"MOMENTO" Revista Departamento de Física Universidad Nacional de Colombia, Número 6, Abril 1992.

LA ESTRUCTURA MATEMATICA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

Juan Manuel Tejeiro S
Depto. de Física, Universidad Nacional

Resumen: En este primer artículo examinaremos la descripción matemática formal de los postulados de la Teoría General de la Relatividad (TGR), como fué formulada en la década de los 60. Esta formulación abstracta, en contraste con la formulación usual de la TGR, permite obtener nuevos resultados, tales como la existencia de singularidades. En un proximo artículo será discutido el significado físico de los postulados.

Abstract: In this first paper we examine the formal mathematical description of the postulates for the General Theory of Relativity (GTR), like it was formulated in the sixties years. These abstract formulation -in contrast to the common one allows to obtain new results, like the existence of singularities. In a next paper we will discuss the physical meaning of such postulates.

INTRODUCCION

Un hecho significativo de la Teoría General de la Relatividad (TGR) que la sitúa aparte de las otras teorias físicas, es la idea que la gravitación se manifiesta en sí misma a través de la cũrvatura (geometría) del espacio-tiempo. Para el desarrollo de esta idea, Einstein fué guiado por la propiedad de permanencia del campo gravitacional, es decir que no existe forma de aislar una región del espacio-tiempo de la fuerza gravitacional, asi, argumentando que la gravedad es una propiedad tan intrínseca a una región como lo es el espacio-tiempo, y que ésta se manifiesta a través de las propiedades geométricas de la variedad. Estas ideas, plasmadas en dos postulados, el principio de relatividad general, el cual establece que las leyes de la física son independientes del estado de movimiento del observador, y el principio de equivalencia (la proporcionalidad entre la masa inercial y la gravitacional, sustentada por experimentos de muy alta precisión) condujeron a Einstein a formular las ecuaciones para el campo gravitacional, como ecuaciones para la métrica de la variedad espacio-tiempo en función de la distribución de materia[1].

Entre las más espectaculares predicciones de la TGR están la existencia de los huecos negros y el famoso teorema de singularidades de Penrose-Hawking[2], las cuales no fueron conocidas por Einstein. El porqué Einstein no conoció estos resultados lo podemos entender en el contexto de la formulación matématica rigurosa de la TGR dada en la década de los 60. El costo de una formulación matemática rigurosa de una teoría está en que su contenido físico se hace difícil de reconocer.

En el presente artículo pretendo discutir los postulados (de carácter estrictamente matemático) de la TGR como fué formulada en la década de los 60 y que permitío desarrollar nuevas áreas de investigación tanto en cosmología como en la teoría cuántica de los campos[3,4]. Es de anotar que esta formulación rigurosa de la TGR es completamente equivalente a la dada por Einstein en 1916, la diferencia radica en que el rigor matemático permite obtener resultados que de otra manera (ecuaciones de Einstein + argumentos físicos) difícilmente se podrían intuir.

En la primera parte del artículo daré los resultados matemáticos necesarios sobre variedades para efectos de formular, en la segunda parte, los tres postulados de la TGR. En la última parte discutiré brevemente uno de los resultados más espectaculares de la TGR, la existencia de singularidades y como caso particular los huecos negros[5]. El significado físico de estos postulados y su relación con las otras interacciones fundamentales de la naturaleza serán discutidos en un próximo artículo.

1 – LA VARIEDAD ESPACIO-TIEMPO

Para efectos de discutir la física sobre el espacio-tiempo no Minkowskiano es importante definir de una manera precisa el modelo matemático adecuado para describir el espacio-tiempo, i.e. la colección de todos los eventos caracterizados por el instante y la posición en la cual estos eventos ocurren, medidos con respecto a algún sistema de coordenadas (a un observador). Sinembargo, la formulación de las leyes que rigen la sucesión de estos eventos debe hacerse de una manera independiente de las coordenadas. Es el objetivo de esta sección dar las nociones matemáticas necesarias para formular las leyes de la física de una manera independiente del sistema de coordenadas[6].

Una C^r–variedad n-dimensional $\mathcal{M}$ es un espacio topológico de Hausdorff junto con un atlas $\{U_\alpha,\Phi_\alpha\}$ de clase C^r, i.e. una colección de cartas $(U_\alpha,\Phi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tales que

M–1 : Φ_α: $U_\alpha \subset \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo

M–2 : Los abiertos U_α cubren $\mathcal{M}$, esto es $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$

M–3 : Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \Phi$ entonces $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$: $\Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un C^r–difeomorfismo

Una carta (U_α,Φ_α) también se llama una vecindad coordenada y la propiedad M–3 establece que la transformación de coordenadas en la región donde dos cartas se interceptan debe ser una transformación r-veces diferenciable con inversa también r-veces diferenciable. Así, un punto $p\in\mathcal{M}$ usualmente se identifica por sus coordenadas $p\in U_\alpha \longleftrightarrow \Phi_\alpha(p) \equiv (x^1,\cdots,x^n)$. Dos atlas se llaman C^r–compatibles si la unión de los dos es de nuevo un C^r-atlas. La unión de todos los atlas C^r–compatibles definidos sobre una variedad forman un atlas maximal, i.e. el conjunto de todos los posibles sistemas coordenados que cubren $\mathcal{M}$.

Una función f: $\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama de clase C^k si la función $f\circ\Phi_\alpha^{-1}$: $\Phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^k. Llamemos $\Xi := \{f \mid f: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es de clase } C^k\}$. Dada una C^q–curva sobre $\mathcal{M}$, $\lambda(\cdot)$: $[a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$ de clase C^q, definimos el vector tangente $(\partial/\partial t)_\lambda|_{t_0}$ a la curva λ en el punto $p = \lambda(t_0)$ como un operador el cual transforma cada función de Ξ linealmente en un número real: $(\partial f/\partial t)_\lambda|_{t_0}$, la derivada direccional de f a lo largo de la curva λ. El conjunto de vectores tangente a un punto de la variedad $p \in \mathcal{M}$ forman un espacio vectorial n-dimensional, llamado el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$. El puede ser expandido en una base $\{E_\alpha\}$, i.e. si $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ entonces $\mathbf{X} = X^\alpha E_\alpha$ y los números reales X^α se llaman las componentes del vector $\mathbf{X}$ en la base $\{E_\alpha\}$. En particular si elegimos una base coordenada, es decir si $(x^1, \cdots, x^n)$ son las coordenadas del punto p entonces los vectores tangentes $(\partial/\partial x^1)_p, \cdots, (\partial/\partial x^n)_p$ forman tambien una base para el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$, llamada la base coordenada.

Una 1-forma $\mathbf{W}$ (vector covariante) en $p \in \mathcal{M}$ es una función lineal sobre $T_p\mathcal{M}$, i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}: T_p\mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{X} &\longmapsto \mathbf{W}(\mathbf{X}) := \langle \mathbf{W}, \mathbf{X} \rangle \end{aligned} \qquad 1\text{-}1$$

tal que

$$\langle \mathbf{W}, \alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y} \rangle = \alpha\langle \mathbf{W}, \mathbf{X} \rangle + \beta\langle \mathbf{W}, \mathbf{Y} \rangle, \quad \forall a,\beta \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \mathbf{X},\mathbf{Y} \in T_p\mathcal{M}.$$

Dada la base $\{E_\alpha\}$ de $T_p\mathcal{M}$ podemos definir de manera única un conjunto de n 1-formas $\{E^\alpha\}$, llamada la base dual del espacio vectorial dual a $T_p\mathcal{M}$ denotada por $T_p^*\mathcal{M}$. Asi la 1-forma $\mathbf{W} \in T_p^*\mathcal{M}$ la podemos escribir como $\mathbf{W} = W_\alpha E^\alpha$, y ademas se tiene que de la definición de la base dual $\langle \mathbf{W}, \mathbf{X} \rangle = W_\alpha X^\alpha$.

A partir de los espacios $T_p\mathcal{M}$ y $T_p^*\mathcal{M}$ se define un tensor T del tipo (r,s) en $p \in \mathcal{M}$ como una función multilineal sobre el espacio producto $T : \Pi_r^s := T_p^*\mathcal{M} \times \cdots \times T_p^*\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \times \cdots T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ (r factores $T_p^*\mathcal{M}$ y s factores $T_p\mathcal{M}$). El espacio de todos los tensores en p es llamado el producto tensorial

$$T_s^r(p) = T_p\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p^*\mathcal{M} \qquad 1\text{-}2$$

En particular $T_0^1(p) = T_p\mathcal{M}$ y $T_1^0(p) = T_p^*\mathcal{M}$. Elegida una base $\{E_\alpha\}$ de $T_p\mathcal{M}$ y su dual $\{E^\alpha\}$, cualquier tensor T del tipo (r,s) se puede escribir en la forma

$$T = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}{}_{\beta_1 \cdots \beta_s} E_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes E_{\alpha_r} \otimes E^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes E^{\beta_s} \qquad 1\text{-}6$$

con $T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}{}_{\beta_1 \cdots \beta_s}$ las componentes de T en esta base. Un resultado útil y el cual es el punto de partida en muchos textos[7] para definir el concepto de tensor es la ley de transformación de las componentes de un tensor cuando se cambia de base. Sean $\{E_{\alpha'}\}$ y $\{E^{\alpha'}\}$ otras bases duales de $T_p\mathcal{M}$ y $T_p^*\mathcal{M}$ respectivamente, entonces $E_{\alpha'} = \Phi_{\alpha'}{}^\alpha E_\alpha$ y $E^{\alpha'} = \Phi^{\alpha'}{}_\alpha E^\alpha$ con las Φ matrices nxn no singulares tales que $\Phi^{\alpha'}{}_\alpha \Phi_{\beta'}{}^\alpha = \delta^{\alpha'}{}_{\beta'}$, entonces

$$T^{\alpha'_1 \cdots \alpha'_r}{}_{\beta'_1 \cdots \beta'_s} = \Phi^{\alpha'_1}{}_{\alpha_1} \cdots \Phi^{\alpha'_r}{}_{\alpha_r} \Phi_{\beta'_1}{}^{\beta_1} \cdots \Phi_{\beta'_s}{}^{\beta_s} T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}{}_{\beta_1 \cdots \beta_s} \qquad 1\text{-}3$$

Para establecer las ecuaciones de campo de la física sobre una variedad arbitraria $\mathcal{M}$, necesitamos generalizar el concepto de derivada parcial sobre $\mathbb{R}^n$. Para este fin es necesario introducir una estructura adicional sobre la variedad. Definamos una conección afín ∇ en un punto $p \in \mathcal{M}$, asignando a cada campo vectorial **X** en p un operador diferencial $\nabla_{\mathbf{X}}$ el cual transforma un C^r–campo vectorial **Y** en otro campo vectorial $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$, el cual satisface:

C–i: $\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + g\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}$, $\forall f,g \in \Xi$, y $\forall \mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}$ campos vectoriales
C–ii: $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ es lineal en **Y**
C–iii: $\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = \mathbf{X}(f)\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$, $\forall f \in \Xi$

Entonces, al campo vectorial $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ se le llama la derivada covariante con respecto a ∇ del campo **Y** en la dirección de **X**. De C–i podemos definir $\nabla\mathbf{Y}$, la derivada covariante de Y, como un campo tensorial del tipo (1,1) el cual, cuando se contrae con **X** produce el vector $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$, así la propiedad C–iii se puede escribir en la forma $\nabla(f\mathbf{Y}) = df \otimes \mathbf{Y} + f\nabla\mathbf{Y}$. Dada una base $\{\mathbf{E}_\alpha\}$ y su dual $\{\mathbf{E}^\alpha\}$ las conecciones se pueden determinar en una vecindad $U \subset \mathcal{M}$ a partir de las n^3 funciones $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ definidas por

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} := \langle \mathbf{E}^\alpha, \nabla_{\mathbf{E}_\beta}\mathbf{E}_\gamma \rangle \iff \nabla\mathbf{E}_\gamma = \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\,\mathbf{E}^\beta \otimes \mathbf{E}_\alpha \qquad 1\text{-}4$$

Entonces las componentes de la derivada covariante ∇T de un campo tensorial $T \in T^r_s$, denotadas por $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_s;\gamma}$, en una base coordenada están dadas por

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_s;\gamma} = \partial T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_s}/\partial x^\gamma + \Gamma^{\alpha_1}{}_{\gamma\tau}T^{\tau\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_s} + \cdots + \cdots - \Gamma^{\tau}{}_{\gamma\beta_s}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\tau} \qquad 1\text{-}5$$

Si T es un campo tensorial definido a lo largo de una curva $\lambda(t)$ podemos definir $DT/\partial t$ como la derivada covariante de T a lo largo de $\lambda(t)$ como $\nabla_{\partial/\partial t}\underline{T}$, en donde $\underline{T}$ es cualquier extensión de T en una vecindad de la curva. Esta definición es independiente de la extensión pues $\nabla_{\mathbf{X}}$ solo depende del campo **X** en cada punto. Tomando una base coordenada tenemos por ejemplo, para un campo vectorial **Y**

$$\frac{DY}{\partial t} = \frac{\partial Y^\alpha}{\partial t} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}Y^\gamma\frac{\partial x^\beta}{\partial t} \qquad 1\text{-}6$$

Un campo tensorial se llama transportado paralelamente a lo largo de una curva si $DT/\partial t = 0$. Un caso particular es obtenido considerando la derivada covariante del vector tangente a una curva, a lo largo de ella misma. Si se satisface que $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X} = D(\partial/\partial t)/\partial t|_\lambda$ entonces la curva λ se llama una geodésica. Para una tal curva es posible encontrar un parámetro, llamado afín, tal que si $x^\alpha(s)$ es la representación paramétrica (afín) de la curva λ en un sistema de coordenadas local, entonces la ecuación de la geodésica se puede escribir en la forma:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \qquad 1\text{-}7$$

El parámetro afín de una curva geodésica está determinado salvo un factor aditivo y uno multiplicativo constantes, i.e. salvo una transformación de la forma $s' = as + b$, con a y b constantes. La libertad de escoger b corresponde a la libertad de elegir un nuevo punto inicial $\lambda(0)$, mientras que a significa la libertad de normalizar el vector tangente **V** a la curva por un factor de escala constante $\mathbf{V}' = (1/a)\mathbf{V}$.

Si uno comienza en un punto dado $p \in \mathcal{M}$ y transporta paralelamente un vector **X** a lo largo de una curva cerrada regresando de nuevo al punto inicial, se obtendrá en general un nuevo vector **X**'en p. Si este mismo proceso se realiza a lo largo de otra curva obtendremos otro vector diferente a **X** y **X**.' Esta no integrabilidad del transporte paralelo corresponde al hecho de que las derivadas covariantes no conmutan en general. El tensor curvatura de Riemann **R** da una medida de esta no conmutatividad. Dados los campos vectoriales **X**, **Y** y **Z** definimos el campo vectorial $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}$ con respecto a la conección ∇ por:

$$\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z} := \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) - \nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z} \qquad 1\text{-}8$$

Entonces $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}$ es lineal en **X**, **Y** y **Z** y es ademas un campo tensorial del tipo (3,1), cuyas componentes en terminos de una base coordenada están dadas por la ecuación:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \partial\Gamma^{\alpha}{}_{\delta\beta}/\partial x^{\gamma} - \partial\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}/\partial x^{\delta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\tau}\Gamma^{\tau}{}_{\delta\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\delta\tau}\Gamma^{\tau}{}_{\gamma\beta} \qquad 1\text{-}9$$

A partir de estas expresiones para el tensor de Riemann se puede verificar facilmente que este satisface las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} &= - R^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma} \\ R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} + R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} &= 0 \\ R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta;\tau]} &= 0 \end{aligned} \qquad 1\text{-}10$$

La última ecuación es conocida como la identidad de Bianchi. A partir del tensor de Riemann se puede definir un nuevo tensor, llamado el tensor de Ricci, del tipo (0,2) por contracción: $R_{\beta\gamma} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\gamma}$. Si, dada una conección sobre una variedad $\mathcal{M}$, se tiene que $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = 0$ en todos los puntos de $\mathcal{M}$ diremos que la conección es plana.

Definamos un tensor **g**, llamado el tensor métrico, en cada punto $p \in \mathcal{M}$, como un tensor simétrico del tipo (0,2) el cual asigna una magnitud $\left(|\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{X})|\right)^{1/2}$ a cada vector $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ y si $\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{X}) \neq 0$ y $\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) \neq 0$ asigna el "coseno del ángulo" entre cualquier par de vectores $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in T_p\mathcal{M}$ por $\cos(\mathbf{XY}) := \mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Y})/(|\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{X})\,\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Y})|)^{1/2}$. Dos vectores $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in T_p\mathcal{M}$ se llaman ortogonales si $\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = 0$. Dada una base $\{\mathbf{E}_\alpha\}$ y su dual $\{\mathbf{E}^\alpha\}$ tenemos que $\mathbf{g} = g_{\alpha\beta}\, \mathbf{E}^{\alpha} \otimes \mathbf{E}^{\beta}$, con $g_{\alpha\beta}$ las componentes del tensor métrico en esta base.

Las mgnitudes definidas en el espacio tangente por la métrica están relacionadas con aquellas sobre la variedad, a través del concepto de longitud de arco entre dos puntos $p = \lambda(a)$ y $q = \lambda(b)$ a lo largo de una curva $\lambda(t)$, con vector tangente $\partial/\partial t$, por

$$L = \int_a^b (|g(\partial/\partial t, \partial/\partial t)|)^{1/2} dt \qquad 1\text{-}11$$

La métrica se llama no degenerada si el determinante de la matriz de las componentes del tensor métrico en una base dada $g_{\mu\nu}$ es diferente de cero. En este caso podemos definir un único tensor del tipo (2,0) con componentes $g^{\mu\nu}$ en esta base por las ecuaciones $g^{\mu\nu}g_{\nu\tau} = \delta^{\mu}{}_{\tau}$. De aquí se sigue que $g^{\mu\nu}$ es no singular y podemos establecer un isomorfismo entre cualquier argumento covariante y cuaquier agumento contravariante por contracción de las correspondientes componentes del producto del tensor dado con los tensores $g_{\mu\nu}$ y $g^{\mu\nu}$, e.g.

$$g_{\alpha\beta}g^{\gamma\tau}T^{\alpha\mu\nu}{}_{\delta\gamma} = T_{\beta}{}^{\mu\nu}{}_{\delta\tau} \qquad 1\text{-}12$$

Esta operación es conocida por en nombre de "subir" y "bajar" indices. Así los tensores covariantes y contravariantes (o mixtos) serán vistos como diferentes representaciones del mismo objeto geométrico.

La signatura del tensor métrico **g** es la diferencia entre el número de valores propios positivos y el número de valor propios negativos de la matriz ($g_{\mu\nu}$) en un punto $p \in \mathcal{M}$. Ahora, si **g** es no degenerado y continuo la signatura de **g** es constante sobre $\mathcal{M}$. Una métrica es llamada positiva si su signatura es n (la dimensión de $\mathcal{M}$) y es solo este caso el cual se identifica con el concepto de espacio métrico en topología y a $\mathcal{M}$ se le llama una variedad Riemanniana. Una métrica de signatura 2-n se llama Lorentziana, y en este caso los vectores no nulos en $T_p\mathcal{M}$ pueden ser clasificados en tres grupos: $X \in T_p\mathcal{M}$ se llama como de tiempo, nulo (o como de luz), o como de espacio si **g(X,X)** es positivo, cero o negativo respectivamente. Esta clasificación es conocida como la estructura de conos de luz de la variedad Lorentziana y una característica importante es que ella es invariante bajo transformaciones conformes de la métrica, i.e. dos métricas **g** y **g**´se llaman conformes si existe una función diferenciable no nula Ω tal que $g' = \Omega^2 g$.

Hasta el presente el tensor métrico y la conección han sido introducidas como estructuras independientes, sinembargo dada una métrica **g** existe una única conección definida por la condición que la derivada covariante de **g** se anule, i.e., $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$, lo cual implica que el transporte paralelo de vectores preserva el producto escalar y la magnitud de los vectores definidos en términos de **g**. En este caso podemos escribir las componentes de la conección en una base coordenada como

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left\{\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^{\gamma} + \partial g_{\alpha\gamma}/\partial x^{\beta} - \partial g_{\beta\gamma}/\partial x^{\alpha}\right\} \qquad 1\text{-}13$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\tau}\Gamma^{\tau}{}_{\beta\gamma}$$

llamados tambien los simbolos de Christoffel. El tensor de Riemann de las conecciones definidas por la métrica tiene adicionalmente las siguientes propiedades de simetría:

$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$ y $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$. Ademas el tensor de Ricci es simétrico, i.e., $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$, y podemos definir el escalar curvatura por contracción del tensor de Ricci: $R := R^{\alpha}{}_{\alpha}$.

2 – LOS POSTULADOS DE LA RELATIVIDAD GENERAL

El modelo matemático que adoptaremos para el espacio-tiempo es el par $(\mathcal{M},\mathbf{g})$ donde $\mathcal{M}$ es una C^{∞}-variedad de Hausdorff conectada y $\mathbf{g}$ es una métrica de Lorentz sobre $\mathcal{M}$[6].

El contenido de materia del universo está determinado por los diferentes campos de materia definidos sobre la variedad $\mathcal{M}$, tales como el campo electromagnético, el campo de neutrinos etc. Estos campos obedecen ecuaciones, las cuales pueden ser expresadas como relaciones entre tensores, en donde todas las derivadas respecto a las coordenadas son tomadas como derivadas covariantes con respecto a la conección simétrica definida con respecto a la métrica $\mathbf{g}$. La teoría así obtenida depende entonces de los campos de materia que uno incorpore al modelo. En lo sucesivo denotaremos por $\Psi_{(i)}{}^{\alpha\cdots\beta}$ los campos de materia identificados por el índice i. Los dos postulados siguientes sobre la naturaleza de las ecuaciones que obedecen los diferentes campos son comunes tanto a la TER como a la TGR[2].

1^er^ Postulado: Causalidad local.
Sea $p \in \mathcal{M}$, con U una vecindad convexa de p, tal que toda curva nula o como de tiempo que pasa a través de p intercepta la hipersuperficie como de espacio $x^0 = 0$ (el índice 0 se reserva para la coordenada temporal) dentro de U. Sea Σ el conjunto de puntos de la hipersuperficie $x^0 = 0$ los cuales pueden ser unidos por curvas nulas o como de tiempo en U con el punto p. Entonces los valores de los campos de materia en p deben estar univocamente determinados por los valores del campo y sus derivadas hasta un orden finito sobre Σ.

2º Postulado: Conservación local de la energía y el momentun.
Las ecuaciones que gobiernan los campos de materia son tales que existe un tensor simétrico $T^{\mu\nu}$, llamado el tensor momentun-energía, el cual depende de los campos, de sus derivadas covariantes y del tensor métrico, y satisface las siguientes propiedades:
i) $T^{\mu\nu}$ se anula sobre un subconjunto abierto $U \subset \mathcal{M}$ si y solo si todos los campos de materia se anulan sobre $\mathcal{M}$.
ii) El tensor momentun-energía obedece la ecuación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$

La primera condición expresa el principio de que todos los campos poseen energía, excluyendo la posibilidad de la existencia de energía negativa y la segunda expresa la conservación local de la energía y el momentun, pero ellas no nos dicen como construir el tensor $T_{\mu\nu}$ para un conjunto de campos dados, o si este es único. Pero en la práctica tenemos una manera única de construirlo si las ecuaciones de los campos de materia se pueden derivar a partir de una densidad lagrangianas. En este caso la ecuación de campo se obtiene a partir del principio de mínima acción, el cual establece que la acción para los campos de materia, la cual está dada por

$$S_M := \int \mathcal{L}\left(\Psi_{(i)}, \Psi_{(i);\mu}, \cdots\right) d^n x, \qquad 2\text{-}2$$

es estacionaria bajo variaciones de los campos en el interior de una región compacta $\mathfrak{D}$. El tensor momentun-energía se obtiene entonces a partir de la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$, considerando el cambio en la acción inducido por un cambio en la métrica[4]:

$$T_{\mu\nu}(x) := \frac{2}{|\det(\mathbf{g})|} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \qquad 2\text{-}3$$

Hasta el momento la métrica **g** no ha sido especificada. En la TER, la cual no incluye los efectos gravitacionales, la métrica se asume Minkowskiana, i.e. signatura Lorentziana y curvatura global nula. Se podría pensar que el campo gravitacional puede ser incluido manteniendo la métrica plana e introduciendo un campo de materia extra. Sinembargo los experimentos han mostrado que los rayos de luz son deflectados cuando pasan cerca de una masa gravitacional, y asi, puesto que ellos siguen geodésicas nulas, muestra que la métrica del espacio-tiempo no puede ser plana. Entonces adoptando la idea de que la gravitación está representada por la métrica misma del espacio-tiempo, el problema que se plantea es el de encontrar las ecuaciones de campo que relacionan la métrica con la distribución de materia. Guiados por el principio de correspondencia, el cual establece que en el caso de campo gravitacional débil, las ecuaciones de campo deben reducirce a las ecuaciones de Newton, y teniendo en cuenta los postulados 1 y 2, podemos establecer como nuestro

3er Postulado: la ecuación de campo. La ecuación de campo que gobierna los efectos gravitacionales, llamada la ecuación de campo de Einstein (ECE), está dada por:

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\right) = -8\pi G T_{\mu\nu} \qquad 2\text{-}4$$

la cual puede ser deducida a partir de un principio de mínima acción[4], en donde

$$S = \int_{\mathfrak{D}} \frac{1}{16\pi G}\left(R - 2\Lambda\right)\sqrt{|g|}\, d^n x + S_M = S_G + S_M \qquad 2\text{-}5$$

es la acción total, con G es la constante de gravitación de Newton, Λ la constante cosmológica y S_M es la acción para los otros campos de materia, ecuación 2-2.

3- EL PROBLEMA DE LAS SINGULARIDADES

Está fuera del alcance de este artículo discutir los teoremas de singularidades, pues el tan solo definir el concepto de singularidad es un problema altamente no trivial, y que de hecho no ha sido resuelto de manera única, i.e. hay muchas formas de definir una singularidad y no se han dado pruebas completas de la equivalencia entre las diferentes definiciones. Aquí solo quiero discutir las hipótesis sobre las cuales los teoremas de singularidades de Penrose-Hawking están basados y como históricamente, a pesar de disponer de soluciones de las ECE que presentaban singularidades, no se reconoció su realidad física y matemática hasta que un formalismo más elaborado de la TGR fué desarrollado.

La primera solución exacta de las ECE fué encontrada por Schwarzschild (tan solo dos meses despues de que Einstein publicó sus ecuaciones) la cual describía la métrica de una distribución esférica de masa. Esta solución, escrita en coordenadas esféricas, presentaba dos puntos singulares, uno para $r = 0$ y otra para $r = r_S = 2MG/c^2$ (llamado el radio de Schwarzschild), donde M es la masa total de la ditribución, G la constante de gravitación de Newton y c la velocidad de la luz. Sinembargo, puesto que esta solución es válida solo para el exterior de la distribución de masa, las singularidades no eran relevantes, pues como el propio Schwarzschild mostró, el radio de una distribución estática de masa de energía total E debe ser mayor que $9/8r_S$. La observación en la década de los 20 de objetos celestes compactos (enanas blancas con $d{\sim}10^5 g/cm^3$) y los avances teóricos en mecánica estadística cuántica permitieron el desarrollo de la teoría de la evolución estelar. Chandrasekhar en 1930[9] fué el primero en encontrar una relación entre la masa y el radio para una configuración totalmente degenerada de un gas de fermiones (electrones) Si bien no había ningún argumento teórico para prevenir que una estrella enana blanca continuara el proceso de colapso, como lo mostraba el trabajo de Chandrasekhar[6], " . . . *Una estrella de gran masa no puede parar en una etapa de enana blanca y uno está llevado a especular sobre otras posibilidades*", fué Eddington quien evitó que los físicos teóricos continuaran especulando con estas ideas absurdas " . . . *la estrella continua radiando y contrayendose hasta que, yo supongo, esta alcance un radio de unos pocos kilómetros cuando la gravedad sea lo suficientemente fuerte para evitar que la radiación salga y la estrella pueda por fin encontrar paz.*" Si Eddington se hubiera detenido en este punto el hubiera sido el primero en predecir los agujeros negros, sinembargo el no tomo esta conclusión en serio y continuo " *Yo me sentí llevado a una tal conclusión, que es prácticamente una reductio ad absurdum de la fórmula de degeneración relativista. Varios accidentes pueden intervenir para salvar a la estrella, pero yo quiero más protección que esto. Pienso que debe existir una ley de la naturaleza que le evite a la estrella comportarse de esta absurda manera.*" Posteriormente Landau[10] siguiendo un análisis similar al de Chandrasekhar, pero para un gas degenerado de neutrones, predijo la existencia de objetos, llamados estrellas neutrónicas, cuyas densidades eran 10^{10} veces mayores que la de las enanas blancas. Pero aún para este caso extremo el radio de Schwarzschild era menor que el radio de la distribución y por tanto no se presentaba en la métrica ninguna singularidad. Despues de un par de trabajos más sobre estrellas neutrónicas su interés declino y solo hasta finales de los años cincuenta con el descubrimiento de los pulsars fueron retomados los trabajos de Chandrasekhar y Landau. Adicionalmente el desarrollo de nuevas soluciones de las ECE, las cuales tambien presentaban singularidades, aún en auscencia de materia como el modelo de universo de TAUB-

NUT[11], condugeron a uno de los descubrimientos mas espectaculares de la física, los huecos negros, y a su vez más desconcertantes, pues en el marco de la TGR aparecen como inevitables, según el teorema de singularidades de Penrose-Hawking. En un próximo artículo se discutiran algunos aspectos los huecos negros en el marco de la teoría cuántica de campos.

BIBLIOGRAFIA

1 Landau, L. D., & Lifshitz, E. M.: *Teoría Clásica de los Campos;* Editorial Reverté 1966

2 Hawking, S. W & Ellis, G. F. R.: *The Large Scale Structure of Space-Time;* Cambridge University Press 1973

3 Chandrasekhar, S.: *The Mathematical Theory of Black Holes;* Oxford 1983

4 Birrel, N. D. & Davies, P. C. W.: *Quantum Field in Curved Space,* Cambridge 1986

5 Christensen, S.: *The Quantum Theory of Gravity;* Hilger, Bristol 1984

6 Straumann N.: *General Relativity and Relativistic Astrophysics;* Springer- Verlag 1984

7 Adler, R., Bazin, M. & Schiffer, M.: *Introduction to General Relativity,* 2nd ed., McGraw-Hill 1975

8 Itzykson, C. & Zuber, J. B.: *Quantum Field Theory:* McGraw-Hill 1980

9 Chandrasekhar, S.: *An Introduction to the Study of Stellar Structure,* University of Chicago Press 1939

10 Landau, L. D.: Phys. Z. Sowjetunion **1**,285 1932

11 Newman, E. T., Tamburino, L. & Unti, T. J.: Journ. Math. Phys. **4**,915 1963