

## MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA RELATIVISTA SIN CARGA EN UN CAMPO MAGNETICO

Roberto Martínez  
Depto de Física  
Universidad Nacional de Colombia

### RESUMEN:

Estudiamos el movimiento de una partícula relativista sin carga en un campo magnético para entender el problema de los neutrinos solares.

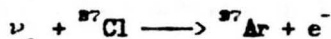
### ABSTRACT:

We study the motion of the relativistic particle without electric charge in magnetic field to understand the neutrino solar problem.

### INTRODUCCION.

En las reacciones termonucleares solares<sup>1</sup>, cuatro protones se convierten en un átomo de helio, dos positrones, dos neutrinos electrónicos y se liberan 26.7 MeV de energía. Conociendo la cantidad de energía luminica radiada por el sol y considerando que por cada 26.7 MeV de energía liberada se emiten dos neutrinos se puede determinar la cantidad de neutrinos radiados por este.

En Dakota del Sur, en la mina Homestake<sup>2</sup>, se ha montado un experimento que permite medir la cantidad de neutrinos emitidos por el sol en la reacción descrita anteriormente. En dicho experimento se toman 615 toneladas de  $C_2Cl_4$  y los átomos de cloro pueden atrapar los neutrinos electrónicos provenientes del sol a través de una reacción  $\beta$  donde un neutrón del núcleo de cloro atrapa el neutrino convirtiéndose en argón y liberando un electrón



Contando la cantidad de argón producido en el año se puede conocer el número de neutrinos atrapados en el experimento, el cual debe coincidir con el número de neutrinos radiados por el sol provenientes de la reacción termonuclear descrita anteriormente.

Los resultados experimentales en la mina predicen que el flujo de neutrinos solares detectados es una tercera parte del flujo de neutrinos radiados.

Una posible explicación a esta discrepancia, la diferencia de neutrinos que se espera que sean radiados por el sol y los neutrinos que se miden en el experimento de la mina de Dakota del Sur, es suponer que el neutrino tiene momento magnético<sup>3</sup>, el cual interactúa con los intensos campos magnéticos del sol cambiando la helicidad de estos y cuando salen de los campos magnéticos solares, un porcentaje de ellos, los neutrinos rotados por el campo, no son vistos o atrapados por los átomos de cloro.

En el presente trabajo queremos ilustrar, como un ejercicio de mecánica cuántica relativista, como cambia la helicidad de una partícula neutra con momento magnético diferente de cero al interactuar con un campo magnético para entender el problema del flujo de los neutrinos solares.

### ECUACION DE MOVIMIENTO.

La ecuación de movimiento para una partícula libre de espín 1/2 con masa diferente de cero es

$$(i \hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (1)$$

donde  $\hbar = h/2\pi$  es la constante de Planck,  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac<sup>4</sup>, ver apéndice, y  $\psi$  es un vector de cuatro componentes las cuales representan los estados de energía positiva y energía negativa con espín arriba y espín abajo; a dichos estados se les conoce como partícula y antipartícula con espín arriba y espín abajo, respectivamente.

Si consideramos una partícula sin carga electromagnética de espín 1/2, el neutrino, interactuando dipolarmente con un campo magnético, la ecuación de movimiento se puede escribir como<sup>5</sup>

$$(i \hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi(\vec{x}, t) = -\frac{i}{2c} \mu \sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \psi(\vec{x}, t) \quad (2)$$

donde  $\mu$  es el momento dipolar magnético y  $\sigma^{\alpha\beta}$ ,  $F^{\alpha\beta}$  son tensores de segundo rango antisimétricos, ver apéndice.

Usando las matrices de Dirac, la ecuación de movimiento se puede escribir en forma hamiltoniana de la forma siguiente:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left[ -i \hbar c \alpha \cdot \nabla + \beta mc^2 - \frac{i}{2} \mu \beta \sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] \psi(\vec{x}, t) \\ = H \psi(\vec{x}, t) \quad (3)$$

donde  $\alpha_i = \gamma_0 \gamma_i$  y  $\beta = \gamma_0$ .

Si la partícula se mueve en la dirección  $x$  y el campo magnético está en dirección  $z$ , el hamiltoniano se puede expresar como:

$$H = \begin{pmatrix} mc^2 + \mu B & 0 & 0 & pc \\ 0 & mc^2 - \mu B & pc & 0 \\ 0 & pc & -(mc^2 + \mu B) & 0 \\ pc & 0 & 0 & -(mc^2 - \mu B) \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde  $m$  y  $p$  son la masa y el momento lineal de la partícula y  $B$  el campo magnético.

Para encontrar los estados estacionarios de energía positiva, debemos

resolver la ecuación de autovalores

$$\sum_j H_{ij} \psi_j(\vec{x}, t) = E_i \psi_i(\vec{x}, t) \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

la cual es equivalente al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} mc^2 + \mu B & pc \\ pc & -mc^2 + \mu B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} mc^2 - \mu B & pc \\ pc & -mc^2 - \mu B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

que determinan la relación entre el momento - energía para una partícula en interacción con un campo magnético B

$$P_1^2 c^2 = (E - \mu B)^2 - m^2 c^4 \quad , \quad P_2^2 c^2 = (E + \mu B)^2 - m^2 c^4 \quad (6)$$

como puede apreciarse de las expresiones anteriores la energía se ha modificado en un factor  $\pm \mu B$  el cual equivale a la energía de interacción de un momento dipolar magnético con el campo.

Resolviendo la ecuación de autovalores, las expresiones para los autoestados son:

$$\Psi_1 = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \Psi_2 = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

donde

$$\alpha = \frac{P_1 c}{E - \mu B + mc^2} \quad , \quad \beta = \frac{P_2 c}{E + \mu B + mc^2}$$

$$N_1 = \frac{1}{(1 + \alpha^2)^{1/2}} \quad , \quad N_2 = \frac{1}{(1 + \beta^2)^{1/2}}$$

Para encontrar los estados de energía negativa o las correspondientes antipartículas apliquemos el operador CP, conjugación de carga y paridad, ver apéndice,

$$\Psi_3 = N_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Psi_4 = -N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

El estado más general de energía positiva es una combinación lineal de  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$

$$\Psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(|a_1|^2 + |a_2|^2)^{1/2}} \{ a_1 \Psi_1 e^{i(p_1 \cdot x - Et)/\hbar} + a_2 \Psi_2 e^{i(p_2 \cdot x - Et)/\hbar} \} \quad (9)$$

En mecánica cuántica se define la helicidad como la proyección del espín en la dirección del momento

$$h = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ = \sigma_x$$

y como el operador helicidad no conmuta con el hamiltoniano

$$[H, h] = [\mu B \sigma_z, \sigma_x] \neq 0$$

la helicidad no es una constante de movimiento y, por tanto, ésta puede cambiar con el tiempo debido a la interacción con el campo magnético.

Queremos saber cuál es la probabilidad de que una partícula de helicidad  $\lambda$  en el origen de coordenadas cambie de helicidad,  $-\lambda$ , después de un tiempo  $t$  en la posición  $x = l$ ,  $P(l, t)$ .

La importancia de calcular esta probabilidad radica en que el experimento únicamente detecta neutrinos de helicidad  $\lambda$  y al producirse la interacción con los campos magnéticos, una fracción de los neutrinos será rotada a un estado de helicidad  $-\lambda$  la cual no puede ser vista por el experimento con  $C_2Cl_4$  y, por tanto, si la fracción de neutrinos detectados es un tercio de los neutrinos producidos, entonces

$$P(l, t) = 2/3 \quad (10)$$

La helicidad del estado (9) es

$$\lambda = \langle \Psi(x, t) | \sigma_x | \Psi(x, t) \rangle = \frac{2 a_1 a_2 N_1 N_2}{a_1^2 + a_2^2} [1 + \alpha \beta]$$

y el estado de helicidad  $-\lambda$  está definido por

$$\Psi_{-}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(|a_1|^2 + |a_2|^2)^{1/2}} \{ a_1 \Psi_1 e^{i(p_1 \cdot x - Et)/\hbar} - a_2 \Psi_2 e^{i(p_2 \cdot x - Et)/\hbar} \} \quad (11)$$

La probabilidad  $P(l, t)$  está dada por la siguiente expresión

$$P(l, t) = |\langle \Psi_{-}(l, t) | \Psi_{+}(0, 0) \rangle|^2 \\ = \left[ \frac{2|a_1 a_2|}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \text{sen}(\theta) \right]^2$$

donde  $\theta$  se puede escribir como

$$\theta = \frac{(p_2 - p_1)l}{2\hbar} = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2\hbar} \frac{l}{p_1 + p_2} \\ \approx \frac{K \mu B l}{\hbar c^2 m v} \\ \approx \frac{\mu B}{\hbar} \left( \frac{1}{v} \right)$$

Conociendo la discrepancia entre el flujo de neutrinos detectados en la mina y el flujo de neutrinos producidos en las reacciones termonucleares del sol, además, conociendo los campos magnéticos solares,  $B \approx 10^4$  Gauss<sup>6</sup>, y la distancia que viajan los neutrinos en los campos magnéticos,  $l \approx 10^{10}$  cm, podemos determinar el orden del momento magnético de los neutrinos, es decir,

$$\frac{2}{3} = \left[ \frac{2|a_1 a_2|}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \text{sen} \left\{ \frac{\mu B}{\hbar} \left( \frac{1}{v} \right) \right\} \right]^2 \quad (12)$$

Si suponemos que el número de neutrinos producidos en el sol con espín arriba y espín abajo de energía positiva son del mismo orden, entonces

$$a_1 = a_2 = 1/2$$

y el valor predicho para  $\mu$  es aproximadamente igual a

$$\mu \approx 10^{-10} \mu_B$$

donde  $\mu_B$  es el magnetón de Bohr.

#### CONCLUSIONES.

Usando la ecuación de Dirac para una partícula libre con masa diferente de cero e introduciendo la interacción dipolar magnética

como un término efectivo, se puede estudiar el movimiento relativista de ésta en un campo magnético para tratar de entender el problema del flujo de los neutrinos solares.

En principio este problema tiene solución si suponemos que el momento magnético del neutrino es diferente de cero; sin embargo, el valor predicho usando el método anterior es muy pequeño y es tarea de los físicos proponer modelos que permitan explicar por qué dicho momento magnético es prácticamente igual a cero.

Se han utilizado diferentes teorías que unifican las interacciones electromagnética, débil y fuerte para obtener un momento magnético del neutrino del orden predicho anteriormente.

El Modelo Estándar (ME) o el modelo electrodébil predice un valor del orden de  $10^{-19} \mu_B$  el cual es insuficiente para resolver este problema satisfactoriamente. El ME ha tenido gran alcance predictivo y hasta la fecha ha estado de acuerdo con todos los resultados experimentales, lo cual lleva a concluir que dicho modelo no es la teoría final de la naturaleza.

Por esta razón se han propuesto modelos con simetrías mayores como el modelo izquierdo-derecho<sup>7</sup> el cual contiene el ME y, además, se puede explicar la violación de la paridad de una manera natural. Este modelo predice un valor para el momento magnético del neutrino del orden de  $10^{-14} \mu_B$  el cual todavía sigue siendo demasiado pequeño.

Otros intentos se han llevado a cabo para construir momentos magnéticos del orden apropiado. El modelo  $SU(6)^8$ , propuesto por M. Lozada y R. Martínez, el cual unifica las tres interacciones descritas anteriormente, puede en principio predecir el valor correcto para  $\mu$ .

#### AGRADECIMIENTOS.

Agradecemos al CINEC de la Universidad Nacional y a COLCIENCIAS por el apoyo económico que nos han brindado.

#### APÉNDICE.

El conjunto de matrices de Dirac<sup>9</sup>,  $4 \times 4$ ,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

obedecen el álgebra de Clifford

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}$$

donde las  $\sigma^i$  son las matrices de Pauli y  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  es el tensor métrico.

El álgebra de Clifford garantiza que la ecuación de Dirac sea consistente con la relación de momento - energía relativista.

El tensor antisimétrico  $F_{\mu\nu}$  definido como

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

permite escribir las ecuaciones de Maxwell en el vacío en forma covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

donde  $\partial_\mu = (c^{-1}\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$  y  $A_\mu = (\phi, \vec{A})$  son cuadri-vectores bajo transformaciones de Lorentz.

El tensor de segundo rango antisimétrico  $\sigma^{\mu\nu}$  se define de la forma

$$\sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ -d_1 & 0 & \mu_3 & -\mu_2 \\ -d_2 & -\mu_3 & 0 & \mu_1 \\ -d_3 & \mu_2 & -\mu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

y la interacción dipolar se puede escribir covariantemente como

$$-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = \vec{d} \cdot \vec{E} + \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Los operadores de conjugación de carga y paridad que actúan sobre espinores están definidos, respectivamente, como

$$C = i\gamma_2\gamma_0 \quad P = \gamma_0$$

donde  $\gamma_0$  y  $\gamma_2$  son matrices de Dirac.

El operador C cambia el signo de la carga de la partícula, el operador P cambia de signo de las coordenadas espaciales de la partícula y el operador CP cambia partículas por antipartículas.

#### BIBLIOGRAFIA.

1. J.N. Bahcall, R.K. Ulrich, Rev. Mod. Phys. 60 (1988) 1  
M. E. Booth. Nuclear Physics Laboratory. Oxford University.  
ref:19/87
2. R. Davis, Jr., D. S. Harmer y K. C. Hoffman, Phys. Rev. Lett. 20

- (1988) 1025
3. M. Voloshin, M. Vysotakii y B. Okun, *Sov. J. Nucl. Phys.* **44** (1986) 546
  4. *Relativistic Quantum Mechanics*, J. Bjorken and S. Drell. McGraw Hill. 1964
  5. A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical theory of Fields and Particles*, Dover, New York, 1968
  6. G. Fiorentini y G. Mazzorani, *Phys. Lett.B* **253** (1991) 181
  7. R. Mohapatra y G. Senjanovic. *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 91
  8. M. Lozada. Tesis de Maestría. Universidad Nacional, Bogotá (1991)
  9. Ma. Carolina Spinel, *MOMENTO. Revista del Departamento de Física de la Universidad Nacional de Colombia* **3** (1990) 25