ALGEBRA DE CLIFFORD DEL ESPACIO TIEMPO

Ma. Carolina Spinel G. (*)
Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá

1. Introducción

En un artículo previo [1], presentamos la estructura y relaciones básicas del álgebra de Clifford G_n generada por el producto geométrico de los vectores de un espacio vectorial V_n sobre el cuerpo de los reales en la versión moderna de Hestenes [2].

Este artículo se dedica a los aspectos fundamentales del álgebra de Clifford del espacio-tiempo plano (A.E.T.) y muestra algunos hechos interesantes relacionados con la teoría de Dirac, que ponen de manifiesto la importancia y sencillez de la aplicación de álgebras de Clifford en el estudio de los fenómenos físicos.

Para ello se presenta primero la estructura del A.E.T., sección 2, y se muestra luego la equivalencia entre el A.E.T. y el álgebra de las matrices de Dirac sobre el campo de los números complejos, sección 3. El desdoblamiento del A.E.T. en sus componentes temporal y espaciales, sección 4, muestra de manera explícita el por qué en la teoría de Dirac la matriz γ_0 juega un papel preferencial, y el álgebra de Pauli es la subálgebra par del álgebra de Dirac.

Finalmente, en la sección 5 se muestra cómo empleando el A.E.T. las ecuaciones de Maxwell se expresan de manera muy sencilla mediante una única ecuación bivectorial cuyo desdoblamiento conduce a las cuatro ecuaciones clásicas conocidas.

2. Estructura del álgebra del Espacio Tiempo plano

El álgebra de Clifford del Espacio Tiempo plano (A.E.T.) se desarrolla con base en un sistema ortonormal de vectores del espacio-tiempo (E.T.). Sin embargo suele elegirse un sistema ortonormal de vectores del espacio tangente a un punto genérico del E.T. por las siguientes razones: a) Cuando el E.T. es geométricamente plano, con la definición de un punto del E.T. como vector nulo, es idéntico al espacio tangente a cada uno de sus puntos, de manera que el álgebra del E.T. es la misma del espacio tangente. b) Las ideas básicas y los resultados que se obtienen se pueden aplicar con ninguna o muy poca modificación al álgebra de Clifford del E.T. curvo.

Consideremos el sistema ortonormal de vectores

$$[\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\ ] \qquad (1)$$

del espacio tangente a un punto genérico $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ del E.T. sobre el campo de los reales (espacio de Minkowski). Como los vectores γ_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) son ortogonales, el producto geométrico de dos vectores se reduce a su producto interior si son de igual índice, y a su producto exterior si son de índice diferente:

$$\gamma_\mu\gamma_\sigma = \gamma_\mu \cdot \gamma_\sigma = \gamma_\sigma \cdot \gamma_\mu = \gamma_\sigma\gamma_\mu \qquad \text{si } \mu = \sigma$$

$$\gamma_\mu\gamma_\sigma = \gamma_\mu \wedge \gamma_\sigma = -\gamma_\sigma \wedge \gamma_\mu = -\gamma_\sigma\gamma_\mu \qquad \text{si } \mu \neq \sigma \tag{2}$$

Los elementos del tensor métrico, y por tanto la métrica del E.T., están descritos por el producto interior de los vectores del sistema:

$$g_{\mu\sigma} = \gamma_\mu \cdot \gamma_\sigma = 1/2(\gamma_\mu\gamma_\sigma + \gamma_\sigma\gamma_\mu) \tag{3}$$

$$(\gamma_0)^2 = 1, \quad (\gamma_1)^2 = (\gamma_2)^2 = (\gamma_3)^2 = -1 \tag{4}$$

donde $(\gamma_\mu)^2 = \gamma_\mu\gamma_\mu$. Cuando el cuadrado de un vector es positivo se denomina como de tiempo (o temporal) y si es negativo se denomina como de espacio (o espacial)

Como se mostró en [1], sección 4, la base tensorial del álgebra de Clifford generada por un sistema ortonormal de un espacio cuadridimensional, consta de 16 elementos: un escalar unitario, 4 vectores unitarios γ_μ, 6 bivectores unitarios $\gamma_\mu\gamma_\sigma = \gamma_{\mu\sigma}$ ($\mu<\sigma$), 4 trivectores unitarios $\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\delta = \gamma_{\mu\sigma\delta}$ ($\mu<\sigma<\delta$) y un seudoescalar o cuadrivector unitario $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_{0123}$.

Todo multivector del A.E.T. se puede expresar en términos de la base tensorial descrita. Sin embargo, si se desea transcribir en forma tensorial covariante hay que introducir el sistema dual o recíproco $[\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3]$ del sistema (1) a través de la relación de reciprocidad:

$$\gamma^\mu \cdot \gamma_\sigma = \delta^\mu_\sigma$$

Cada vector del sistema dual se puede expresar como una combinación lineal de los vectores γ_μ [4]:

$$\gamma^\sigma = \sum_\mu g^{\sigma\mu}\gamma_\mu \tag{5}$$

con $g^{\mu\sigma} = \gamma^\mu \cdot \gamma^\sigma$, de manera que cualquier vector X del E.T. se puede expresar en términos de los vectores γ_μ o de sus duales:

$$X = \sum_\mu X^\mu\gamma_\mu = \sum_\sigma X_\sigma\gamma^\sigma$$

con $X^{\mu} = \sum_{\sigma} g^{\mu\sigma} X\sigma$, $X\sigma = \sum_{\mu} g_{\mu\sigma} X^{\sigma}$

Se define el operador gradiente del E.T., como el vector:

$$\Box = \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \partial\mu \quad \text{con} \quad \partial\mu = \partial/\partial X^{\mu} \qquad (6a)$$

verificándose que:

$$\gamma^{\mu} = \Box X^{\mu} \quad \text{y} \quad \gamma\mu = \partial\mu X \qquad (6b)$$

Si M es un multivector del A.E.T. diferenciable:

$$M = \Box\cdot M + \Box\wedge M \qquad (7)$$

donde $\Box\cdot M$ y $\Box\wedge M$ se denominan la "divergencia" y el "rotacional" de M, siguiendo la notación usual del análisis vectorial.

Las relaciones (6) y (7) son completamente generales. Si el espacio tiempo es curvo, la definición del operador gradiente es válida localmente y una relación de conexión entre los sistemas para cada punto del E.T. debe ser definida (ver sección 20 en [3]).

<u>Análisis de los elementos de la base</u>:

El seudoescalar unitario se nota i': $i' = \gamma_{0123}$, y tiene las siguientes propiedades: a) $(i')^2 = -1$; b) Si a es un vector del E.T.: $ai' = -i'a$; c) i' es igual a su <u>reverso</u> $\tilde{i}'$: $i' = \gamma_{0123} = \gamma_{3210} = \tilde{i}'$ y d) i' representa un cuadrivolumen orientado del E.T. Las propiedades a), b) y c) se prueban directamente efectuando los productos geométricos indicados mediante permutación de pares de vectores, teniendo en cuenta la ecuación (1).

Ya que el producto geométrico de un trivector unitario por un vector unitario, cuyo índice sea diferente de los índices de los vectores en el trivector, da como resultado i' o -i', se concluye entonces que todo trivector del A.E.T., denominado también seudovector, se puede expresar como el producto geométrico de un vector del E.T. y el seudoescalar unitario: ai'. De otra parte, todo seudoescalar del A.E.T. es igual al producto de un escalar y el seudoescalar unitario. Con estas equivalencias, la base tensorial del A.E.T. se puede expresar mediante el siguiente conjunto:

$$[\ 1,\ \gamma\mu,\ \gamma\mu\gamma\sigma = \gamma\mu\sigma,\ i'\gamma\mu,\ i'\ ]$$

donde μ, σ = 0,1,2,3 y $\mu<\sigma$.

Empleando esta base, cualquier multivector del A.E.T. queda expresado:

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$

$$M = \alpha + a + F + bi' + \beta i' \qquad (8)$$

donde α y β son escalares reales, a y b son vectores y F es un bivector.

De acuerdo con su comportamiento bajo la operación de inversión: $\gamma\mu \longrightarrow -\gamma\mu$, los r-vectores se clasifican en pares (para r par) e impares (para r impar). Teniendo en cuenta esta clasificación, todo multivector del A.E.T. se puede expresar como la suma de un multivector par, M_+, y uno impar, M_-. Esto es:

$$M = M_- + M_+$$

con

$$M_- = a + bi' \quad (9a) \qquad M_+ = \alpha + \beta i' + F \quad (9b)$$

Los ocho r-vectores unitarios pares

$$[\, 1,\ \gamma\mu\gamma\sigma\ ,\ i' \,] \qquad (10)$$

con $\mu<\sigma$, definen la base de un álgebra de Clifford denominada subálgebra par del A.E.T.

3. Algebra de Dirac

La segunda igualdad de la ecuación (3) indica que los vectores $\gamma\mu$ satisfacen las mismas leyes de multiplicación de las matrices 4x4, definidas sobre el campo de los números complejos, introducidas por Dirac para desarrollar la teoría cuántica del electrón [4]. Estableciendo una correspondencia lineal uno a uno y sobre entre los vectores unitarios del sistema (1) y las matrices de Dirac, se concluye que el A.E.T. sobre el campo de los reales es isomorfa al álgebra de Dirac sobre el campo de los números complejos [5], de manera que estas dos álgebras son equivalentes. Esta es la razón por la cual los vectores del sistema se describen con el mismo símbolo empleado para las matrices de Dirac: $\gamma\mu$.

Veamos la correspondencia de algunas relaciones básicas:

a) Como ya se indicó, mediante el producto geométrico de los vectores unitarios del A.E.T. se tienen las mismas reglas de multiplicación de las matrices de Dirac.

b) El seudoescalar unitario $i' = \gamma_{0123}$ corresponde a la quinta matriz γ_5 del álgebra de Dirac, cuyas propiedades: i) $\gamma_5\gamma_5 = 1$, ii) $\gamma\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma\mu$, iii) es igual a su matriz adjunta (transpuesta conjugada), esto es: $(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5$, son equivalentes a las tres primeras del seudoescalar i' arriba citadas. Recordando que las matrices de Dirac se definen sobre el campo de los complejos, la operación de transponer y conjugar corresponde en el A.E.T. a la operación de reversión.

c) En el A.E.T. los elementos del tensor métrico están definidos mediante los productos interiores $\gamma_\mu \cdot \gamma_\delta$, mientras que en el álgebra de Dirac están definidos por un cuarto de la traza de los productos de las matrices $\gamma_\mu \gamma_\delta$, de manera que $\gamma_\mu . \gamma_\delta = 1/4$ Traza$(\gamma_\mu \gamma_\delta)$, indicando que la parte escalar del A.E.T. corresponde a la traza en el álgebra de Dirac.

Las anteriores consideraciones indican que la teoría de Dirac se puede reemplazar por una formulación equivalente en términos del A.E.T. con las siguientes ventajas:
i) Una representación de los vectores γ_μ por matrices es irrelevante a la teoría de Dirac.
ii) Los γ_μ y sus productos tienen un significado geométrico preciso proveniente de las propiedades geométricas del E.T.
iii) La teoría se puede desarrollar sobre el campo de los reales indicando que los imaginarios en el álgebra de Dirac son superfluos.
iv) Las matrices de Dirac se emplean casi exclusivamente en conexión con partículas de espín 1/2 lo que conduce a pensar que el álgebra de Dirac describe solamente alguna propiedad del espín. Sin embargo, el A.E.T. es aplicable tanto a teorías cuánticas de partículas de espín 1/2 como a cualquier teoría clásica [6], [7].

4. Desdoblamiento del Algebra del espacio-tiempo

Empleando el A.E.T. se pueden describir sistemas físicos mediante ecuaciones que son invariantes en el sentido de no estar referidas a ningún sistema inercial, pero en su aplicación se deben relacionar al sistema inercial empleado para su observación y medida.

Es usual considerar el observador o sistema inercial de referencia como una partícula libre cuya línea de mundo (o historia) pasa por el punto x = 0 del E.T. De esta manera, la noción de sistema inercial se puede caracterizar mediante un vector temporal unitario deducible del vector velocidad propia de dicha partícula. Cada sistema inercial elegido, que denominaremos sistema-γ_0, determina un desdoblamiento del E.T. y de los multivectores del A.E.T. en sus componentes temporal y espaciales.

a. Desdoblamiento del E.T.

Siguiendo la notación estandard del álgebra de Dirac, los índices griegos recorren los valores 0,1,2 y 3, mientras que los índices latinos se reservan para los valores 1,2 y 3.

Consideremos los bivectores unitarios $\gamma_k\gamma_o$:

$$\sigma_k = \gamma_k\gamma_o \quad (k = 1,2,3) \qquad (11)$$

y analicemos su producto geométrico:

Todo bivector $\gamma_k\gamma_m$ postmultiplicado por $\gamma_o\gamma_o = 1$, se puede expresar:

$$\gamma_k\gamma_m = \gamma_k\gamma_m\gamma_o\gamma_o = -\gamma_k\gamma_o\gamma_m\gamma_o = -\sigma_k\sigma_m \qquad (12)$$

De otra parte, de acuerdo con (2) y la definición de producto interior de dos vectores, se tiene:

$$\gamma_k\gamma_m = \gamma_k\cdot\gamma_m = 1/2(\gamma_k\gamma_m + \gamma_m\gamma_k) = -\delta_{km} \qquad (13)$$

Postmultiplicando por $\gamma_o\gamma_o$ y empleando (12) obtenemos para el producto interior de los bivectores definidos en (11) la siguiente relación:

$$\sigma_k\cdot\sigma_m = 1/2(\sigma_k\sigma_m + \sigma_m\sigma_k) = \delta_{km} \qquad (14)$$

para k,m = 1,2,3.

La última igualdad define la métrica del espacio euclidiano tridimensional (E.E.), por tanto los σ_k se pueden interpretar como vectores unitarios del E.E. relativos al sistema-γ_o y constituyen un sistema de vectores a partir del cual se puede generar el álgebra de Clifford del Espacio (A.E.E.).

Ya que cualquier vector del E.T. se puede expresar como una combinación lineal de los vectores del sistema:

$$a = \sum_{\mu} a^{\mu}\gamma_{\mu}$$

postmultiplicando por γ_o obtenemos:

$$a\gamma_o = \sum_{\mu} a^{\mu}\gamma_{\mu}\gamma_o = a^o + \underline{a} \qquad (15a)$$

$$a\gamma_o = a\cdot\gamma_o + a\wedge\gamma_o$$

donde a es un vector del E.E. relativo al sistema-γ_o:

$$\underline{a} = \Sigma_k\, a^k\sigma_k \qquad (15b)$$

indicando que γ_o genera un desdoblamiento de cualquier vector del E.T. en sus componentes temporal a^o y espacial $\underline{a}$. Para distinguir los vectores del E.T. de los vectores relativos del E.E., estos últimos se notan con una barra debajo de la letra que los identifica.

Como un ejemplo consideremos el vector momentum-energía p de una partícula de masa propia m. Tomando unidades de c=1 y

$\hbar=1$, usuales en teoría de campos, el cuadrado de p debe ser igual al cuadrado de su masa propia. Efectuando el desdoblamiento de este vector según (15a) encontramos:

$$p\gamma_o = p\cdot\gamma_o + p\wedge\gamma_o$$

$$p\gamma_o = E + \underline{p}$$

donde E y p definen la energía y el momentum de la partícula relativos al sistema-γ_o

El cuadrado del vector momentum energía es:

$$p^2 = pp = p\gamma_o\gamma_o p = (E + \underline{p})(E - \underline{p}) = E^2 - p^2 = m^2$$

donde se ha tenido en cuenta que $\gamma_o a = \gamma_o\cdot a + \gamma_o\wedge a = a\cdot\gamma_o - a\wedge\gamma_o$, debido a la anticonmutatividad del producto exterior de dos vectores. La anterior es la bien conocida ecuación del desdoblamiento del vector momentum-energía en sus partes temporal y espaciales.

b. <u>Algebra de Pauli</u>

De la segunda igualdad en la ecuación (13) se concluye que los vectores relativos σ_k satisfacen las mismas reglas de multiplicación de las matrices de espín de Pauli, indicando que el álgebra generada por las matrices de Pauli sobre el campo de los números complejos es isomorfa al A.E.E. sobre el campo de los números reales.

En la teoría de Dirac la representación del producto $\gamma_k\gamma_o$ por matrices 4x4 se acostumbra notar α_k, pero se prefiere la la notación (11) para mantener explícito su significado geométrico en el contexto del A.E.T. y recordar la equivalencia entre el A.E.E. relativa a un sistema-γ_o y el álgebra de Dirac.

La base del A.E.E. consta de 8 elementos: un escalar unitario; 3 vectores unitarios σ_k; 3 bivectores unitarios $\sigma_k\sigma_m$ y un seudoescalar unitario que notaremos i: $i = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_{123}$.

El seudoescalar unitario i tiene las siguientes propiedades:
i) su cuadrado es negativo: $(i)^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -1$
ii) conmuta con los vectores unitarios σ_k: $i\sigma_k = \sigma_k i$, por tanto conmuta con cualquier vector relativo definido en (15b)
iii) Representa un volumen orientado del E.E.
Observamos que las dos primeras propiedades coinciden con las que satisface el número complejo definido como raíz de -1. De ahí la notación especial para este seudoescalar unitario.

Ya que para ambas álgebras el campo escalar son los números reales, los escalares del A.E.E. son los mismos del A.E.T. De la ecuación (12) se ve directamente que los bivectores del A.E.E. relativos al sistema-γ_0 son también bivectores en el A.E.T. Finalmente, el seudoescalar unitario i del A.E.E. es equivalente al seudoescalar unitario i' del A.E.T.:

$$i = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \gamma_1\gamma_0\gamma_2\gamma_0\gamma_3\gamma_0 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = i'$$

para la tercera igualdad se han hecho dos permutaciones de γ_0 y se ha tenido en cuenta que $\gamma_0\gamma_0 = 1$.

Con lo anterior se demuestra que el desdoblamiento de los elementos de la subálgebra par del A.E.T., conduce a los elementos del A.E.E., demostrando que el álgebra de Pauli es la subálgebra par del álgebra de Dirac.

5. <u>Ecuaciones de Maxwell</u>

En términos de los elementos del A.E.T. el campo electromagnético queda descrito por un bivector F y la densidad de corriente por el vector J, de manera que las ecuaciones de Maxwell quedan reducidas a una única ecuación bivectorial:

$$\Box F = J \tag{16}$$

Expresando el producto geométrico F según (7), e igualando a ambos lados las partes vectoriales y escalares se obtiene:

$$\Box\cdot F = J \qquad \Box\wedge F = 0$$

Empleando una base tensorial para los vectores $\Box$ y J y para el bivector F se obtienen las ecuaciones de Maxwell en forma tensorial [3].

El desdoblamiento del bivector campo electromagnético se puede efectuar, escribiéndolo como la suma de un término que anticonmuta con γ_0 y otro que conmuta con γ_0. Para demostrarlo expresemos F en forma tensorial, como una combinación lineal de los bivectores unitarios de la base [1]:

$$F = \Sigma_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} = \Sigma_k\, F^{0k}\gamma_{0k} + \Sigma_{k<m}\, F^{km}\gamma_{km} \tag{17}$$

La primera suma a la derecha de la última igualdad es un vector relativo del A.E.E., ver (11), y el segundo término es un bivector relativo del A.E.E. ,ver (12). Como todo bivector del A.E.E. se puede expresar como el producto del seudoescalar unitario i y un vector del E.E., el bivector campo electromagnético será igual a:

$$F = \underline{E} + i\underline{B} \qquad (18)$$

que es la conocida expresión del campo electromanético en términos de los vectores campo eléctrico $\underline{E}$ y campo magnético $\underline{B}$. De (17) se puede mostrar directamente que:

$$\gamma_0 F \gamma_0 = -\underline{E} + i\underline{B}$$

por tanto:

$$\underline{E} = 1/2(F - \gamma_0 F \gamma_0), \qquad i\underline{B} = 1/2(F + \gamma_0 F \gamma_0)$$

El primer término anticonmuta con γ_0 y el segundo conmuta con γ_0.

Efectuando el desdoblamiento de J:

$$J\gamma_0 = J\cdot\gamma_0 + J\wedge\gamma_0 = \rho - \underline{J}$$

donde ρ es el escalar densidad de carga eléctrica y $\underline{J}$ el vector relativo densidad de corriente eléctrica. El desdoblamiento de las ecuaciones de Maxwell se obtiene premultiplicando por γ_0 la ecuación (16):

$$\gamma_0 \Box F = \gamma_0 \Box \gamma_0 \gamma_0 F = \gamma_0 J$$

$$(\partial_0 + \underline{\nabla})(\underline{E} + i\underline{B}) = (\rho - \underline{J})$$

realizando los productos geométricos se obtiene:

$$\partial_0 \underline{E} + i\partial_0 \underline{B} + \underline{\nabla}\cdot\underline{E} + \underline{\nabla}\wedge\underline{E} + i\underline{\nabla}\cdot\underline{B} + i\underline{\nabla}\wedge\underline{B} = \rho - \underline{J}$$

Igualando las partes r-vectoriales a ambos lados de la anterior ecuación, se encuentra:

parte escalar; $\quad \underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \rho$

parte vectorial: $\quad \partial_0 \underline{E} + i\,\underline{\nabla}\wedge\underline{B} = -\underline{J}$

parte bivectorial: $\quad i\partial_0 \underline{B} + \underline{\nabla}\wedge\underline{E} = 0$

parte seudoescalar: $\quad i\,\nabla\cdot\underline{B} = 0$

que constituyen las cuatro ecuaciones clásicas de Maxwell descritas en el E.E. relativo al sistema γ_0.

Teniendo en cuenta que en el A.E.E. el producto del seudoescalar unitario i con un bivector a b equivale al producto vectorial de dichos vectores en el álgebra usual:

$$a \times b = -i\, a\wedge b$$

se consigue la completa equivalencia entre las anteriores ecuaciones con las ecuaciones de Maxwell estandard.

Referencias

[1] Spinel M.C. Algebras de Clifford, (1990) Revista Momento 2, 21.
[2] Hestenes D. Clifford Algebra to Geometric Calculus (1984) Reidel Publishing Co.
[3] Hestenes D. Space Time Algebra (1966) Gordon and Beach N.Y.
[4] Teoría de Dirac, ver por ejemplo Schiff L.I. Quantum Mechanics (1968) Mc. Hill N.Y. pp 472-488.
[5] Ver por ejemplo Apéndice A en Mandl F. and Shaw G. Quantum Field Theory (1984) J. Wiley and Sons
[6] Hestenes D. Geometry of the Dirac Theory, en Mathematics of the Physical Space Time (1981), Symposium sponsored by Universidad Autónoma de México
[7] Hestenes D. Observables, Operators, and Complex Numbers in the Dirac Theory (1975) J. Math. Phys. 12 556.

(*) Profesora del Departamento de Física de la Universidad Nacional, Bogotá.