

# LA ESCOGENCIA DE LA CAVIDAD DE LORENTZ EN LA DETERMINACION DEL CAMPO LOCAL DE UN MEDIO COMPUESTO

Jairo Giraldo Gallo

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

## I. Introducción

Aunque *Electricidad y Magnetismo* en su conjunto es una disciplina más que centenaria capaz de dar cuenta de la mayor parte de los fenómenos ópticos que ocurren en la naturaleza, la determinación de los campos mismos en los medios inhomogéneos no ha recibido todavía una solución satisfactoria.

En este trabajo se pretende ilustrar cómo un problema aparentemente resuelto, como lo es el de realizar el simple promedio (sin fluctuaciones) para determinar el campo que experimenta una partícula pequeña comparada con la longitud de onda del campo, dista mucho de haber sido plenamente dilucidado. Este problema cobra interés cuando se piensa en partículas inmersas dentro de un medio que por lo demás puede considerarse homogéneo. Más específicamente estamos interesados en *medios compuestos con estructura de granos separados*<sup>1-5</sup> en el régimen de fracción de llenado pequeña (cf. más adelante).

El cálculo del campo efectivo en la determinación de la respuesta dieléctrica de un medio inhomogéneo se remonta a la primera mitad del siglo XIX, y está estrechamente ligado al desarrollo del concepto de *Campo Molecular*.<sup>6</sup> Los textos presentan usualmente la deducción de la denominada *ecuación de Clausius-Mossotti* (ECM) para moléculas o partículas polarizables isotrópicas idénticas, supuestamente esféricas, diluidas en un *continuum*. En realidad, al lado de los nombres de Clausius y de Mossotti, hay que destacar la contribución de otros más en la deducción de la célebre ecuación. En particular Lorenz y Lorentz, entre otros, hicieron una valiosísima contribución a este desarrollo. Ya mucho antes Faraday estuvo atacando esencialmente el mismo problema al proponer como modelo de material dieléctrico un material aislante que rodeaba totalmente glóbulos metálicos incrustados en ese medio.

Sin pretender ser exhaustivos, una breve reseña histórica servirá para hacer justicia a los protagonistas principales de este desarrollo. Mayores detalles pueden encontrarse en las referencias 1 a 6. Mossotti parece haber sido el primero en introducir el concepto de una *cavidad artificiosa* para calcular el campo efectivo de un dieléctrico. El análisis de Mossotti está basado en un trabajo relacionado de Poisson,<sup>4,8a</sup> desarrollado por este para el caso de medios magnéticos. Un paso significativo posterior es indudablemente el de Lorenz. Su idea fundamental parte de asignar un índice de refracción al interior de cada molécula, cantidad que difiere de la del medio circundante. El conjunto está caracterizado por una *función dieléctrica* macroscópica que denotaremos por  $\epsilon_M$ .

Clausius deduce el valor efectivo de la *función* (o *respuesta*, equivocadamente denominada *constante*) *dieléctrica* mediante un procedimiento que, a diferencia del de Mossotti, resulta acequible

para un lector actual. Al igual que Faraday, Clausius asume que las moléculas son esferas conductoras. Luego toma cada molécula como si estuviera colocada en el centro de una esfera separada artificialmente del medio circundante. Clausius encuentra que, si las esferitas son perfectamente conductoras,  $\epsilon_M$  está relacionada con la fracción volumétrica de llenado  $f$  del conductor por medio de la relación

$$\epsilon_M = \frac{1 + 2f}{1 - f} \quad (1)$$

Si  $N$  es el número de partículas inmersas por unidad de volumen y  $a$  el radio de cada una de ellas,  $f = 4\pi Na^3/3$ .

En su tratado de Electricidad y Magnetismo, Maxwell<sup>8b</sup> deduce la misma relación a la manera de los autores anteriores. Como él está interesado en la resistencia del medio inhomogéneo, expresa su resultado en términos de la resistencia de las esferas conductoras y la resistencia del medio circundante. Maxwell reconoció explícitamente que su deducción está limitada a valores pequeños de las fracciones de llenado de las inclusiones. A lo largo de este trabajo mantendremos la misma suposición.

En los textos la presentación usual del campo efectivo sigue los delineamientos de la argumentación de Lorentz.<sup>9</sup> Este invoca la ya célebre esfera mayor extraída del dieléctrico y centrada en la molécula bajo consideración para calcular el campo promedio macroscópico y el campo local. La esfera mayor separa las moléculas lejanas al punto de poder tratar lo que está fuera de ella como un *continuum* (Fig.1a). Por el contrario, las moléculas del interior deben tenerse en cuenta explícitamente (Fig.1b). De su argumentación resulta que el campo macroscópico difiere del campo en el exterior en el término  $-4\pi P/3$ , siendo  $P$  la polarización macroscópica. El campo local, entendido como el campo que experimenta una molécula o partícula en el centro de la esfera, va a ser el campo exterior más el campo producido por todas las moléculas polarizadas en el interior de la esfera. Para todo tipo de simetría cúbica este campo dipolar vale cero, de tal suerte que finalmente resulta

$$E_{\text{local}} = E + 4\pi P/3. \quad (2)$$

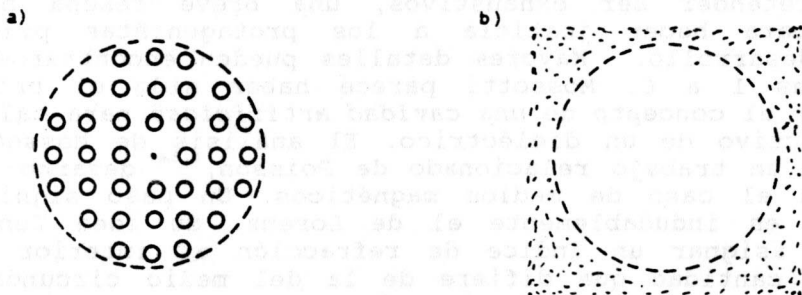


Figura 1. El campo que experimenta una partícula en el punto  $P$  es la suma del campo de todas las fuentes exteriores a la cavidad (1a) más el campo de todas las partículas en el interior de la cavidad (1b).

El último término en la Ec.(2) se suele denominar *Campo de Lorentz*. La relación de Clausius y Mossotti se suele expresar en términos de la susceptibilidad dieléctrica  $\chi$ . A ella se llega fácilmente a partir de la expresión anterior. Los trabajos de Lorenz y de Lorentz establecen una relación entre el índice de refracción y la fracción de llenado de las inclusiones; por razones prácticas y para adecuar su resultado a nuestra nomenclatura, utilizamos  $\epsilon = n^2$ , siendo  $n$  el índice de refracción de las inclusiones. Supondremos además que el medio circundante tiene una función dieléctrica  $\epsilon_h$ .  $\epsilon_M$  es el promedio del cuadrado del índice de refracción del conjunto. Una falla en la generalización del modelo de Lorentz, la cual no parece haber llamado la atención a lo largo de un siglo, es la suposición implícita de que las moléculas que actúan sobre la molécula en cuestión son dipolos puntuales. Aunque del argumento general esto es obvio, no resulta tan explícita dicha suposición a la hora de evaluar el efecto de la distribución superficial de carga de la esfera, la cual es precisamente la de dipolos puntuales en una superficie que se vuelve singular.

La argumentación anterior u otra equivalente da lugar a lo que se denomina *Aproximación de Campo Medio (ACM)*. Es de anotar que el procedimiento de Lorentz vale exactamente para una colección de moléculas perfectamente esféricas e isotrópicas. Por el contrario, queda llena de incertidumbre la utilización de su argumento cuando se piensa que las moléculas son alargadas o simplemente si no son isotrópicas.

Se suele asociar la ecuación obtenida por James Clerk Maxwell Garnett<sup>10</sup> para la respuesta dieléctrica efectiva de un medio compuesto con la primera teoría de *medio efectivo*. Garnett deduce una vez más la relación de Clausius-Mossotti-Maxwell-Lorentz basándose en las ecuaciones de Maxwell para la propagación de ondas, superando así la aproximación de comportamiento estático hasta entonces utilizada. Su mayor aporte radica en la aplicación de dicha relación, la cual por simplicidad y por costumbre seguiremos denominando *ecuación de Clausius-Mossotti (ECM)*, para determinar las propiedades ópticas de vidrios que contienen partículas metálicas, de películas metálicas delgadas y de soles. Siguiendo el procedimiento de Garnett, es más conveniente expresar  $\epsilon_M$  en términos de la polarizabilidad de las partículas suspendidas. Para esferas isotrópicas de radio  $a$  y constante dieléctrica  $\epsilon$  en un medio caracterizado por  $\epsilon_h$ , esta es:  $\alpha = a^3(\epsilon - \epsilon_h)/(\epsilon + 2\epsilon_h)$ . Si además definimos la polarizabilidad renormalizada  $\hat{\alpha} = \alpha/a^3$ , la ECM se convierte en

$$\frac{\epsilon_M - \epsilon_h}{\epsilon_M + 2\epsilon_h} = f\hat{\alpha}. \quad (3)$$

Para buscar una generalización al procedimiento de Lorentz o, lo que es igual, a la *aproximación de campo medio* aplicada a medios compuestos granulados, vamos a utilizar en este trabajo lo que denominaremos *Cavidad de Lorentz, CL*. La dificultad radica en encontrar la cavidad adecuada a partículas no esféricas. Podría escogerse una CL esférica? Si las partículas son elipsoidales, no

sería más adecuado utilizar una cavidad elipsoidal? Y en tal caso, la excentricidad de la cavidad ha de ser la misma que la de las partículas o prima la sugerencia matemática de que sea una cavidad confocal? Si así fuera, veremos que hay una infinidad de cavidades posibles.Cuál será la mejor? O habrá solamente una CL adecuada?

El interés por el fenómeno de birrefringencia llevó al estudio de situaciones en las que partículas elipsoidales estaban inmersas en un campo eléctrico. El problema estático de elipsoides inmersos en campos homogéneos fue tratado por Maxwell mismo en su célebre obra.<sup>11</sup> La discusión de la solución exacta del problema se encuentra en numerosos libros de texto.<sup>12-15</sup> La relación de este problema con el del índice de refracción de materiales anisotrópicos parece haber sido considerada en primer lugar por Wiener en un trabajo de difícil consecución<sup>16</sup> citado por Fricke<sup>17</sup>, por Bragg y Pippard<sup>18</sup> y otros más.<sup>4,5</sup> Las contribuciones de aquellos parecen haberse echado al olvido a la hora de evaluar el efecto de cavidades e inclusiones no esféricas en películas de plata y otros metales en experimentos recientes.<sup>19-22</sup>

En recientes trabajos<sup>23-25</sup> se ha desarrollado un modelo relativamente simple para la polarizabilidad dieléctrica de partículas diluidas y la respuesta dieléctrica de un medio compuesto. De esos trabajos y otros más se concluye que es necesario ir más allá de la ACM para poder tener en cuenta el efecto del desorden o, todavía mejor, que es necesario incluir el efecto de las fluctuaciones del campo para entender los resultados experimentales. Sorprende al autor de esta nota el hecho de que ni siquiera la generalización de la ACM para elipsoides se ha elaborado consistentemente. La siguiente sección ataca ese problema.

## II. Generalización de la Aproximación de Campo Medio

Consideremos un sistema de  $N$  partículas idénticas, no necesariamente esféricas pero con idéntica orientación, hechas de un material isotrópico caracterizado por una función dieléctrica  $\epsilon$ . Asumamos que  $N \gg 1$ , que las partículas tienen polarizabilidad con componentes  $\alpha_j$  a lo largo de los ejes principales, los cuales pueden claramente distinguirse puesto que las partículas están perfectamente alineadas a lo largo de una dirección preferencial, no necesariamente coincidente con la dirección del campo eléctrico externo. Los centros de las partículas ocupan, por lo demás, posiciones totalmente aleatorias  $R_j$  dentro de un medio homogéneo caracterizado por una función dieléctrica  $\epsilon_h$ . Asumamos, además, que el sistema global está siendo excitado por un campo eléctrico externo  $E_{ex}$  cuya variación espacial está contenida íntegramente en el vector de onda  $q$ . La magnitud de éste satisface la condición de no retardamiento, a saber,  $q \ll 1/r_j$  ( $r_j$  y  $r_c$  son, respectivamente, las dimensiones mayor y menor de las partículas). El campo varía temporalmente en una forma que, por simplicidad, asumimos monocromática a frecuencia  $\omega$ . Si orientamos nuestro sistema de coordenadas a lo largo de los ejes principales del tensor de polarizabilidad, el momento dipolar inducido sobre la  $i$ -ésima partícula satisface la siguiente ecuación:

$$P_i^\gamma = \alpha_\gamma (E_\gamma^0 + \sum_{j, \delta} s_{ij}^{\gamma\delta} P_j^\delta). \quad (4)$$

Aquí los subíndices  $\gamma, \delta = x, y, z$  indican componentes cartesianas,  $E_i^0$  es el campo eléctrico en  $R_i$  en ausencia de las inclusiones y  $s_{ij}^{\gamma\delta}$  es el tensor de interacción que relaciona el campo eléctrico en  $R_i$  producido por una partícula polarizada ubicada en  $R_j$  con el momento dipolar  $p_j$ . Este campo eléctrico inducido es dipolar solamente a grandes distancias. Las expresiones explícitas para  $s_{ij}^{\gamma\delta}$  dependen de la forma de las partículas. Si fueran esferas isotrópicas, la expresión exacta para el campo se obtendría a partir del tensor de interacción dipolo-dipolo

$$t_{ij}^{\gamma\delta} = (1 - \delta_{ij}) \partial_i^\gamma \partial_j^\delta (1/R_{ij}). \quad (5)$$

En general también las componentes principales del tensor de polarizabilidad de cada una de las inclusiones depende de la forma de estas, y están relacionadas con los denominados factores de depolarización  $L_\gamma$ . Si las partículas son elipsoides con semiejes  $a, b$  y  $c$ , la polarizabilidad renormalizada de las partículas a lo largo de cada uno de estos semiejes está dada por

$$\hat{\alpha}_\gamma = \frac{1}{3} \frac{\epsilon - \epsilon_h}{L_\gamma \epsilon + (1 - L_\gamma) \epsilon_h} \quad (6)$$

Si los elipsoides tienen un eje de simetría (son elipsoides de revolución prolatos u oblatos), es decir, si  $b = c$  y  $a > b$  (prolato) o  $a < b$  (oblatos), los factores de depolarización a lo largo del eje de simetría (eje  $z$  en nuestra nomenclatura) están dados por

$$L_z = \begin{cases} [(1 - e^2)/e^2] \{ \ln[(1+e)/(1-e)]/2e - 1 \} / (P) & (7a) \\ \{ 1 - \arctg(d) \} d / e^2 & (O) \end{cases} \quad (7b)$$

y  $L_x = L_y = (1 - L_z)/2$ , donde  $e = (1 - r_-^2/r_+^2)^{1/2}$  es la excentricidad,  $r_+$  ( $r_-$ ) es el semieje mayor (menor) y  $d(e) = e/(1 - e^2)^{1/2}$ . En el caso más general de elipsoides con semiejes  $a, b$  y  $c$  diferentes, el valor del factor de depolarización a lo largo de un eje principal  $\gamma$  está dado por

$$L_\gamma = \int_0^\infty \frac{ds}{(s + a_\gamma^2) [(s + a^2)(s + b^2)(s + c^2)]^{1/2}}; \quad (8)$$

se satisface siempre la siguiente regla de suma:  $\sum L_\gamma = 1$  ( $a_\gamma = a$ , etc)

En la aproximación de no retardamiento los modos transversal y longitudinal están desacoplados. Aún más, las funciones respuesta macroscópicas longitudinal y transversal coinciden. De tal suerte que, por simplicidad, asumiremos que el sistema ha sido excitado con un campo externo longitudinal. Para ser más explícitos,

escribamos

$$E^{ex} = E^{ex} \hat{q} e^{i(q \cdot r - \omega t)} \quad (9)$$

donde  $\hat{q} = q/q$ . Usando la bien conocida relación entre el campo externo y el campo en el medio sin inclusiones  $E_i^o = E_i^{ex} / \epsilon_h$ , a cambio de la Ec. (4) podemos escribir:

$$P_i^\gamma = \alpha_\gamma (E^{ex} \hat{q}_\gamma / \epsilon_h + \sum_{j, \delta} S_{ij}^{\gamma\delta} P_j^\delta). \quad (10)$$

Para simplificar factores exponenciales innecesarios se ha definido

$$P^\gamma = p^\gamma e^{-i q \cdot R} \quad S_{ij}^{\gamma\delta} = s_{ij}^{\gamma\delta} e^{-i q \cdot (R_i - R_j)}. \quad (11)$$

En la ACM se asume que todas las partículas adquieren el mismo valor de momento de dipolo promedio  $\langle p \rangle$ ; es decir, no se tienen en cuenta las fluctuaciones de los momentos de dipolo alrededor de su media (fluctuaciones dipolares). Esto lleva a que el valor promedio del momento de dipolo vaya en la dirección del campo medio. En consecuencia, también los promedios de las componentes no diagonales del tensor  $S_{ij}$  se anulan, y el momento de dipolo promedio satisface en la ACM la relación

$$\langle P \rangle^\gamma = \alpha_\gamma (E^{ex} \hat{q}_\gamma / \epsilon_h + \langle \sum_{j, \delta} S_{ij}^{\gamma\delta} \rangle \langle P \rangle^\delta) \quad (12)$$

la cual da de inmediato el valor de  $\langle P \rangle^\gamma$ . Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene fácilmente una expresión para las componentes principales del tensor dieléctrico efectivo. Si se define  $f = Nv$ , siendo  $v$  el volumen geométrico de las partículas, aquella puede escribirse en la siguiente forma:

$$\frac{\epsilon_M^\gamma - \epsilon_h}{(1 + S_A^\gamma) \epsilon_M - S_A^\gamma \epsilon_h} = 3f \hat{q}_\gamma^2. \quad (13)$$

La expresión anterior corresponde a la generalización de la ACM para partículas no esféricas. En ella  $4\pi n S_A^\gamma = \lim_{q \rightarrow 0} \langle \sum_{j, \delta} S_{ij}^{\gamma\delta} \rangle$ , con

$$S_A^\gamma = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int s^{\gamma\gamma}(R) e^{-i q \cdot R} \rho^{(2)}(R) d^3R, \quad (14)$$

siendo  $\rho^{(2)}(R)$  la función de correlación de una pareja de partículas. Cuando las inclusiones son esféricas, el campo eléctrico inducido es estrictamente dipolar y  $S_A^\gamma$  es independiente de  $\rho^{(2)}(R)$ . En tal caso  $\epsilon_M$  depende solamente de la fracción volumétrica de llenado, como se podría demostrar por integración directa en Ec. (14). De ahí la validez general de la ECM para partículas esféricas. Este no es el caso para partículas no esféricas, y en consecuencia el valor de  $S_A^\gamma$  depende de  $\rho^{(2)}(R)$ . Veamos algunos ejemplos en el caso particular de esferoides prolatos para las cavidades que se ilustran en la Figura 2.

i. *Cavidad Esférica.* Si se toma como función de correlación la que resulta del modelo de esfera impenetrable (Fig. 2a), la cual está dada por (esfera mayor para partícula prolata)

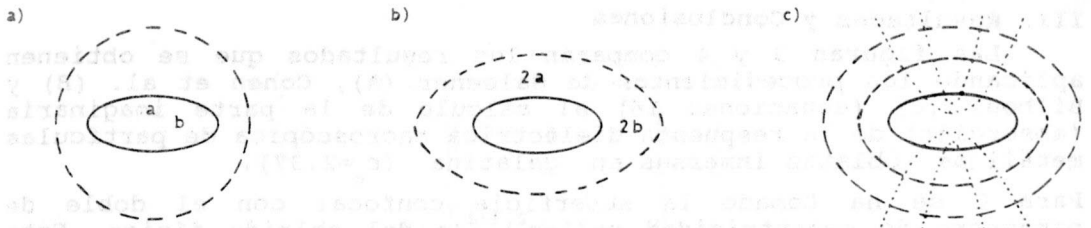


Figura 2. Distintos tipos posibles de Cavity de Lorentz para una partícula elipsoidal. a) Cavity Esférica (convencional); b) Cavity elipsoidal con la misma excentricidad de la partícula (compatible con el modelo de partícula impenetrable); c) Cavity elipsoidal confocal con la partícula (distintas excentricidades).

$$\rho_{HC}^{(2)}(R, \mu) = \Theta(R-2a) \quad (15a)$$

( $\Theta$  es la función escalonada) se encuentra la expresión propuesta por Galeener<sup>19</sup> y utilizada por Granqvist et al.<sup>20</sup>, a saber

$$\frac{\epsilon_M - \epsilon_h}{\epsilon_M + 2\epsilon_h} = f\hat{\alpha}. \quad (16a)$$

ii. *Cavity de Elipsoide Prolato Excluido* (partícula impenetrable). En tal caso (Fig.2b) la función de correlación está dada por

$$\rho_{HC}^{(2)}(R, \mu) = \Theta(R-2r_o(\mu)), \quad (15b)$$

con  $\mu = \cos\theta$  en coordenadas esféricas (eje z en la dirección del eje de simetría) y  $r_o(\mu) = b/(1-e^2\mu^2)^{1/2}$ . La integración directa en Ec.(14) conduce a

$$S_A^\gamma = L_\gamma - 1 \quad (17)$$

siendo  $L_\gamma$  los factores de polarización dados en Ec.(7b) y la regla de suma  $\sum L_\gamma = 1$ . Al reemplazar en Ec.(13) se obtiene exactamente el resultado obtenido por Bragg et al.<sup>18</sup> y redescubierto por Cohen et al.<sup>21</sup>

$$\frac{\epsilon_M^\gamma - \epsilon_h}{L_\gamma \epsilon_M^\gamma + (1-L_\gamma) \epsilon_h} = 3f\hat{\alpha}_\gamma, \quad (16b)$$

iii. *Esferoide Prolato Confocal*. Nuestro resultado ahora coincide con el utilizado por Niklasson et al.<sup>22</sup> originalmente propuesto por Fricke<sup>17</sup> y luego por Bilboul para elipsoides recubiertos.<sup>26</sup>

$$\frac{\epsilon_M^\gamma - \epsilon_h}{L_\gamma^c \epsilon_M^\gamma + (1-L_\gamma^c) \epsilon_h} = 3f\hat{\alpha}_\gamma^c, \quad (16c)$$

siendo  $L_\gamma^c$  el factor de depolarización de una cavity confocal. Evidentemente ahora hay toda una familia de cavidades posibles (todos los esferoides prolato confocales). En la figura 2c ilustramos dos de las cavidades posibles.

### III. Resultados y Conclusiones

Las figuras 3 y 4 comparan los resultados que se obtienen aplicando los procedimientos de Galeener (A), Cohen et al. (B) y Bilboul (C) (ecuaciones 16) al cálculo de la parte imaginaria (absorción) de la respuesta dieléctrica macroscópica de partículas metálicas oblatas inmersas en gelatina ( $\epsilon_h = 2.37$ ).

Para C se ha tomado la superficie confocal con el doble de parámetro de excentricidad  $\eta = (1 - e^2)^{1/2} / e$  del obloide físico. Esta superficie encierra totalmente el esferoide de exclusión que resulta del modelo de partícula impenetrable y, al igual que B, da los límites de Wiener<sup>16</sup> de esfera ( $e=0$ ) y disco ( $e=1$ ). No ocurre lo mismo con esferoides prolatos con  $e=1$ . Como se puede demostrar analíticamente, los tres modelos dan los mismos resultados a  $e=0$  y difieren muy poco a excentricidades y fracciones de llenado muy pequeñas.

En los cálculos se han utilizado fracciones de llenado moderadas y excentricidades relativamente grandes. Para la respuesta dieléctrica del metal hemos escogido la clásica expresión de Drude con  $\omega\tau = 92$ . En Fig.3  $e=0.9$ ,  $f=0.3$  y la diferencia entre los tres cálculos es apreciable. Como es fácil de comprobar analíticamente, se observa que C y B dan resultados muy similares mientras que A se aleja sustancialmente de aquellos.

En la figura 4, y para una excentricidad menor ( $e=0.7$ ), se incluyen también los resultados de utilizar un cálculo más sofisticado. Este último emplea el campo exacto de los esferoides y un modelo que va más allá de la ACM: la teoría de polarizabilidad renormalizada (RPT).<sup>23,24</sup> La comparación ahora se hace a una fracción de llenado ligeramente menor ( $f=0.2$ ). Aunque los resultados en los tres modelos ACM se asemejan (los elipsoides son ahora esferas ligeramente deformadas), difieren considerablemente en ambos modos ( $x$  y  $z$ ) del resultado RPT con campo exacto. Como se demuestra en trabajos previos o próximos a publicarse, la RPT da resultados que se acercan más a las mediciones experimentales y reproduce los límites correctos de Wiener para discos y agujas. Un procedimiento para incluir efectos adicionales, e.g., efectos multipolares y de correlación entre tres partículas, se presentará próximamente.<sup>25</sup>

En síntesis, aunque la ACM no es suficiente, una CL que simule la forma de la partícula es preferible a la CL esférica propuesta por Lorentz. La escogencia, sin embargo, no es única. En Ref.23 se demuestra que en el modelo de partícula impenetrable los efectos multipolares no contribuyen al campo local en la ACM, por lo que dentro de esta aproximación es suficiente el campo dipolar.

### RECONOCIMIENTOS

El autor agradece a la Fundación para la Promoción de la Investigación y la Tecnología del Banco de la República la financiación del Proyecto de Investigación que hizo posible la realización de este trabajo. Las discusiones sostenidas con los coautores de otros trabajos<sup>24,25</sup> fueron altamente fructíferas.



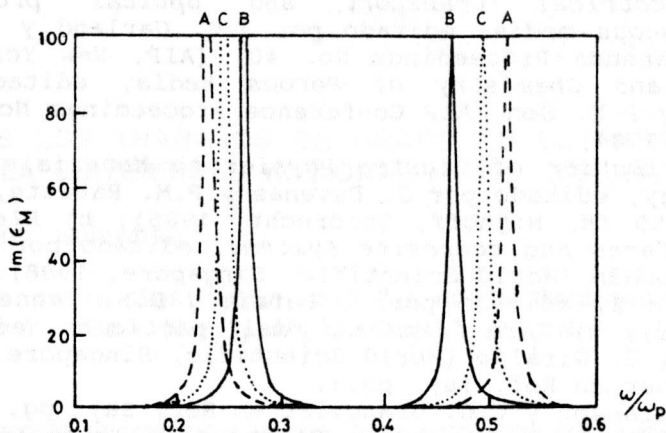


Figura 3. Resultado de utilizar distintos tipos de cavidades para el cálculo de la parte imaginaria de la respuesta dieléctrica macroscópica de elipsoides metálicos oblatos inmersos en gelatina. A: Eq.16a; B: Eq.16b; C: Eq.16c. El modo a lo largo del eje Z (eje de simetría) se localiza a la izquierda de la figura. El del plano de simetría, a la derecha. Parámetros:  $f = 0.3$ ,  $e = 0.9$ .

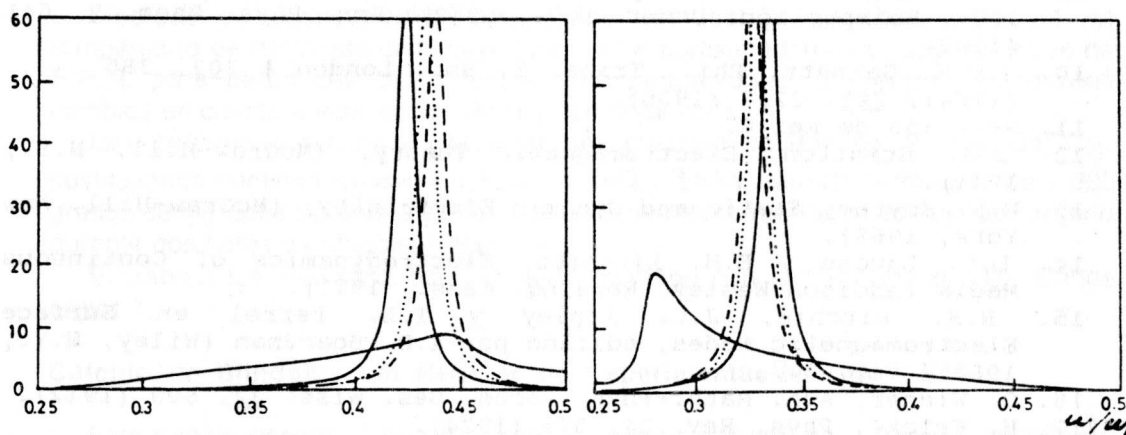


Figura 4. Parte imaginaria de  $\epsilon_M$  con  $f = 0.2$  y  $e = 0.7$ . a) Modo a lo largo de Z; b) Modo en el plano XY. A los modelos anteriores se ha agregado el que resulta de un cálculo más exacto que tiene en cuenta las fluctuaciones dipolares <sup>23</sup> (gráfica D). Aunque los resultados de aplicar la teoría de polarizabilidad renormalizada y el campo exacto de los elipsoides es igual al de A y B cuando  $e \rightarrow 1$  (cotas de Wiener), difiere considerablemente de todos los modelos que utilizan ACM para excentricidades tales que  $0 \leq e < 1$ . Los modelos aquí utilizados valen para fracciones de llenado pequeñas ( $f < 0.3$ ).

## REFERENCIAS

1. a) *Electrical transport and optical properties of inhomogeneous media*, editado por J.C. Garland y D.B. Tanner, AIP Conference Proceedings No. 40, (AIP, New York 1978); b) *Physics and Chemistry of Porous Media*, editado por D.L. Johnson y P.N. Sen, AIP Conference Proceedings No. 107, (AIP, New York 1984).
2. a) *Contribution of Cluster Physics to Materials Science and Technology*, editado por J. Davenas y P.M. Rabette, NATO series ASI No. 50 (M. Nijhoff, Dordrecht, 1986); b) *Electrodynamics of interfaces and composite systems*, editado por R.G. Barrera y W.L. Mochán (World Scientific, Singapore, 1988).
3. a) *ETOPIM 2*, editado por J. Lafait y D.B. Tanner, *Physica A* 157 (1990); b) *Thin films and small particles*, editado por M. Cardona y J. Giraldo (World Scientific, Singapore, 1989).
4. R. Landauer en Ref. 1a), pg.2.
5. G. A. Niklasson y C.G. Granqvist en Ref. 2a) pg. 539.
6. C.J.F. Böttcher, *Theory of Electric Polarization* (Elsevier, New York, 1952).
7. Las referencias a los trabajos de Faraday, Mossotti, Lorenz y Lorentz han sido tomadas de otras fuentes. En particular, véanse las referencias 4 a 6.
8. J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. I* (Oxford, Clarendon Press, 1873; Reimpresión: Dover, N.Y., 1954): a) Sec.314; b) Sec.423.
9. H.A. Lorentz, *The Theory of Electrons*, (B.G. Teubner, Leipzig, 1909; Reimpresión: Dover, N.Y., 1952); *Ann. Phys. Chem.* 9, 641 (1880).
10. J.C.M. Garnett, *Phil. Trans. R. Soc. London A* 203, 385 (1904); 205, 2237 (1906).
11. Sec. 150 de Ref.8.
12. J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, (McGraw-Hill, N.Y., 1941).
13. W.R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, (McGraw-Hill, New York, 1969).
14. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971).
15. R.H. Ritchie, J.C. Ashley y T.L. Ferrel en *Surface Electromagnetic Modes*, editado por A.D. Boardman (Wiley, N.Y., 1982), Cap. 3.
16. O. Wiener, *Abh. Math.-Phys. sächs. Ges. Wiss.* 32, 509 (1912).
17. H. Fricke, *Phys. Rev.* 24, 575 (1924).
18. W.L. Bragg y A.B. Pippard, *Acta Cryst.* 6, 865 (1953).
19. F.L. Galeener, *Phys. Rev. Letters* 27, 421 (1971).
20. C.G. Granqvist y O. Hunderi, *Phys. Rev. B* 16, 3513 (1977);
21. R.W. Cohen, G.D. Cody, M.D. Couts y B. Abeles, *Phys. Rev. B* 8, 3689 (1973).
22. C.G. Granqvist, *J. Appl. Phys.* 50, 216 (1979); G.A. Niklasson y C.G. Granqvist, *J. Appl. Phys.* 55, 3382 (1984).
23. R. G. Barrera, G. Monsivais y W. L. Mochán, *Phys. Rev. B* 38, 537 (1988).
24. J. Giraldo, R.G. Barrera y W.L. Mochán, por aparecer.
25. R. G. Barrera, F. Claro, W.L. Mochán, G. Monsivais, y J. Giraldo, en preparación.
26. R.R. Bilboul, *J. Phys. D* 2, 921 (1969).