"MOMENTO" Revista Depto. Física Universidad Nacional de Colombia,Número 7, Octubre 1992.

ESTRUCTURA MATEMATICA DE LOS POSTULADOS DE EQUIVALENCIA Y RELATIVIDAD

Juan Manuel Tejeiro S
Depto. de Física, Universidad Nacional

Resumen: La formulación matemática abstracta de la Teoría General de la Relatividad (TGR), dada en la década de los sesenta, condujo a uno de los más interesantes descubrimientos de la física actual: los teoremas de Penrose-Hawking sobre singularidades del espacio-tiempo. En el presente artículo se discutirá el contenido físico de los postulados de la TGR.

Abstract: The abstract mathematical formulation of the General Theory of Relativity (GTR), gave in the sixties years, brought forth one of the more interesting issues in physics: the Penrose-Hawking's theorems on space-time singularities. In this paper will be discussed the physical meaning of the postulates for the GTR

INTRODUCCION

En un primer artículo [Tej 92] se formularon los postulados de la TGR sobre los cuales están basados los famosos teoremas de singularidades de Penrose y Hawking. Este artículo tiene como objeto principal discutir el significado físico de estos postulados y analizar algunas de sus consecuencias en el contexto de una formulación cuántica de la materia, en particular discutiremos el problema de definir los conceptos de vacío y partícula cuando la gravedad es tomada en cuenta.

Hasta el presente no se ha podido dar una formulación consistente de la teoría cuántica de la gravedad, pues todos los intentos han encontrado dificultades tanto de caracter matemático como de interpretación física del formalismo. A pesar de esto, es aún posible estudiar los efectos de la gravedad sobre los campos cuánticos de materia. Para este fin se considera el campo gravitacional como un campo clásico de materia descrito por las ecuaciones de campo de Einstein (ECE), mientras que los demás campos son cuantizados de la manera usual. Esta aproximación es conocida con el nombre de campos cuánticos sobre variedades curvas [Bir 86], cuya predicción más conocida es el efecto Hawking [Haw 73], i.e. contrario a lo que predice la TGR un hueco negro emite radiación.

En la primera parte del artículo se dará una rápida revisión de los conceptos básicos de Relatividad Especial, haciendo énfasis en la estructura de grupo de la variedad Minkowskiana. En la segunda parte se enunciarán los postulados de la TGR. El significado físico de estos postulados y sus consecuencias sobre la interpretación de los conceptos de vacío y partícula, cuando la fuerza de la gravedad está presente, serán discutidos en la última parte. Los fundamentos matemáticos básicos para enunciar los postulados de la TGR fueron discutidos en un artículo anterior [Tej 92], sin embargo, en el apéndice daremos unas definiciones matemáticas adicionales necesarias para la discusión de los postulados.

1- LA VARIEDAD ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

En 1905 Einstein propuso la teoría especial de la relatividad la cual revolucionó los conceptos de espacio y tiempo. Un aspecto importante de esta teoría es la unificación que ella hace de estos conceptos, reuniendolos en una simple entidad matemática llamada la variedad espacio-tiempo, la cual está caracterizada por una estructura de la forma

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad 1\text{-}1$$

que mide la "distancia" entre dos eventos físicos caracterizados por las coordenadas $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu$ y $x^\mu + dx^\mu$. La variedad espacio-tiempo dotada con esta métrica se conoce con el nombre de la variedad de Minkowski $(\mathcal{M}, \eta)$, en donde $\eta_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski definido por:

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1) \qquad 1\text{-}2$$

El grupo de Poincaré es el grupo de isometrías de la variedad de Minkowski, i.e. el conjunto de transformaciones de la forma

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\nu$$

con $\qquad 1\text{-}3$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\tau = \eta_{\sigma\tau}$$

las cuales dejan invariante el elemento de arco 1-1. Las transformaciones homogeneas (con $a^\mu = 0$) forman el llamado grupo de Lorentz, dentro de las cuales se pueden distinguir dos subgrupos de transformaciones: las rotaciones rígidas de los ejes espaciales y las llamadas "boost" de Lorentz que representan transformaciones entre sistemas de referencia inerciales con ejes paralelos. De aquí se sigue entonces que el grupo de Poincaré es un grupo de Lie no compacto con 10 generadores.

El principio de relatividad lo podemos formular diciendo que las leyes de la física son invariantes bajo el grupo de Poincaré. Este es un aspecto de fundamental importancia en la física, y en particular en la Teoría Cuantica de Campos (TCC) en donde los conceptos de partícula y vacío deben su existencia y significado al grupo de Poincaré. Mientras que es, en principio, directo escribir las ecuaciones de movimiento de las interacciones fundamentales, la electro-débil y la fuerte, en una forma covariante de Lorentz, nos encontramos con serios problemas cuando se considera la interacción gravitacional. Fué precisamente el análisis de estas dificultades las que llevaron a Einstein a formular la Teoría General de la Relatividad (TGR).

2- POSTULADOS DE LA TEORIA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

Los postulados de la TGR fueron enunciados en un artículo anterior [Tej 92], sin embargo para efectos de hacer el presente artículo autocontenido los repetiremos en esta sección.

El modelo matemático que adoptaremos para el espacio-tiempo es el par $(\mathcal{M},\mathbf{g})$ donde $\mathcal{M}$ es una C^∞-variedad de Hausdorff conectada y $\mathbf{g}$ es una métrica de Lorentz sobre $\mathcal{M}$ [Str 84]

Los dos primeros postulados, que describen la naturaleza de las ecuaciones que obedecen los diferentes campos de materia, son comunes tanto a la TER como a la TGR [Haw 73].

1er Postulado: Causalidad local.
Sea $p \in \mathcal{M}$, con U una vecindad convexa de p, tal que toda curva no como de espacio que pasa a través de p intercepta la hipersuperficie como de espacio $x^0 = 0$ (el índice 0 se reserva para la coordenada temporal) dentro de U. Sea Σ el conjunto de puntos de la hipersuperficie $x^0 = 0$ los cuales pueden ser unidos por curvas no como de espacio en U con el punto p. Entonces los valores de los campos de materia en p deben estar univocamente determinados por los valores del campo y sus derivadas hasta un orden finito sobre Σ.

2º Postulado: Conservación local de la energía y el momentun.
Las ecuaciones que gobiernan los campos de materia son tales que existe un tensor simétrico $T^{\mu\nu}$, llamado el tensor momentun-energía, el cual depende de los campos, de sus derivadas covariantes y del tensor métrico, y satisface las siguientes propiedades:
i) $T^{\mu\nu}$ se anula sobre un subconjunto abierto $U \subset \mathcal{M}$ si y solo si todos los campos de materia se anulan sobre $\mathcal{M}$.
ii) El tensor momentun-energía obedece la ecuación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$

La primera condición expresa el principio que todos los campos poseen energía, excluyendo la posibilidad de la existencia de energía negativa y la segunda expresa la conservación local de la energía y el momentun, pero ellas no nos dicen como construir el tensor $T_{\mu\nu}$ para un conjunto de campos dados, o si este es único. Pero en la práctica tenemos una manera única de construirlo si las ecuaciones de los campos de materia se pueden derivar a partir de una densidad lagrangiana [Itz 80]. En este caso la ecuación de campo se obtiene a partir del principio de mínima acción, el cual establece que la acción para los campos de materia, la cual está dada por

$$S_M := \int \mathcal{L}\left(\Psi_{(i)}, \Psi_{(i);\mu}, \cdots\right) d^n x, \qquad 2\text{-}1$$

es estacionaria bajo variaciones de los campos en el interior de una región compacta $\mathfrak{D}$. En lo sucesivo $\Psi_{(i)}{}^{a \cdots s}$ denota los diferentes campos de materia (identificados por el índice i) que uno incorpore en el modelo. El tensor momentun-energía se obtiene entonces a partir de la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$, considerando el cambio en la acción inducido por un cambio en la métrica [Bir 86]:

$$T_{\mu\nu}(x) := \frac{2}{|\det(\mathbf{g})|} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \qquad 2\text{-}2$$

Hasta el momento la métrica $\mathbf{g}$ no ha sido especificada. En la TER, la cual no incluye los efectos gravitacionales, la métrica se asume Minkowskiana, i.e. signatura Lorentziana y curvatura global nula. Se podría pensar que el campo gravitacional puede ser incluido manteniendo la métrica plana e introduciendo un campo de materia extra. Sinembargo los experimentos han mostrado que los rayos de luz son deflectados cuando pasan cerca de una masa gravitacional, y asi, puesto que ellos siguen geodésicas nulas, muestra que la métrica del espacio-tiempo no puede ser plana. Entonces adoptando la idea de que la gravitación está representada por la métrica misma del espacio-tiempo, el problema que se plantea es el de encontrar las ecuaciones de campo que relacionan la métrica con la distribución de materia. Guiados por el principio de correspondencia, el cual establece que en el caso de campo gravitacional débil, las ecuaciones de campo deben reducirce a las ecuaciones de Newton, y teniendo en cuenta los postulados 1 y 2, podemos enunciar el tercer postulado:

3^er^ Postulado: la ecuación de campo. La ecuación de campo que gobierna los efectos gravitacionales, llamada la ecuación de campo de Einstein (ECE), está dada por:

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\right) = -8\pi GT_{\mu\nu} \qquad 2\text{-}3$$

la cual puede ser deducida a partir de un principio de mínima acción [Bir 86], en donde

$$S = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{16\pi G}\left(R - 2\Lambda\right)\sqrt{|g|}\,d^n x + S_M = S_G + S_M \qquad 2\text{-}4$$

es la acción total, con G es la constante de gravitación de Newton, Λ la constante cosmológica y S_M es la acción para los otros campos de materia, ecuación 2-1.

3- EL CONTENIDO FISÍCO DE LOS POSTULADOS

El primer postulado se puede resumir como el problema de Cauchy para los campos de materia, i.e., bajo que condiciones las ecuaciones de campo para la materia poseen una única solución. Sinembargo, en este postulado la métrica **g** (esto es, el campo gravitacional) es tratado a un nivel diferente de los otros campos de materia definidos sobre $\mathcal{M}$ y le da a este un caracter geométrico especial.

En este punto se plantean dos problemas: El primero concierne con la estructura causal misma del campo gravitacional, esto es si el tambien obedece una relación de causalidad como lo exige el primer postulado para los otros campos de matería, y el segundo problema que surge es en que medida los elementos de la teoría de la gravedad son objetos fisicamente observables, esto es, si por medidas locales se puede determinar de manera única (tal vez salvo factores de escala) la métrica.

El primer problema planteado ha sido objeto de estudio (Choquet–Brulah y Geroh [Ger 69])) y de hecho se ha podido demostrar que las ecuaciones de campo de Einstein, junto con las ecuaciones para los campos de materia, son suficientes para determinar la evolución del espacio-tiempo, dadas ciertas condiciones iniciales convenientes, y ademas que ellas tambien satisfacen el postulado de causalidad. Aquí solo quiero resaltar sobre este primer problema dos diferencias importantes del campo gravitacional con respecto a los otros campos de materia: 1º Las ECE son no lineales, aún en ausencia de campos de materia, esto es, el campo gravitacional es fuente de si mismo. 2º Puesto que la métrica define la estructura misma del espacio-tiempo, uno no conoce a priori, cual es el dominio de dependencia de los valores iniciales y cual es la región sobre la cual la solución ha de ser determinada.

Si $\{x^a\}$ son coordenadas normales en una vecindad normal U de $p \in \mathcal{M}$, no es dificil probar [Haw 73] que los puntos de $\mathcal{M}$ que pueden ser alcanzados a partir de p por curvas no como de espacio en U son aquellos cuyas coordenadas satisfacen (que corresponde a la región de U causalmente conectada con p)

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 \leq 0 \qquad 3\text{-}1$$

La frontera de estos puntos es formada por la imagen del cono nulo de p bajo la transformación exp, que corresponde al conjunto de todas las geodésicas nulas que pasan por p. Así, observando que puntos de la región U pueden comunicarse causalmente con p, se puede determinar el cono nulo N_p en T_p. Veamos entonces que si conocemos N_p podemos determinar la métrica, salvo un factor conforme. Sean **X** y **Y** $\in T_p$ vectores como de tiempo y como de espacio respectivamente. La ecuación $\mathbf{g}(\mathbf{X} + \lambda\mathbf{Y}, \mathbf{X} + \lambda\mathbf{Y}) = 0$ posee dos raices reales λ_1 y λ_2, pues el discriminante de la forma cuadrática es positivo, i.e., $4\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Y})^2 - 4\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{X})\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) > 0$. Tomando el producto de las raices obtenemos $\lambda_1\lambda_2 = \mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{X})/\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Y})$, esto significa que si conocemos N_p podemos determinar la razón de las magnitudes de un vector como de tiempo a uno como de espacio. Ahora consideremos dos vectores no nulos cualesquiera **W** y **Z** $\in T_p$. De la identidad

$$\mathbf{g}(\mathbf{W},\mathbf{Z}) = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{g}(\mathbf{W} + \mathbf{Z}, \mathbf{W} + \mathbf{Z}) - \mathbf{g}(\mathbf{W},\mathbf{W}) - \mathbf{g}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})\right] \qquad 3\text{-}2$$

podemos comparar cada una de las magnitudes del lado derecho de esta ecuación con las magnitudes de **X** o de **Y**, y así podemos encontrar la relación $\mathbf{g}(\mathbf{W},\mathbf{Z})/\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{X})$. Por tanto el postulado de causalidad local nos permite medir la métrica salvo un factor conforme (i.e. un factor de escala que depende, en general, del punto sobre la variedad). En la práctica estas medidas son realizadas utilizando señales de luz, pues ellas viajan sobre geodésicas nulas (i.e. la constancia de la velocidad de la luz en el vacío). El factor conforme es determinado por el segundo postulado, pues la ecuación de continuidad $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ no es invariante bajo transformaciones conformes, es decir esta ecuación no se cumple para una métrica $\tilde{\mathbf{g}}$ relacionada con la métrica original por una transformación de la forma $\tilde{\mathbf{g}} = \Omega(x)\mathbf{g}$. Esto significa que el conocimiento del tensor momentum-energía $T_{\mu\nu}$ determina el factor conforme y de esta forma la estructura del espacio-tiempo, es decir, el campo gravitacional.

Esta ecuación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ de conservación local de la energía y el momentun se puede poner en una forma más familiar relacionando las simetrias de la variedad con las leyes de conservación, i.e. a través del Teorema de Noether. Si la métrica admite un campo vectorial de Killing **K**, esta ecuación puede ser integrada para dar una ecuación de conservación global [DeW 75]. Sea $p^{\mu} := T^{\mu\nu}K_{\nu}$, entonces aplicando el teorema de Gauss, con $\mathfrak{D}$ una región compacta con frontera $\partial\mathfrak{D}$

$$\int_{\partial\mathfrak{D}} p^{\mu}d\sigma_{\mu} = \int_{\mathfrak{D}} p^{\mu}{}_{;\mu}d^{n}x = 0 \qquad 3\text{-}3$$

Esta ecuación se puede interpretar fisicamente diciendo que el flujo total sobre una superficie cerrada de la componente **K** del tensor momentun-energía es cero.

El tercer postulado establece la "ecuación de movimiento" para el campo gravitacional. Estas ecuaciones escritas en la forma 2-3 se pueden interpretar diciendo que todas las formas de materia son la fuente del campo gravitacional. Esta forma de escribir las ecuaciones de campo sitúa al campo gravitacional a un nivel diferente de los otros campos de materia como ya fué discutido en el análisis del segundo postulado. Sin embargo la formulación de las ECE a partir de un principio de mínima acción, ecuación 2-4, recupera de alguna manera la descripción unificada y sitúa a la gravedad al mismo nivel de las otras tres interacciones fundamentales de la naturaleza, abriendo la posibilidad de dar una descripción cuántica unificada de todas las formas de materia, incluida la gravitación. Esta descripción unificada vá un poco más allá, pues al igual que en el modelo estandar de las partículas elementales [Moh 86], en donde las interacciones se describen a través de un formalismo gauge, el campo gravitacional también se puede obtener a partir de un principio de invarianza gauge.

Pero, cuál ha sido la dificultad de formular una teoría cuántica de la gravedad, a pesar de disponer formalmente de una estructura matemática similar, como lo expresa la ecuación 2-4?. Del formalismo de segunda cuantización (o de otros formalimos equivalentes como las C-Algebras, integrales de camino de Feynman etc [Fri 72].) sabemos como cuantizar una teoría a partir de una densidad Lagrangiana (el integrando de la ecuación 2-4), sin embargo todos los intentos para cuantizar el campo gravitacional se han encontrado con una serie de dificultades, hasta hoy en día insuperables, tanto de carácter matemático como de interpretación [Bir 86]. Entre las dificultades de carácter matemático está el problema de la no renormalizabilidad perturbativa de la gravedad cuántica [Tej 89]. 'tHooft [tHo 73] a comienzos de los 70 probó que toda teoría gauge es perturbativamente renormalizable, pero este resultado no es aplicable al caso del campo gravitacional pues el grupo de simetrías gauge de la gravedad, a diferencia de los grupos gauge de las otras interacciones, es no compacto. La interpretación física de esta sutil, pero aparentemente fundamental, diferencia matemática no es clara, pero dos hechos importantes que situan a la gravedad aparte de las otras interacciones, y sobre las cuales se basa en gran parte la interpretación física de las teorias de campo sobre el espacio de Minkowski (i.e. en ausencia de la gravedad) nos dan una idea del tipo de problemas con que nos tropezamos al intentar generalizar los esquemas cuánticos al campo gravitacional. En primer lugar los campos de materia son funciones definidas sobre la variedad espacio-tiempo, cuya ecuación de movimiento describe su evolución sobre esta variedad, a diferencia del campo gravitacional cuyo campo son los mismos coeficientes métricos que determinan la estructura de la variedad, esto es el campo gravitacional juega un "doble" papel, el de campo de materia y a su vez sustrato sobre el cual el, y los otros campos de materia evolucionan. Esta situación es una consecuencia del principio de equivalencia el cual establece que todas las formas de materia se acoplan con la misma intensidad al campo gravitacional, incluido el propio campo gravitacional (no linealidad de las ecuaciones de campo con las correspondientes dificultades matemáticas que esto implica). En segundo lugar nos encontramos con un problema que pone en entredicho los principios fundamentales sobre los cuales se basa la interpretación del formalismo de la teoría cuántica de campos sobre el espacio de Minkowski: Los conceptos de partícula y vacío pierden su significado en presencia de la gravedad [Unr 76]. El problema no es que en el espacio-tiempo de Minkowski exista una manera única de definir los conceptos de vacio y partícula, sino que esta definición es invariante bajo el grupo de Poincaré, el cual es el grupo de isometrias de la variedad Minkowskiana. Cuando la gravedad está presente esta simetría se pierde y no hay forma de definir los estados de vacío y partícula de manera única, conduciendo a una serie de de nuevos fenómenos, tales como el efecto Hawkins [Haw 74] o la creación de partículas por la expansión cósmica [Chr 84], con profundas consecuencias en astrofísica, cosmología y partículas elementales. Es de anotar que todos estos nuevos fenómenos han sido encontrados en el contexto de La Teoría Cuántica de Campos sobre Variedades Curvas la cual es solo una "primera aproximación" a una Teoría Cuántica de la Gravedad. Esto nos dá una idea del potencial físico que tendría una teoría unificada de la gravedad con las otras fuerzas fundamentales de la naturaleza. Por ejemplo el Efecto Hawking se prsenta como una posibilidad para eliminar el problema de las singularidades, inevitables en el marco de la TGR clásica.

La aparente irreconciabilidad entre la teoría cuántica y la relatividad general es en verdad un dilema cuya solución podría conducir a radicales cambios en los conceptos fundamentales de la física.

APENDICE

Podemos ahora definir un operador diferencial, llamado la derivada de Lie, en términos de la estructura misma de la variedad sin necesidad de recurrir a estructuras adicionales sobre $\mathcal{M}$, como en el caso de la derivada covariante (para las definiciones básicas y la notación ver [Tej 92].

Consideremos un C^r–campo vectorial $\mathbf{X}$ sobre $\mathcal{M}$. De las ecuaciones diferenciales ordinarias se sigue que existe una única curva maximal $\lambda(t)$ a través de cada punto $p\in\mathcal{M}$ tal que $\lambda(0) = p$ y cuyo vector tangente en el punto $\lambda(t)$ es el vector $\mathbf{X}|_{\lambda(t)}$. Ahora $\forall q\in\mathcal{M}$ $\exists U\subset\mathcal{M}$ abierto, con $q\in U$ y $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{X}$ define una familia de difeomorfismos $\Phi_t : U \longrightarrow \mathcal{M}$, con $|t| < \epsilon$, en donde cada punto $p\in\mathcal{M}$ lo translada una distancia paramétrica t a lo largo de las curvas integrales de **X**. Así este difeomorfismo define la función lineal Φ_{t*}. La derivada de Lie $L_X T$ de un campo tensorial T con respecto a **X** es definido por:

$$L_X T\big|_p := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{T\big|_p - \Phi_{t*} T\big|_p\right\} \qquad \text{A-1}$$

De aquí se sigue que la derivada de Lie satisface las siguientes propiedades:

L-1: L_X transforma tensores linealmente y preserva el tipo de tensores y las contracciones

L-2: $\forall T, S \in T^r_s$ se tiene $L_X(S \otimes T) = L_X S \otimes T + S \otimes L_X T$

L-3: Para toda función $L_X f = Xf$

L-4: $(L_X Y)f = X(Yf) - Y(Xf)$

De la última propiedad la derivada de Lie de un campo vectorial corresponde al conmutador de los campos vectoriales, i.e. $L_X Y = [X,Y] := XY - YX$. Tambien podemos encontrar las componentes de la derivada de Lie de un campo tensorial T del tipo (r,s) en una base coordenada:

$$(L_X T)^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_r} = (T^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_r}/\partial x^i)X^i - T^{i\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_r}\partial X^{\alpha_1}/\partial x^i - \cdots + T^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{i\ldots\beta_r}\partial X^i/\partial x^{\beta_1} + \cdots \qquad \text{A-2}$$

De estas relaciones se sigue que la derivada de Lie de un campo tensorial depende no solamente de la dirección del campo vectorial **X** en el punto $p \in \mathcal{M}$, sino tambien del comportamiento del campo en puntos vecinos (a través de $\partial X^i/\partial x^{\beta_1}$). Este operador diferencial definido por la estructura de la variedad es demasiado limitado para servir como la generalización del concepto de derivada parcial sobre $\mathbf{R}^n$, la cual es necesaria para establecer las ecuaciones de campo de la física sobre una variedad arbitraria $\mathcal{M}$. Para obtener una generalización adecuada de derivada en este contexto, llamada la derivada covariante, es necesario introducir una estructura adicional sobre la variedad.

Un difeomorfismo $\Phi: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ se llama una isometría si Φ deja invariante la métrica $\Phi_* \mathbf{g} = \mathbf{g}\ \forall p \in \mathcal{M}$, y por tanto $\Phi_*: T_p \longrightarrow T_{\Phi(p)}$ preserva el producto escalar. Si el grupo local uni-paramétrico de difeomorfismos Φ_t generado por un campo vectorial **K** es un grupo de isometrías, entonces a **K** se le llama un campo vectorial de Killing. Así la derivada de Lie de la métrica es nula: $L_K \mathbf{g} = 0$. Por lo tanto un campo vectorial de Killing satisface la ecuación

$$K_{\alpha;\beta} + K_{\beta;\alpha} = 0 \qquad \text{A-3}$$

Inversamente, si **K** es un campo vectorial el cual satisface la ecuación A-3 (la ecuación de Killing) entonces es facil ver que $L_K \mathbf{g} = 0$ y por tanto Φ_t generado por **K** es un grupo de isometrias.

Una variedad, en general, puede no admitir campos vectoriales de Killing, reflejando el hecho que la variedad no posee simetrias. Sinembargo, en muchos casos de interés la variedad admite r campos vectoriales de Killing $K^{(\alpha)}$, $\alpha = 1,2,\cdots,r$ linealmente independientes, y puede ser mostrado que el conjunto de vectores de Killing forman un álgebra de Lie de dimensión r sobre $\mathbb{R}$, donde $0 \le r \le n(n+1)/2$, siendo n la dimensión de la variedad. El grupo local de difeomorfismos generado por estos campos vectoriales de Killing constituyen el grupo de Lie r-dimensional de isometrias de la variedad $\mathcal{M}$. Por ejemplo una variedad 4-dimensional con métrica Lorentziana y tal que $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ globalmente, admite un grupo de isometrias de $n(n+1)/2 = 10$ parámetros, el cual corresponde al modelo físico de la variedad espacio-tiempo de la relatividad especial (el espacio-tiempo de Minkowski) con el grupo de Poincaré, como su grupo de isometrias.

Dada una C -conección los teoremas de existencia de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias aplicados a la ecuación para las geodésicas, muestran que para cualquier $p \in \mathcal{M}$ y cualquier $\mathbf{X}_p \in T_p\mathcal{M}$ existe una geodésica maximal $\lambda_{\mathbf{X}}(s)$ en $\mathcal{M}$, con $p = \lambda_{\mathbf{X}}(0)$ y $(\partial/\partial s)_{\lambda|s=0} = \mathbf{X}_p$. Si $r \ge 1$ la geodésica es única y depende continuamente de los valores iniciales p y $\mathbf{X}_p$. Esto nos permite definir una transformación de clase C^r, llamada la transformación exponencial exp,

$$\begin{aligned} \exp:\ T_p\mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \mathbf{X} &\longmapsto \exp(\mathbf{X}) := \lambda_{\mathbf{X}}(1) \qquad \text{con} \qquad \lambda_{\mathbf{X}}(0) = p \end{aligned} \qquad \text{A-4}$$

Esto es, a cada vector $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ le asocia un punto $q \in \mathcal{M}$ que está a una distancia paramétrica unidad a lo largo de la geodésica que se inicia en p y cuyo vector tangente en p es $\mathbf{X}$.

Esta transformación exponencial no necesariamente está definida para todo $\mathbf{X}$ en $T_p\mathcal{M}$, pues la geodésica $\lambda_{\mathbf{X}}(s)$ no está, en general, definida para todo s. Esta situación conduce a las siguientes definiciones:

Definición: Una curva geodésica $\lambda_{\mathbf{X}}(s)$ se llama completa si está definida para todo s.

Definición: Una variedad $\mathcal{M}$ se llama geodésicamente completa si todas las geodésicas de $\mathcal{M}$ son completas

En este último caso la transformación exp está definida para todo $T_p\mathcal{M}$. Para $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ y $t \in \mathbb{R}$ fijos, la geodésica $\lambda_{\mathbf{X}}(as)$ tiene como vector tangente inicial $t\mathbf{X}$, así $\exp(t\mathbf{X}) = \lambda_{t\mathbf{X}}(1) = \lambda_{\mathbf{X}}(t)$. Esto significa que la función exp transforma rectas a través del origen de $T_p\mathcal{M}$ a geodésicas sobre $\mathcal{M}$ que pasan por p.

Sea $\mathcal{M}$ completo o no, la función exp es de rango n en p, y por tanto del teorema de la función implícita [Spi 72] existe una vecindad abierta $\mathcal{U}_0$ del origen de $T_p\mathcal{M}$ y una vecindad abierta $\mathcal{U}_p$ de p en $\mathcal{M}$, tal que exp es un C^r-difeomorfismo de $\mathcal{U}_0$ sobre $\mathcal{U}_p$.

BIBLIOGRAFIA

[Adl 75] Adler, R., Bazin, M. & Schiffer, M.: *Introduction to General Relativity,* 2nd ed., McGraw-Hill 1975

[Bir 86] Birrel, N. D. & Davies, P. C. W.: *Quantum Field in Curved Space,* Cambridge 1986

[Cha 39] Chandrasekhar, S.: *An Introduction to the Study of Stellar Structure,* University of Chicago Press 1939

[Cha 83] Chandrasekhar, S.: *The Mathematical Theory of Black Holes*; Oxford 1983

[Chr 84] Christensen, S.: *The Quantum Theory of Gravity*; Hilger, Bristol 1984

[DeW 75] DeWitt, B. S.: Phys. Reports **19c**,297 1975

[Fri 72] Fried, H. M.: *Functional Methods and Models in Quantum Field Theory,* Cambridge 1972

[Ger 70] Geroch, R.: J.: Math. Phys. **11**,437 1970

[Ger 70] Geroch, R. & Choquet-Bruhat, Y.: Comm. Math. Phys. **14**,329 1969

[Haw 74] Hawking, S. W.: Nature **248**,30 1974

[Haw 73] Hawking, S. W & Ellis, G. F. R.: *The Large Scale Structure of Space-Time*; Cambridge University Press 1973

[Itz 80] Itzykson, C. & Zuber, J. B.: *Quantum Field Theory*: McGraw-Hill 1980

[Lan 32] Landau, L. D.: Phys. Z. Sowjetunion **1**,285 1932

[Moh 86] Mohapatra, R. N.: *Unification and Supersymmetry,* Springer–Verlag 1986

[New 63] Newman, E. T., Tamburino, L. & Unti, T. J.: Journ. Math. Phys. **4**,915 1963

[Spi 72] Spivak, M.: *Cálculo en Variedades,* Reverté S. A., Barcelona 1972

[Str 84] Straumann N.: *General Relativity and Relativistic Astrophysics*; Springer-Verlag 1984

[Tej 89] Tejeiro, J. M.: *Renormierung der $g\Phi^3$-Theorie auf global hyperbolischen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeiten,* Tesis de Doctorado, Mainz 1989

[Tej 92] Tejeiro, J. M.: Momento (para ser publicado) 1992

[tHo 73] 'tHooft, G.: Nucl. Phys. **B61**,455 1973

[Unr 76] Unruh, W. G.: Phys. Rev. **D14**,870 1976