UNA REVISION SOBRE LOS FUNDAMENTOS GENERALES, PRIMERO Y SEGUNDO PROBLEMAS DE LA CINEMATICA

CARLOS LOPEZ TASCON
Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
Santafé de Bogotá, D. C.
(Enero 1992)

RESUMEN

Entendiendo la CINEMATICA como la parte de la mecánica que desarrolla los elementos necesarios para la descripción del MOVIMIENTO, se introduce un postulado sobre la precisión en las mediciones como fundamento general y único de la cinemática, el cual subyace a todos los desarrollos matemáticos inherentes al estudio del movimiento de las partículas. La necesidad de una definición sobre el problema de la precisión de las mediciones se muestra a través de la discusión del primero y segundo problemas de la cinemática.

ABSTRACT

KINEMATICS is a part of mechanics that studies the elements by means of which it is possible to describe MOTION. It is assumed as based on a general postulate about the absolute accuracy of measurements, which should always be present on the mathematical developments required for the description of particle motion. The need of clarifying this problem about measurement is shown through the discussion of the first and second problems of kinematics.

INTRODUCCION

En reciente artículo[1] se hacía énfasis en la conveniencia de discutir y aclarar los conceptos elementales sobre los cuales se construye la teoría del movimiento, particularmente aquellos sobre los cuales se sentó todo el andamiaje de la mecánica newtoniana. **TIEMPO, ESPACIO** y **PARTICULA MATERIAL** constituyen los pilares fundamentales del mencionado andamiaje. En consecuencia, todas las propiedades que se deducen para el movimiento de los cuerpos están necesariamente ligadas a tales conceptos.

En el presente artículo se pretende continuar con el marco de definiciones fundamentales, pero teniendo en cuenta los aspectos cuantitativos del movimiento; nos referimos a nuevas definiciones inherentes al estudio de la **CINEMATICA**, la cual desarrolla los elementos mediante los cuales es posible describir cuantitativamente el movimiento de las partículas en el espacio en función del tiempo, sin entrar a discutir las causas que, o bien lo generan, o bien lo alteran.

Adicionalmente, y partiendo de la hipótesis de que el estudio del movimiento de los cuerpos materiales (*Sistemas de Partículas*) puede hacerse a partir de una descripción del movimiento de sus partes (se supone compuesto por Partículas Materiales), se entiende que la *Cinemática del Punto Material* deberá estar perfectamente establecida en la mecánica, si posteriormente se pretende, como de hecho se hace, extender los resultados obtenidos al estudio del movimiento de *Sistemas de Partículas*.

1.- UNIDADES Y PATRONES DE MEDIDA DE ESPACIO Y TIEMPO

Determinar valores cuantitativos se asocia necesariamente a la realización de **EXPERIMENTOS**, más exactamente, al proceso de **MEDIR**. Por su propia naturaleza, la **CINEMATICA** debe entonces entenderse con el problema de medición de Longitud y de Tiempo. A su vez, de acuerdo con lo establecido respecto del carácter arbitrario del origen del tiempo en un sistema de referencia, lo que realmente se requiere es relizar mediciones de *Intervalos de Tiempo entre Eventos* o situaciones físicas definidas.

El proceso de Medir implica la preexistencia de un **PATRON DE MEDICION** y de una **UNIDAD DE MEDIDA**, estando siempre el experimentador en libertad absoluta de escogencia en ambos casos. Sin embargo, y aceptando de hecho que los resultados que se obtengan requieren necesariamente ser *comunicables*, tanto el Patrón de Medición como la Unidad de Medida deben ser universalmente aceptados. Es esta exigencia la que ha llevado a la comunidad científica a acordar Patrones y Unidades de medición universales para las propiedades o "*dimensiones*" físicas fundamentales.

DEF.(1): EL PATRON DE LONGITUD *es la longitud de onda de la radiación emitida por el Kriptón 86 (Kr^{86}) entre los niveles atómicos* $2P_{10}$ *y* $5D_5$.

DEF.(2): EL METRO *es la Unidad de medición de Longitud, y corresponde a 1'650.763,73 veces la longitud del Patrón previamente establecido.*

DEF.(3) EL PATRON DE TIEMPO *(de Duración)* **es el** *periodo de la radiación que corresponde a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de Cesio 133 (^{133}Cs)*[2].

DEF.(4): EL SEGUNDO *es la Unidad de Medición de Tiempo, y corresponde a la Duración de 9.192'631.770 veces el Patrón establecido.*

Un *Día Solar Medio* corresponde aproximadamente a 86.400 segundos de los contemplados en la **DEF.(4)**. Vale la pena recordar, sin embargo, que hasta hace algunos años fué el *Día Solar Medio del año 1900* el patrón de tiempo comunmente acordado, como también el "segundo" correspondía a la 1\86400 el *Día Solar Medio*. El año de 1900 corresponde a su vez a 31'556.925,9747 segundos.

2.- MEDICION

Medir es comparar una magnitud física con el patrón correspondiente. De otra parte, en todo proceso de *Medición* existe una interacción entre el Sistema medido (observado) y el Instrumento de Medición (el cual incluye al Observador). Esta Interacción, dependiendo del instrumento empleado, dará una mayor o menor *Confiabilidad* al resultado obtenido, y generará durante el proceso una mayor o menor *alteración* del Sistema observado. Es claro que si la alteración del sistema es despreciable, una manera apropiada de mejorar la *Confiabilidad* del resultado experimental es mediante la repetición del proceso de medición en condiciones similares; las reglas de la *Estadística* nos permiten, no solamente dar un resultado final cuantitativo del proceso, sino, adicionalmente, obtener una medida de la confiabilidad del mismo a partir de la dispersión de los resultados de las mediciones individuales. En este caso se dice que tales mediciones, y por tanto los resultados, tienen **Independencia Estadística**, entendiendo por ello que las distintas mediciones son completamente independientes entre sí. Condiciones tales como, por ejemplo, el orden en que fueron realizadas, no afectan el resultado individual de cada una de ellas, ni tampoco el resultado medio final.

Cuando se realizan mediciones en física no es siempre posible eliminar completamente la *Alteración* del sistema observado, lo cual presenta complicaciones en diversas situaciones experimentales. *Así* por ejemplo, cuando es preciso relizar lo que podriamos llamar *Mediciones en Cadena* o *Sucesivas* de una misma magnitud física, si el requisito de Independencia Estadistica no se cumple por razón de la alteración que se genera en el sistema medido, será necesario cuantificar esta alteración, pues ella se manifiesta en una dependencia implícita entre una medición y las subsiguientes. Si esta alteración no es cuantificable, el resultado de la medición pierde cada vez más confiabilidad.

Otra situación relacionada con el problema de la medida se presenta cuando es preciso realizar determinaciones simultáneas de dos cantidades y la determinación de una de ellas requiere necesariamente realizar mediciones de la otra. Es el caso, por ejemplo, de medir *simultaneamente* la posición y la velocidad de una partícula; si al realizar la medición de la posición alteramos grandemente el sistema,

¿qué podemos decir acerca de la confiabilidad de la medición que simultaneamente estamos realizando de velocidad, la cual requiere de dos mediciones sucesivas de posición? La profundización sobre este tipo de problemas en lo que atañe a la *Simultaneidad y Precisión* de las mediciones fué lo que llevó al establecimiento de nuevas leyes de la naturaleza, de inmensa repercusión en la física de las partículas pequeñas, en donde los cambios en el estado del sistema que genera una medición son grandes e incontrolables. Tales leyes se conocen universalmente como **Relaciones de Incertidumbre**, y fueron establecidas por W. HEISEMBERG[3].

Ahora bien, en la *Mecánica de Cuerpos Macroscópicos*, la que se pretende describir, se parte de un supuesto implícito referente a la medición de cualesquiera magnitudes físicas. Se supone que siempre será posible eliminar la interacción entre el objeto y el observador, y por consiguiente también la limitación para la determinación simultanea de varias cantidades físicas. Se asume que, o bien dicha Perturbación no existe, o bien que es posible la realización de experimentos de control que permitan cuantificar dicha perturbación y excluirla, por tanto, del resultado del experimento. Por consiguiente, y ciertamente con validez restringida a los fenómenos explicados por la *Mecánica de Cuerpos Macroscópicos*, es posible establecer el siguiente **Postulado:**

> **POSTULADO GENERAL DE LA CINEMATICA:** *El Resultado de cualquier medición física será siempre tan exacto como se quiera; la interacción entre el instrumento de medida y el sistema observado puede siempre ser eliminada del valor experimental final.*

Afirmándonos en este postulado es posible siempre eliminar de la discusión problemas referentes al valor, grande o pequeño de las magnitudes medidas, o al problema de la determinación simultánea de varias de ellas. Así por ejemplo, no importa que tan cercanos en el tiempo se sucedan dos eventos, siempre será posible medir "exactamente" el correspondiente intervalo de tiempo transcurrido. En afirmaciones de este tipo es que se fundamenta el paso del *Cálculo Numérico*, inherente a todo el desarrollo de la Cinemática, al *Cálculo Diferencial (o Integral)*. Esto nos puede explicar también por qué es Newton quien se encuentra en los origenes de esta nueva disciplina matemática.

3.- CINEMATICA UNIDIMENSIONAL: VELOCIDAD Y TRAYECTORIA

Como su nombre lo indica, la *Cinemática Unidimensional* describe el movimiento de una partícula material, tal que la geometría de su trayectoria es una recta a lo largo de la cual se realizan todas las mediciones de posición ('Espacio') necesarias.

LEMA(2): Segundo Problema de la Cinemática: *Si para todo instante t' en un intervalo de tiempo, $t' \in (t_1, t_2)$, se conoce la velocidad de una partícula material, $V(t')$, entonces es siempre posible conocer la posición de la partícula, $X(t)$, para cualquier instante dado $t \in (t_1, t_2)$, si adicionalmente se conoce, una medida de la posición, $X(t_o)$, en un instante t_o conocido y perteneciente al intervalo, $t_o \in (t_1, t_2)$.*

DEMOSTRACION: Sea $V(t_o)$ el valor de la velocidad en el instante en que se realizó la medición de posición, $X(t_o)$, y sea t el instante en que se quiere conocer la posición de la partícula. t_o es conocido, t es un instante cualquiera; ambos cumplen con la condición de pertenencia al intervalo, $t_o \wedge t \in (t_1, t_2)$.

Considérese ahora el subintervalo $[t_o, t] \subseteq (t_1, t_2)$. Sea $n+1$ la dimensión de $[t_o, t]$ (equivalente al número de valores del tiempo en el subintervalo) en la suposición de que éste sea discreto. Se definen, entonces un conjunto de n intervalos de tiempo,

$$\Delta t_k = t_{k-1} - t_k \quad , k=1,2,...n$$

De acuerdo a la **DEF.(1)**, sea $\overline{V}_k$ la velocidad media en dicho subintervalo; por consiguiente,

$$X(t_k) - X(t_{k-1}) = \overline{V}_k\,(t_k - t_{k-1}) = \overline{V}_k \Delta t_k$$

Sumando a ambos lados sobre todos los valores de t_k en el subintervalo, se obtiene:

$$X(t_n) - X(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \overline{V}_k\,(t_k - t_{k-1}) \qquad \textbf{(3)}$$

A este punto, $\overline{V}_k$ no necesariamente coincide con alguno de los valores medidos de velocidad. En los puntos intermedios del subintervalo Δt_k no hay información alguna sobre el valor de la velocidad, luego la velocidad media puede tomarse, sin disminuir la precisión en el resultado, como el promedio de los valores correspondientes conocidos en t_{k-1} y t_k. En consecuencia, llevando esta aproximación a la **EC.(3)**, y recordando que $t_n \equiv t$, el extremo del intervalo, se obtiene para la posición de la partícula en dicho instante, $X(t)$:

$$X(t) = X(t_o) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} [V(t_k) + V(t_{k-1})](t_k - t_{k-1}) \qquad \textbf{(4)}$$

De acuerdo a lo ya establecido, la **Línea Recta** que caracteriza al movimiento la asociamos a una dirección arbitraria en el espacio euclidiano, sobre la cual fijamos arbitrariamente un origen, que bien puede corresponder a la posición de la partícula en el instante $t=0$, o en general en un instante conocido $t=t_0$. La Posición de la partícula en un instante cualquiera t la representaremos por $X(t)$. Ahora bien; conocida la posición de la partícula en dos instantes determinados del tiempo, se puede introducir la definición de **VELOCIDAD** como una medida del espacio (distancia) recorrido por unidad de tiempo; en forma más precisa, se tendrá:

DEF.(5): LA VELOCIDAD MEDIA *de una partícula material en un intervalo de tiempo* $\Delta t=t_2-t_1$, $t_2>t_1$, *los tiempos corresapondientes a dos mediciones sucesivas de posición, se define como el espacio recorrido por unidad de tiempo transcurrido; luego,*

$$\overline{V} = \frac{X(t_2) - X(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad (1)$$

La definición anterior no impone restricción alguna sobre el "tamaño" del intervalo de tiempo, $\Delta t=t_2-t_1$; ésto es, que puede ser tan grande o pequeño como se desee. Ello quiere decir que el resultado que se obtendría por diferentes experimentadores, que bién pudieran tomar el mismo tiempo inicial t_1, sería diferente si todos ellos no coinciden en el valor del tiempo final, t_2. No parece entonces conveniente, asociar el valor de la *Medida del Movimiento,* de la *Velocidad*, a dos valores diferentes de tiempo. En consecuencia, si garantizamos que, por ejemplo t_1 es el mismo para todos los experimentadores, una forma de asegurar que t_2 será también el mismo para ellos es hacer que el lapso transcurrido sea lo suficientemente pequeño como para que las diferencias en t_2 sean tan insignificantes que el resultado sea independiente de los experimentadores; dicho en otras palabras, como para que la medida de la velocidad la podamos asociar solamente al valor t_1. Ahora bien, de acuerdo al postulado general de la cinemática, el valor t_2 puede ser tan cercano a t_1 como se quiera y Δt $(=t_2-t_1)$ puede medirse con precisión absoluta; ésto nos permite introducir la definición de *Velocidad Instantánea* de la siguiente manera:

DEF.(6): La VELOCIDAD INSTANTANEA *de una partícula material en un momento dado t está dada por la relación,*

$$V(t) = \lim_{t'-t \to 0} \frac{X(t') - X(t)}{t'-t} \qquad (2)$$

La forma de la **EC.(2)** es seguramnte conocida por todos quienes hayan tomado un primer curso de cálculo; nos define "matemáticamente" la *Velocidad* de la partícula en el instante t como la derivada de la función $X(t)$. Y ello es siempre posible, al menos en teoría, pues dada la existencia de la partícula, necesariamente ésta debe encontrarse en algún lugar en un instante finito t. Luego, podemos suponer también que la *Función* $X(t)$ siempre existe, y es, en cuanto continua, necesariamente derivable, al menos por regiones.

Tal vez la afirmación que sigue parezca una "perogrullada", pero vale la pena correr el riesgo de expresarla; y es que asegurar que para toda partícula existe la función $X(t)$, ello no quiere decir que la misma se *Conozca*. Demostrar que existe es responsabilidad de las matemáticas; conocerla, es la tarea de la Física. Y conocerla implica necesarimente la realización de mediciones *sobre la partícula*, y el resultado de tales mediciones es necesariamente un conjunto *Discreto* de valores, y ello nos regresa necesariamente a la **EC.(1)**.

Las **EC.(1)** y **(2)** resuelven un primer problema de la Cinemática, asociado a la posibilidad de determinar la velocidad de una Partícula Material en un instante cualquiera de tiempo; puede decirse que, a lo largo de la discusión anterior, se ha demostrado el siguiente **LEMA:**

> **LEMA.(1): Primer Problema de la Cinemática:** *Si se conoce la posición de una Partícula Material, $X(t')$, para cualquier valor dado de tiempo $t'\in(t_1,t_2)$, (t_1,t_2) puede ser discreto o denso, entonces es siempre posible conocer el valor instántaneo de su velocidad, $V(t)$, esto es, la medida de su "Movimiento", para cualquier valor t contenido en el intervalo, $t\in(t_1,t_2)$.* □

No sobra nuevamente insisir en que la utilización de la <u>Derivada</u> constituye solamente una herramienta matemática para calcular la velocidad; la "Física" de la definición está contenida en la **EC.(1)**, y ésta representa un proceso de *Medición*. La **EC.(2)** puede ciertamente aceptarse como una "definición" de *Velocidad* en t' o en t, pero este valor, desde el punto de vista de la "Física", será siempre un valor medio en el subintervalo que tales instantes definen, (t',t).

Ahora bien; la pregunta que sigue hace referencia a la situación inversa; esto es, a la posibilidad de determinar la posición de la partícula en cualquier instante de tiempo en un determinado intervalo; más exactamente, a la posibilidad de reconstruir punto a punto su **TRAYECTORIA**, cuando para todo instante en dicho intervalo conocemos la velocidad de la partícula. Que ello es factible, es lo que nos propone el lema que sigue, el cual establecemos como Segundo Problema de la Cinemática:

La demostración puede concluirse atendiendo el caso de tener definida la velocidad por una función continua $V(t)$; en esta eventualidad, los intervalos (t_1,t_2) y el subintervalo $[t_o,t_1]$ son intervalos densos. En este caso, la partición del intervalo puede ser tan "*Fina*" que la velocidad media en cualquiera de los intervalos que dicha partición define, puede tomarse como el correspondiente valor en uno cualquiera de los extremos respectivos, t_{k-1} o t_k. Que la partición sea lo más *"fina"* posible equivale, adicionalmente, a subdividirla en un gran número de subintervalos, vale decir, $n\to\infty$; en consecuencia, bién a partir de la EC.(3) o (4), se obtiene el resultado para $X(t)$ en términos de la definición del operador *Integral de la función* $V(t)$:

$$X(t) = X(t_o) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [V(t_k)+V(t_{k-1})](t_k-t_{k-1})$$

Por cuanto en dicho límite, $V(t_{k-1}) \to V(t_k)$; $\sum \to \int$, y $\Delta t_k \to dt'$, se puede escribir el resultado en la forma equivalente,

$$X(t)=X(t_o)+\int_{t_o}^{t} V(t')dt' \qquad (5)$$

Ahora bien: las EC.(4) y (5) no imponen restricción alguna sobre el valor t, salvo el requerimento de que pertenezca al intervalo, $t\epsilon(t_1,t_2)$; en consecuencia, el proceso descrito puede repetirse para todos los elementos del intervalo, lo que nos permite, dado $X(t_o)$, reproducir la trayectoria de la partícula en un total de puntos equivalente al número de mediciones de velocidad con que se cuenta. Es lo que se quería demostrar.

□

4.- A MANERA DE CONCLUSION

Muy probablemente el lector se ha encontrado con el procedimiento aquí descrito para definir la velocidad media e instantánea de una partícula, y la obtención a partir de éstas de la correspondiente trayectoria, no tanto en sus cursos de física, lamentablemente, sino con seguridad en los cursos introductorios de cálculo diferencial, integral o numérico. Sin embargo, no ha sido el interés del anterior desarrollo procurar al lector un repaso de sus conocimientos en estas materias, aun cuando ello bien vale la pena hacerlo. El interés principal ha sido insistir en el aspecto fundamental que subyace a la utilización de las matemáticas en la descripción de los fenómenos físicos, en este caso particular, del movimiento de una partícula material. Por abstracta que sea la teoría que se desarrolle o adopte, ella no puede apartarse de la necesidad de realizar procesos de medición, y las condiciones y limitaciones de este proceso están necesariamente unidas al desarrollo matemático correspondiente que se utilice en la descripción de los fenómenos.

Por lo general, en los cursos introductorios de cálculo el estudiante se acostumbra a términos tales como "Integrales Definidas" e "Integrales indefinidas", identificando las primeras como aquellas que se realizan entre límites conocidos, algebraicos o numéricos, que determinan el "Valor Cuantitativo" de la Integración. Cuando no existen tales límites, en general se entiende que entre el "Integrando" y la "Integral" existe una relación de transformación operacional asociada al "Operador" comúnmente conocido con el símbolo $\int$. Siendo consistentes con el planteamiento que se ha venido sosteniendo, puede asegurarse que en la Mecánica, siempre se hace uso solamente de '*Integrales Definidas*'.La denominada "Constante de Integración", a la que nos han acostumbrado no pocos manuales de matemáticas cuando hablan sobre integrales indefinidas, no tiene en nuestro contexto otro sentido que el de una "Medición Experimental", y en consecuencia está siempre asociada a un valor numérico específico.

Un ejemplo doméstico puede aclararnos ese punto un poco más; pensemos en la ruta de un bus urbano. La "Ruta", en sí misma, no es otra cosa que la GEOMETRIA de una trayectoria, pero nada nos dice acerca de, por ejemplo, la hora a la que pasará *La Turquesa* (una de las tantas busetas de Don Tuta!) por el paradero de la Calle 10 con Avenida Caracas. Resolver este problema implica conocer la TRAYECTORIA correspondiente a *La Turquesa,* y ésta es necesariamente única. Ciertamente, si sabemos con exactitud la velocidad de la buseta en cada punto de la ruta, sus paraderos y el tiempo que en ellos se demora y la hora de salida de Usaquén, tenemos todo lo necesario para saber, no solamente a qué hora *La Turquesa* estará pasando por el sitio que nosotros ocupamos, sino adicionalmente en dónde se encuentra en el instante actual, o a qué hora llegará al final de su ruta para que su conductor rinda cuentas ante su estricto patrón. Todo este *Control,* sin embargo, no es posible si nos falta el dato de la *Hora* de Salida de *Usaquén,* esto es, el $X(t_o)$. Conviene notar, a manera de epílogo, que este ejemplo, aun cuando caricaturezco, es la base real de programación del transporte en cualquier sociedad, y bien conocida es, por ejemplo, la puntualidad de los trenes europeos, ...como también el peligro que implicaría el que no lo lo fueran!.

NOTAS

[1] Carlos LOPEZ Tascón: "Definiciones Básicas que Preceden al Estudio de la Cinémática, Momento, 5, 27 (1991)

[2]"ABC der Physik", Brockhaus Verlag, Leipzig, 1972, Vol.1, pp 847/848; Vol. 2, pp 1382/1383, y 1752.

[3]W. HEISEMBERG: :"The Physical Principles of the Quantum Theory", Dover Pub., N. Y., 1949.