"MOMENTO" Revista Departamento de Física Universidad Nacional de Colombia, Número 6, Abril 1992.

ANALISIS DE ALGUNOS PROBLEMAS DE FISICA ELEMENTAL POR METODOS GEOMETRICOS

Clara Elvira Camargo U
Departamento de Física
Universidad Nacional
Santafé de Bogotá

RESUMEN

Se presenta una versión moderna de algunos antiguos problemas resueltos por métodos puramente geométricos.

Ya que no se recurre a una teoría física completa y articulada sino a algún "conocimiento instintivo", tal enfoque puede ser interesante como una alternativa pedagógica en cursos introductorios.

ABSTRACT

In this paper a modern version of some early physical problems solved by purely geometrical methods are presented.

Because it is not necessary a complete and articulated physical theory but some "instintive knowledge", such an approach can be used in introductory courses as an interesting pedagogical option.

1. INTRODUCCION

Dos de los principales exponentes de la escuela de pensamiento que en el siglo XVI continuó la obra de Pitágoras y Arquímedes fueron Simón Stevin y Galileo Galilei.

Simón Stevin es famoso por haber logrado la primera solución del problema de la descomposición de fuerzas en el plano inclinado. El partió del principio de la imposibilidad del movimiento perpetuo aplicado a una cadena colocada sobre dos planos sin fricción.

Al idealizar la situación y desechar el elemento "conflictivo" Stevin, lo mismo que Galileo, logra la matematización del fenómeno físico.

Koyré afirma que Galileo no llegó al principio del isocronismo del péndulo por la observación de las oscilaciones de la lámpara de la catedral de Pisa sino por la comparación entre el movimiento de un péndulo y el movimiento de una bolita sobre planos inclinados que sean cuerdas de un círculo vertical. Sea esto así o nó, el problema tratado por Galileo del deslizamiento de esferas a lo largo de cuerdas en una circunferencia vertical resulta ser una aplicación muy atractiva desde el punto de vista pedagógico de los principios elementales de la cinemática.

2. DESCOMPOSICION DE FUERZAS EN EL PLANO INCLINADO.

El razonamiento hecho por Stevin (1605) en la resolución del problema de la descomposición de fuerzas en el plano inclinado es como sigue:

Considerando la cadena colocada como se muestra en la figura (1) y sabiendo que: i)la parte inferior cuelga de los extremos y está en equilibrio dispuesta simétricamente respecto a su centro y por lo tanto no tiende a deslizarse hacia ninguno de los dos lados, ii) la parte que está encima de los planos

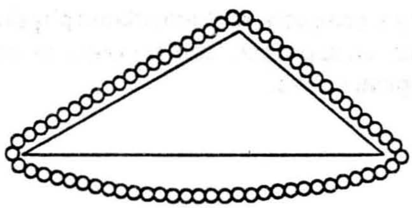
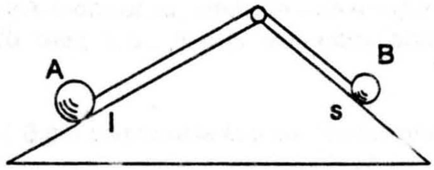


fig. 1

podría tender ya hacia la izquierda, ya hacia la derecha si no hubiera equilibrio, pero si lo hace, se alcanza una configuración igual a la anterior, por lo que seguiría moviendose indefinidamente, y, iii) un movimiento perpetuo es contrario a la intuición, concluímos que ambos pedazos de la cadena tienden a deslizarse hacia abajo con una fuerza igual. Pero los pesos correspondientes a los pedazos de cadena sobre cada uno de los planos están en la misma proporción que sus longitudes respectivas, entonces si hacemos con cada pedazo de cadena una bola de peso igual, estas dos bolas estarán en equilibrio y sus pesos estarán en proporción de las longitudes de los planos (fig. 2).



$P_A / P_B = l/s$

fig.2

Ahora, si uno de los planos es vertical (fig. 3), y tenemos equilibrio:

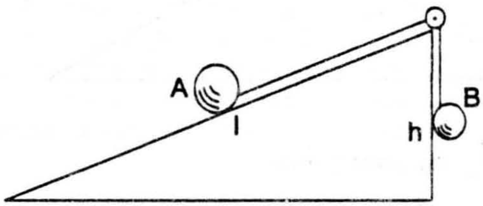


fig. 3

Nuevamente $P_A / P_B = l/h$. Pero ahora el peso de B puede considerarse como igual a la fuerza efectiva que tiende a hacer rodar a A sobre el plano. Llamamos a esta fuerza $F_{\parallel}$ entonces:

$F_{\parallel} = P_B = P_A \cdot h/l$

Cuál es la fuerza que oprime a A contra el plano? Lo podemos averiguar suponiendo otro plano inclinado perpendicular al anterior (fig. 4), y reemplazando la fuerza del primer plano por otro peso C que equilibra a A sobre el segundo plano:

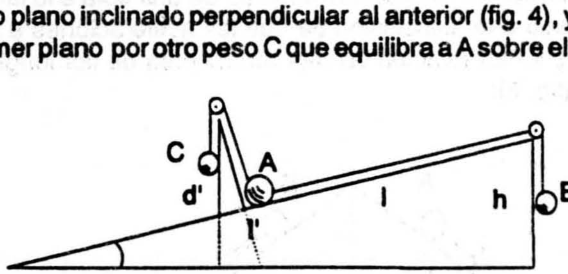


fig. 4

Llamando $F_{\perp}$ a la fuerza que ejerce el primer plano sobre A y aplicando al segundo la relación ya encontrada tendremos: $F_{\perp} = P_A \cdot d'/l'$ pero $d'/l' = d/l$ entonces, $F_{\perp} = P_A \cdot d/l$

Una consecuencia de lo anterior es que si tenemos (fig.5) dos bolas iguales de peso P sobre los dos planos siguientes:

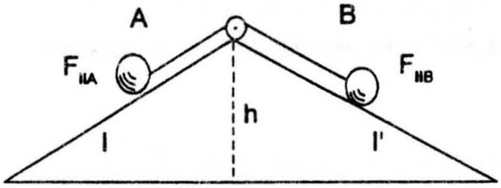


fig.5

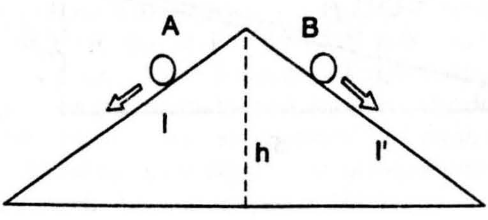
La relación entre las $F_{\parallel}$ de ambas será:

$$\frac{F_{\parallel A}}{F_{\parallel B}} = \frac{P.\ \ h/l}{P.\ \ h/l'} = \frac{l'}{l}$$

Es decir, que las fuerzas que actuan en dirección de los planos respectivos están en relación inversa de las longitudes de estos mismos planos.

3. ACELERACION A LO LARGO DE UN PLANO INCLINADO.

En el estudio que Galileo hizo del movimiento de una bola a lo largo de un plano inclinado liso, llegó a la conclusión de que las aceleraciones a lo largo de dos planos inclinados están también en relación inversa de las longitudes de estos mismos planos (fig. 6):



$a_A / a_B = l' / l$

fig. 6

Si él hubiera conocido el resultado anterior y la segunda ley de Newton, la solución del problema hubiera sido obvia. Pero el razonamiento de Galileo siguió otra linea; fué mas o menos así:

Los cuerpos que ruedan por planos inclinados de la misma altura deben llegar al suelo con la misma velocidad porque, ya que el movimiento puede ser considerado completamente reversible, si el cuerpo A sobre el plano izquierdo alcanzara mayor velocidad que el cuerpo B sobre el plano derecho, podríamos hacer que A subiera por un plano de igual inclinación que el derecho, pero hasta una altura mayor. Es contrario al sentido común que por acción solo de la gravedad podamos hacer que un cuerpo suba, luego la velocidad final de ambos cuerpos debe ser la misma. Puesto que la velocidad final media es la misma, y aceptando que el espacio recorrido en el movimiento uniformemente acelerado es igual al que recorrería un movil con velocidad constante igual a la velocidad media en el mismo tiempo, entonces los tiempos de bajada de los dos cuerpos A y B están en relación directa de las longitudes de los planos:

$t_A / t_B = l/l'$

Como la velocidad final de cada uno es igual a la aceleración por el tiempo, entonces:

$a_A \cdot t_A = a_B \cdot t_B$. Luego $a_A / a_B = t_B / t_A = l'/l$.

Esto conduce también a lo siguiente. Consideremos el triángulo DEF (fig. 7):

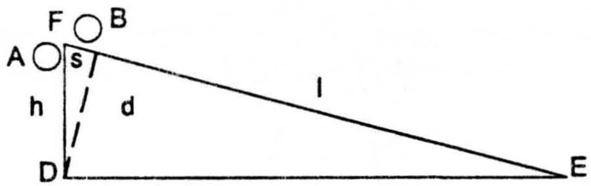


fig. 7

El cuerpo que rueda por el plano vertical cae con aceleración g, el que rueda por el plano oblicuo, con aceleración a, entonces:

$a/g = h/l$ pero $h/l = s/h$, entonces $a/g = s/h$.

Como los espacios recorridos en un mismo tiempo por cuerpos con movimiento uniformemente acelerado están en razon directa de las respectivas aceleraciones, si tiramos dos bolitas desde la punta a lo largo de los dos planos, entonces cuando la bola A llegue al piso D, la bola B estará en C. Si consideramos un círculo en posición vertical (fig. 8), y una serie de canales desde F, tales como FD(que es el diámetro vertical) y FC, FG, FH, etc. vemos

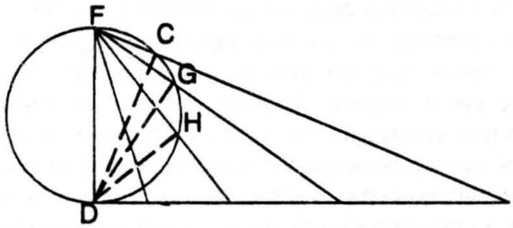


fig.8

que en razón de lo anteriormente expuesto y del Teorema de Tales,las bolas tiradas simultaneamente desde F, llegan también simultaneamente a D, C, G, etc. Como la figura puede ser invertida y el movimiento es totalmente reversible, las bolas que se tiraran desde C, G, H, etc. también gastarían el mismo tiempo para llegar a D. Podemos concluir que se gasta el mismo tiempo para caer a través del diámetro vertical de un círculo vertical que a través de cualquier cuerda que se dibuje desde cualquiera de los extremos del diámetro. Una serie de bolitas tiradas por los n canales que salen de un mismo punto simultaneamente, formarán siempre una esfera! (fig. 9)

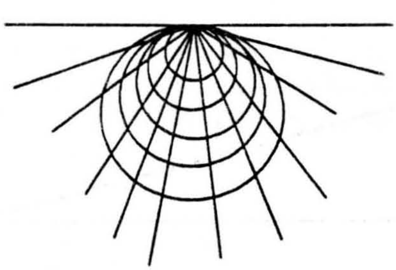


fig.9

4. APLICACION AL MOVIMIENTO DEL PENDULO.

Lo anterior puede ser aplicado - como lo hizo Huygens para hallar la forma de la ecuación que relaciona el período de un péndulo con su longitud.

El movimiento de la masa m de un péndulo (fig. 10) puede ser considerado como una sucesión de pequeñas caídas a través de una serie de planos inclinados.

Por otra parte el movimiento de un péndulo que va desde su máxima amplitud hasta su punto más bajo puede aproximarse a la caída a lo largo de la cuerda que une los puntos inicial y final (fig. 11). Como hemos probado, el tiempo de este último movimiento es el mismo para cualquier cuerda que tenga un extremo en el punto más bajo del círculo. De aquí se puede concluir que para pequeñas oscilaciones el período de un péndulo debe ser independiente de la amplitud.

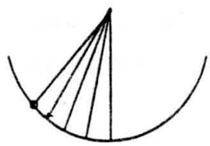


fig.10

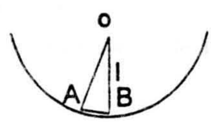


fig.11

Además, el tiempo de caída a lo largo del diámetro vertical de longitud 2l es $t = \sqrt{2 \times 2l/g} = 2\sqrt{l/g}$; este tiempo es el mismo en que la bola del péndulo bajaría (o subiría) por la cuerda en vez de por el arco, por lo tanto una aproximación del período del péndulo será: $T = 8\sqrt{l/g}$, ecuación que se aproxima bastante a la fórmula actual: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

BIBLIOGRAFIA

E. Mach. "Mechanics, a critical and historical account of its development."
A. Koyré. "Estudios de historia del pensamiento científico"