de un multivector es igual al grado del máximo r-vector que contenga.

Podemos encontrar una expresión muy útil para el producto interior de un vector por un r-vector. Consideremos primero el producto geométrico de tres vectores L.I. :

$$a a_1 a_2 = (a a_1) a_2 = [-a_1 a + 2(a \cdot a_1)] a_2 = -a_1 a a_2 + 2(a \cdot a_1) a_2$$

$$= -a_1[-a_2 a + 2(a \cdot a_2)] + 2(a \cdot a_1) a_2$$

donde hemos empleado la ecuación (1). Reordenando los términos obtenemos:

$$a_1(a \cdot a_2) + (a \cdot a_1) a_2 = 1/2\,[a a_1 a_2 - a_1 a_2 a]$$

$$= 1/2\,[a(a_1 \wedge a_2) - (a_1 \wedge a_2) a]$$

para la última igualdad se expresó el producto a_1a_2 según (3) y se tuvo en cuenta que los escalares y vectores conmutan. Finalmente, ya que el término entre paréntesis cuadrado es el producto interior del vector a y el bivector $a_1 \wedge a_2$, obtenemos:

$$a \cdot (a_1 \wedge a_2) = a_1(a \cdot a_2) + (a \cdot a_1) a_2 \qquad (13)$$

Por medio de un proceso similar se puede demostrar (ver [4], ecuación (1.15)), que el producto interior de un vector y un r-vector es:

$$a \cdot A_r = a \cdot (a_1 \wedge \ldots \wedge a_r) = (a \cdot a_1)(a_2 \wedge \ldots \wedge a_r) + a_1 \wedge [a \cdot (a_2 \wedge \ldots \wedge a_r)]$$

Aplicando iterativamente esta ecuación para el paréntesis cuadrado, encontramos:

$$a \cdot A_r = \sum_k (-1)^{k+1} (a \cdot a_k)(a_1 \wedge \ldots \wedge \hat{a}_k \ldots \wedge a_r) \qquad (14)$$

donde el símbolo ^ sobre el vector a_k indica que este vector se excluye del producto, de manera que $a \cdot A_r$ es una suma de (r-1)-vectores y por tanto es un (r-1)-vector. Un caso particular es el producto de dos vectores cuyo resultado es un 0-vector, esto es un escalar.

El producto exterior de un vector por un r-vector es igual a un s-vector de grado s=r+1 (ver ecuación (8), mientras que su producto interior es un s-vector de grado s=r-1 (ver (14)). Esto es, el producto exterior eleva el grado del s-vector resultante mientras que el producto interior baja el grado del s-vector resultante.

Consideremos ahora el producto geométrico de un bivector B_2 y un r-vector A_r, cuyo resultado es un multivector M. Empleando la ecuación (3):

$$M = B_2 A_r = (b_1 \wedge b_2) A_r = b_1 b_2 A_r - (b_1 \cdot b_2) A_r$$

Desarrollando el producto geométrico $b_1 b_2 A_r$, de acuerdo con (12), tendremos:

$$b_1 b_2 A_r = b_1 (b_2 \cdot A_r) + b_1 (b_2 \wedge A_r)$$

$$= b_1 \cdot (b_2 \cdot A_r) + b_1 \wedge (b_2 \cdot A_r) + b_1 \cdot (b_2 \wedge A_r) + b_1 \wedge b_2 \wedge A_r$$

Reordenando términos:

$$B_2 A_r = b_1 \cdot (b_2 \cdot A_r) + \left\{ (b_1 \cdot b_2) A_r + b_1 \wedge (b_2 \cdot A_r) + b_1 \cdot (b_2 \wedge A_r) \right\} + b_1 \wedge b_2 \wedge A_r$$

El primer término de la derecha es un (r-2)-vector, el término entre paréntesis cuadrado es un r-vector y el último término es un (r+2)-vector.

Se define el producto exterior de B_2 y A_r como la componente (r+2)-vectorial del multivector resultante de su producto geométrico:

$$B_2 \wedge A_r = (b_1 \wedge b_2) \wedge A_r = b_1 \wedge b_2 \wedge A_r \qquad (15)$$

y el producto interior de B_2 y A_r como la componente (r-2)-vectorial:

$$B_2 \cdot A_r = (b_1 \wedge b_2) \cdot A_r = b_1 \cdot (b_2 \cdot A_r) \qquad (16)$$

En el caso general de un s-vector y un r-vector, su producto exterior es la componente (s+r)-vectorial de su producto geométrico y el producto interior es la componente |s-r|-vectorial.

De acuerdo con las anteriores definiciones, el producto interior de r-vectores de igual grado es un escalar igual al determinante de los productos interiores de los vectores que conforman cada r-vector.

Según (16):

$$B_2 \cdot A_2 = (b_1 \wedge b_2) \cdot (a_1 \wedge a_2) = b_1 \cdot (b_2 \cdot (a_1 \wedge a_2))$$

teniendo en cuenta (13):

$$B_2 \cdot A_2 = (b_2 \cdot a_1)\,(b_1 \cdot a_2) \quad - \quad (b_2 \cdot a_2)\,(b_1 \cdot a_1)$$

que es precisamente el determinante:

$$B_2 \cdot A_2 = \begin{vmatrix} (b_2 \cdot a_1) & (b_2 \cdot a_2) \\ & \\ (b_1 \cdot a_1) & (b_1 \cdot a_2) \end{vmatrix} \tag{17a}$$

Cuya generalización es:

$$B_r \cdot A_r = \begin{vmatrix} (b_r \cdot a_1) & . \; . \; . & (b_r \cdot a_r) \\ \vdots & & \vdots \\ (b_1 \cdot a_1) & . \; . \; . & (b_1 \cdot a_r) \end{vmatrix} \tag{17b}$$

3. Sistema y base tensorial de G_n

Cualquier conjunto de n vectores L.I. de V_n $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ constituye un sistema o marco de referencia de V_n.

Por simplicidad considermos el caso de un sistema ortonormal de vectores:

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_4\} \tag{18}$$

de un espacio vectorial $V_4(\mathbf{R})$. La generalización para espacios de mayor dimensión es directa.

Como los vectores del sistema son ortogonales: para $i \neq j$, $e_i \cdot e_j = 0$, $e_i e_j = e_i \wedge e_j$ y para $i=j$, $e_i \wedge e_j = 0$, $e_i e_j = e_i \cdot e_j$ $(i,j = 1,2,3,4)$.

Con base en este sistema tendremos: a) 6 bivectores unitarios L.I. , por ejemplo: $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_1 \wedge e_4$, $e_2 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_4$, $e_3 \wedge e_4$, que notaremos de manera general como $e_i e_j$ o e_{ij} ; este conjunto de bivectores define un espacio lineal 6-dimensional: $G_4{}^2$, b) 4 trivectores unitarios L.I. : $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, $e_1 \wedge e_2 \wedge e_4$, $e_1 \wedge e_3 \wedge e_4$, $e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, notados $e_i e_j e_k$ o e_{ijk} los cuales definen un espacio lineal 4-dimensional: $G_4{}^3$, c) 1 cuadrivector unitario o seudoescalar unitario que notaremos e: $e = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = e_1 e_2 e_3 e_4$, el cual define un espacio lineal 1-dimensional: $G_4{}^4$. Los vectores del sistema o 1-vectores de G_4 definen el espacio lineal $V_4 = G_4{}^1$ y el escalar o 0-vector unitario 1 define el espacio lineal $G_4{}^o = R$. Como los r-vectores de diferente grado son L.I. G_4 es en sí mismo un espacio lineal, cuya dimensión es la suma de las dimensiones de los subespacios de G_4 : $\dim G_4 = \sum_r \dim G_4{}^r = 16 = 2^4$. En general, cuando el sistema es n-dimensional, $\dim G_n = 2^n$.

El conjunto de todos los r-vectores unitarios L.I. generados con los vectores del sistema (18) constituyen una **base** del espacio lineal G_4:

$$\left\{1,\ e_i,\ e_i e_j,\ e_i e_j e_k\ ,\ e\right\}, \qquad (19)$$

denominada tambien **base tensorial** de G_4.

De manera que, así como cualquier vector a de G_4 se puede expresar como una combinación lineal de los vectores unitarios:

$$a = \sum_i a^i e_i, \qquad (20)$$

cualquier bivector M_2 de G_4 se puede expresar como una combinación lineal de los bivectores unitarios de la base de G_4:

$$M_2 = \sum_{i>j} M^{ij} e_i e_j = \sum_{i>j} M^{ij} e_{ij}\ , \qquad (21)$$

y cualquier trivector M_3 como una combinación lineal de los trivectores unitarios:

$$M_3 = \sum_{i>j>k} M^{ijk} e_i e_j e_k = \sum_{i>j>k} M^{ijk} e_{ijk} \qquad (22)$$

Se puede verificar fácilmente que los coeficientes a^i de la ecuación (20) son iguales al producto interior del vector a y el vector unitario e_i, que es la proyección del vector a sobre el vector e_i. De manera similar, los coeficientes $M^{ij} = M_2 \cdot (e_i e_j)$ son la proyección del bivector M_2 sobre el bivector $e_i e_j$ y $M^{ijk} = M_2 \cdot (e_i e_j e_k)$ es la proyección del trivector M_2 sobre el trivector unitario $e_i e_j e_k$.

Por tanto la **interpretación geométrica del producto interior** es la de caracterizar la noción geométrica de proyección de un elemento de G_n sobre otros elementos de G_n.

De otra parte, todo seudoescalar o cuadrivector de G_4 se puede expresar como el producto de un escalar por el cuadrivector unitario e. De acuerdo a las anteriores consideraciones, cualquier multivector M de G_4 se puede expresar como una combinación lineal de los r-vectores unitarios de la base (10):

$$M = \mu + \sum_i a^i e_i + \sum_{i<j} M^{ij} e_i e_j + \sum_{i<j<k} M^{ijk} e_i e_j e_k + \beta e$$

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \qquad (23)$$

donde μ y β son escalares.

La ecuación (23) es la representación tensorial de los multivectores de G_4.

A manera de conclusión podemos señalar : 1. Tanto los elementos del álgebra como sus operaciones tienen un significado geométrico explícito. 2. Su generalidad: incluye entre otras, la teoría de determinantes y la teoría de tensores, las cuales surgen de manera natural.

REFERENCIAS

[1]. Hestenes D. Clifford Algebra to Geometric Calculus. (1984), Reidel Publishing Co.
[2]. Hestenes D. Space-Time Algebra. (1966) Gordon and Beach, N.Y.
[3]. Hestenes D. Geometría de la teoría de Dirac. Referencia [6[.
[4]. Hestenes D. New Foundations for Classical Mechanicas, (1986), Reidel Publishing Co.
[5]. Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics. (1986) Serie NATO ASI.. Reidel Publishing Co.
[6]. Mathematics of the Physical Space - Time, Symposium sponsored by Univ. Autónoma de Mexico. (1981).

(*) Profesora del departamento de Física de la Universidad Nacional.