"MOMENTO" Revista Depto. Física Universidad Nacional de Colombia, Número 7, Octubre 1992.

SIMETRIAS DEL ESPACIO-TIEMPO

DAVID BERENSTEIN[1]
ROBERTO MARTINEZ[2]
JAIRO ALEXIS RODRIGUEZ[1]

Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
Santafe de Bogotá, D.C., Colombia

RESUMEN: Estudiando las simetrías del espacio-tiempo y su relación con el grupo $SL(2,\mathbb{C})$ adicionamos generadores de simetría tipo fermiónico para obtener el álgebra de supersimetría.

ABSTRACT: We study space-time symmetries and their relationship with the $SL(2,\mathbb{C})$ group, adding fermionic generators of symmetry to the Poincaré group we obtain the supersymmetric algebra.

1. Introducción.

El desarrollo del entendimiento de las fuerzas fundamentales está relacionado con el conocimiento de las simetrías de la naturaleza, con esta idea se han creado teorías de campos cuánticos para las interacciones fundamentales: electromagnética, débil y fuerte [1]; también se ha ido más allá, formulando teorías en las que las interacciones fuerte, débil y electromagnética son una faceta de la misma interacción en diferentes escalas de energía, éstas son llamadas teorías de gran unificación (TGU) [2].

Una de las ambiciones de los físicos teóricos ha sido una formulación no-trivial de las simetrías del espacio-tiempo para incorporar las propiedades fundamentales de las interacciones entre las partículas existentes en la naturaleza. Por este camino las teorías de gran unificación se interesaron por una teoría que mezclara campos bosónicos y fermiónicos, dado que el espín es parte del grupo de simetrías del espacio-tiempo, además la simetría que combinara fermiones y bosones debería combinar simetrías internas y simetrías del espacio-tiempo. Una simetría que relaciona propiedades físicas de partículas que tienen diferente espín se conoce como supersimetría (SUSY) [3]. Esta teoría surgió en la década de los 70 y desde

[1] Estudiantes de la carrera de Física
[2] Profesor Asistente

entonces han sido ampliamente investigadas sus implicaciones en teorías de gran unificación.

En el presente artículo empezamos estudiando el grupo de simetrías del espacio-tiempo, grupo de Lorentz y grupo de Poincaré, para luego ver la relación que hay con el grupo $SL(2,\mathbb{C})$, e introducimos la notación espinorial para establecer un homomorfismo entre este grupo y el grupo de Lorentz. Por último, se extiende el álgebra del grupo de Poincaré para formar el álgebra de supersimetría.

2. Grupo de Lorentz.

Las leyes físicas son independientes del sistema de referencia desde el cual se describe un sistema físico [4], consecuentemente encontrar las transformaciones entre diferentes sistemas posibles es de importancia fundamental. En mecánica clásica la correspondencia entre sistemas inerciales es expresado por las transformaciones de Galileo, las cuales permiten relacionar las coordenadas de dos sistemas inerciales que se mueven con una velocidad $\vec{v}$ constante uno respecto del otro $\vec{x}' = A\cdot x + \vec{v}t$ y $t = t'$ donde A es una transformación ortogonal que indica la posición relativa en el espacio de los sistemas de referencia en $t = 0$. Esta transformación de Galileo funciona muy bien con las leyes de Newton pero no cuando se aplica a fenómenos de la luz. El interferómetro de Michelson-Morley ha permitido establecer experimentalmente la constancia de la velocidad de la luz para todos los sistemas inerciales, contrario a la regla de suma de velocidades de las transformaciones de Galileo. Además las ecuaciones de Maxwell no son invariantes bajo las transformaciones de Galileo. La dificultad la resolvió la teoría de la relatividad especial, postulando que la velocidad de la luz es la misma en todo sistema de referencia inercial [4].

Para una señal de luz propagándose como una onda esférica, la ecuación del frente de onda es:

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

El postulado de la relatividad implica que en cualquier otro sistema de referencia inercial el cual coincidía con el primero en $t = 0$, la ecuación del frente de onda será:

$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

En notación cuadri-dimensional definimos $x^\mu = (t, \vec{x})$ y $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$, donde hemos hecho $c = 1$, las relaciones anteriores serán:

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = s^2 \tag{1}$$

Ahora todo el conjunto de transformaciones lineales que relacionan x^μ a x'^μ preservando la relación (1) constituye un grupo llamado **Grupo de Lorentz.**

Si suponemos que $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, donde Λ^μ_ν es la transformación que relaciona x^μ con x'^μ denominada transformación de Lorentz, preserva (1) entonces:

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu$$

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu}\Lambda^\nu_\beta$$

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^{T\mu}_\alpha g_{\mu\nu}\Lambda^\nu_\beta$$

en forma matricial es [5]:

$$g = \Lambda^T g \Lambda \tag{2}$$

Tomando el determinante en esta expresión encontramos $det(\Lambda) = \pm 1$. Con esto tenemos una clasificación de las transformaciones de Lorentz como transformaciones propias si $det(\Lambda) = +1$, y transformaciones de Lorentz impropias si $det(\Lambda) = -1$. Tomando la componente temporal de la ecuación (2) tenemos:

$$1 = \Lambda^{\mu}_{0} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{0} = (\Lambda^{0}_{0})^2 - (\Lambda^{i}_{0})^2$$

donde

$$|\Lambda^{0}_{0}|^2 \geq 1$$

permite la siguiente clasificación de las transformaciones de Lorentz: si $\Lambda^0_0 \geq +1$ transformaciones de Lorentz ortocronas y si $\Lambda^0_0 \leq -1$ transformaciones de Lorentz no-ortocronas.

Para completar el estudio de las transformaciones de Lorentz, podemos pensar que una transformación de Lorentz finita es equivalente a una serie de transformaciones sucesivas infinitesimales,y es claro que en el grupo está definida la transformación identidad. Suponemos entonces: $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}_{\nu}$ con δ^{μ}_{ν} la identidad y ϵ^{μ}_{ν} una variación infinitesimal; usando la ecuación (2)

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} + g_{\rho\nu} \epsilon^{\nu}_{\sigma} + g_{\mu\sigma} \epsilon^{\mu}_{\rho}$$

y

$$\epsilon_{\rho\sigma} = -\epsilon_{\sigma\rho}$$

concluyendo que $\epsilon_{\mu\nu}$ es una matriz antisimétrica, por lo que tiene solo seis términos independientes, lo que significa que se necesitan seis parámetros para definir una transformación de Lorentz. Con esta idea introducimos:

$$M_{\mu\nu} \equiv \imath(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}) \tag{3}$$

al cual se le llama generador del grupo de Lorentz.

Una transformación de Lorentz finita se puede expresar como una sucesión de transformaciones infinitesimales, esto es: si $x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \sim \exp(\imath\epsilon \cdot M) x^{\mu}$, donde $\epsilon \cdot M \equiv \epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$, entonces una segunda transformación está dada por la expresión

$$x'' = \exp(\imath\epsilon' \cdot M') x' = \exp(\imath\epsilon' \cdot M') \exp(\imath\epsilon \cdot M) x$$

y usando la fórmula de Haussdorff [6] tenemos:

$$x'' = \exp(\imath\epsilon' \cdot M' + \imath\epsilon \cdot M + (\frac{\imath}{2})[\imath\epsilon \cdot M, \imath\epsilon' \cdot M'] + \cdots) x.$$

Con la definición del generador dada en la ecuación (3) se puede ver:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \imath g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \imath g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \imath g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} + \imath g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} \tag{4}$$

Los conmutadores de los generadores del grupo definen el álgebra del grupo. En este caso corresponde al álgebra del grupo SO(3,1) y se puede mostrar que esta álgebra corresponde a dos álgebras del grupo de rotaciones $SU(2) \times SU(2)$ [7].

3. Grupo de Poincaré.

La invariancia de un sistema físico bajo traslaciones uniformes en el espacio-tiempo, i.e., $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$ con a^{μ} un cuadrivector de traslación, debe ser un principio incluído en la formulación de las leyes físicas. Considerar esta invariancia bajo traslaciones cuadri-dimensionales con el grupo de Lorentz es lo que se conoce como **grupo de Poincaré**. Adicionalmente para una traslación 4-dimensional se necesita un parámetro para cada dirección, por tanto el grupo de Poincaré tendrá cuatro nuevos parámetros. Definimos así el generador de traslaciones:

$$P_{\rho} \equiv -\imath\partial_{\rho} \tag{5}$$

Los conmutadores de los generadores son:

$$[M_{\mu\nu}, P_{\rho}] = -\imath g_{\mu\rho}P_{\nu} + \imath g_{\nu\rho}P_{\mu} \tag{6}$$

y

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \tag{7}$$

El álgebra del grupo de Poincaré la constituyen las ecuaciones (4), (6) y (7). Ahora bien, se pueden construir cantidades tales que conmuten con todos los generadores del grupo, a estas cantidades se les llama invariantes de Casimir. Para el grupo de Poincaré se construyen dos de tales cantidades, $P^{\mu}P_{\mu}$ y $W^{\mu}W_{\mu}$ donde W^{μ} es el 4-vector de Pauli-Lubanski definido por:

$$W^{\mu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_{\nu}M_{\rho\sigma}$$

Con los invariantes de Casimir se pueden clasificar las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré [7]. Los casos mas interesantes físicamente son:

1)$P^{\mu}P_{\mu} = m^2$ y $W^{\mu}W_{\mu} = m^2 s(s+1)$ donde $s = 0, 1, \frac{1}{2}, \cdots$ que representa partículas masivas con espín s.

2)$P^{\mu}P_{\mu} = 0$ representa partícula de masa en reposo cero, con esto se tiene $W^{\mu}W_{\mu} = 0$ y además $P^{\mu}W_{\mu} = 0$ Y por tanto P^{μ} y W_{μ} deben ser proporcionales,i.e., $W^{\mu} = \lambda P^{\mu}$ donde λ se le conoce como helicidad y toma valores $\pm s$.

Podemos ver explícitamente como el espín es parte del grupo de Poincaré, por tanto buscar una simetría que combine partículas de diferente espín se traduce en la necesidad de extender el álgebra del grupo de Poincaré.

4. Grupo $SL(2, \mathbb{C})$.

Este es el grupo de matrices complejas 2x2 tal que si $A \in SL(2, \mathbb{C})$, entonces $det(A) = 1$. El grupo $SL(2, \mathbb{C})$ presenta una relación con el grupo de Lorentz, para ver esta relación más explícitamente supongamos una base $\{I, \sigma^i\}$ donde las σ^i son las matrices de Pauli, entonces cualquier matriz hermítica se puede escribir en términos de esta base, i.e., $X = \sigma_\mu x^\mu$ con x^μ los coeficientes para la base. Ahora para una matriz que transforme como $X' = AXA\dagger$ con $A \in SL(2, \mathbb{C})$ se tendrá que X' sigue siendo una matriz hermítica por la propiedad de A, y con la forma de la transformación de X' se tiene la igualdad $det(X) = det(X')$. Como X' es hermítica también tendrá una expansión en la base $X' = \sigma_\mu x^\mu$, lo cual implica que la igualdad de los determinantes se puede escribir explícitamente como:

$$det(X) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = det(X')$$

Esta ecuación implica que la transformación $X' = AXA\dagger$ induce una transformación de Lorentz sobre los coeficientes x^μ.Se puede mostrar la existencia de un homomorfismo entre $SL(2, \mathbb{C})$ y el grupo de Lorentz. Para ver este homomorfismo, introducimos cantidades de dos componentes complejas, espinores, de forma que $\xi' = A\xi$ y det(A)=1. En teorías de campo relativista tenemos dos clases de espinores: los que transforman con la matriz A y los que transforman con la matriz A^*, y se denotan como ξ^α y $\xi^{\alpha *} \equiv \eta^{\dot\alpha}$, respectivamente. Con esta definición de espinor se puede generalizar a espinores de orden superior y verificar las siguientes relaciones con los cuadrivectores [6]:

$$\xi_{\alpha\dot\alpha} = a^\mu(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha} \tag{8}$$

y la relación inversa es

$$a_\nu = \frac{1}{2}Tr(\xi\sigma_\nu) \tag{9}$$

Podemos establecer ahora una relación entre una transformación bilineal de espinores de la forma:

$$\xi'_{\alpha\dot\alpha} = A_\alpha^\beta \xi_{\beta\dot\beta} A_{\dot\alpha}^{\dagger\dot\beta}$$

Partiendo de la relación (9):

$$a'_\mu = \frac{1}{2}Tr(\xi'\sigma_\mu) = \frac{1}{2}Tr(A\xi A^\dagger \sigma_\mu)$$

y usando (8) tenemos

$$a'_\mu = \frac{1}{2}Tr(A\sigma^\nu A^\dagger \sigma_\mu)a_\nu = \Lambda_\mu^\nu a_\nu \tag{10}$$

de forma que asociamos

$$\Lambda_\mu^\nu(A) = \frac{1}{2}Tr(\sigma_\mu A \sigma^\nu A^\dagger) \tag{11}$$

Con esto se establece una relación dos a uno entre $SL(2, \mathbb{C})$ y el grupo de Lorentz, puesto que a las matrices $\pm A$ les corresponde la misma transformación de Lorentz. Con la ecuación (11) se puede mostrar que el grupo $SL(2, \mathbb{C})$ y el grupo de Lorentz cumplen la misma tabla de multiplicar,i.e.,

$$\Lambda_\mu^\lambda(AB) = \Lambda_\mu^\alpha(A)\Lambda_\alpha^\lambda(B)$$

Así mismo se puede mostrar que las matrices unitarias que se encuentran en $SL(2,\mathbb{C})$ forman un subgrupo equivalente al grupo de rotaciones y las matrices hermíticas de $SL(2,\mathbb{C})$ se asocian al boost de Lorentz; por lo que el grupo $SL(2,\mathbb{C})$ es isomorfo a $SU(2)\otimes SU(2)$. El grupo $SL(2,\mathbb{C})$ tiene dos representaciones fundamentales inequivalentes según $SU(2)\otimes SU(2)$: 1) $(\frac{1}{2},0)$ la cual transforma como $\psi'_\alpha = M_\alpha^\beta \psi_\beta$ con $M \in SL(2,\mathbb{C})$ y 2) $(0,\frac{1}{2})$ transforma como $\bar{\chi}'_{\dot{\alpha}} = M_{\dot{\alpha}}^{*\dot{\beta}} \bar{\chi}_{\dot{\beta}}$ con $M^* \in SL(2,\mathbb{C})$.

La representación $(0,\frac{1}{2})$ transforma como la complejo conjugada de $(\frac{1}{2},0)$, y los generadores de las representaciones son $\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)$ y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)$, respectivamente.

5. Introducción a Supersimetría.

En teoría de campos cuánticos relativistas el espacio de Hilbert donde se trabaja se descompone en una suma directa de un espacio de estados bosónicos y uno de estados fermiónicos, y es tal que un generador bosónico no puede cambiar un estado bosónico por uno fermiónico y viceversa. Una teoría Supersimétrica contiene generadores que conectan estos dos espacios, transformando bosones en fermiones y fermiones en bosones.

Para la construcción de un operador que genere una simetría fermión-bosón y además deje la física intacta, que conmute con la matriz S , se debe tener $G = B+F$ donde G es el generador de simetría, B la parte del generador que cambia bosón-bosón y fermión-fermión y F la parte de fermión-bosón. Estas partes se puede ver que cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned} [B^1, B^2] &= B^3 \\ [F^1, B^2] &= F^3 \\ \{F^1, F^2\} &= B^3 \end{aligned} \tag{12}$$

Esta es el álgebra característica de teorías supersimétricas llamada álgebra de Lie graduada [8].

Coleman y Mandula investigaron las propiedades de los generadores bosónicos y encontraron que cualquier grupo de simetrías bosónicas de la matriz S en teorías de campo relativista se puede expresar como el producto directo de un grupo de simetrías internas con el grupo de Poincaré [10]. El resultado de las investigaciones llevó al teorema excluyente de Coleman-Mandula: *"Todos los generadores de una supersimetría deben ser fermiónicos"* [11]. Por tanto en Supersimetría se tendrán generadores Q_α que son generadores tipo fermiónico, que cambian el espín en una cantidad semi-impar, cambiando la estadística del estado.

El teorema de Coleman - Mandula propone por tanto explorar generadores fermiónicos, así si suponemos una métrica definida positiva para el espacio de Hilbert, es decir, la norma de un operador es mayor que cero si y sólo si el operador es nulo,

$|G|^2 \geq 0$ y por tanto:

$$|G|^2 \equiv \frac{1}{2}(G^\dagger G + GG^\dagger) = \frac{1}{2}\{G^\dagger, G\} > 0 \text{ sii } G \neq 0$$

Considerando entonces la parte fermiónica tenemos que $\{Q^\dagger, Q\}$ es mayor que cero para un generador fermiónico no nulo.

Supersimetría es una simetría del espacio-tiempo, no es una simetría interna, por lo que podemos suponer que Q está en alguna representación (j, j') del grupo de Lorentz, por tanto $Q^\dagger$ esta en una representación (j', j) y entonces el anticonmutador $\{Q^\dagger Q\}$ estará en la representación $(j + j', j' + j)$. Ahora el anticonmutador lo que indica es una doble operación del generador Q por lo que el anticonmutador debe ser de tipo bosónico y se puede ver que el único objeto en el sector bosónico que pertenece a la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es P_μ, por lo tanto el generador Q debe estar en la representacione $(\frac{1}{2}, 0)$ o $(0, \frac{1}{2})$ de $SL(2, \mathbb{C})$, y el álgebra se podrá expresar como:

$$[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \tag{13}$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \tag{14}$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0 \tag{15}$$

Con el argumento dado anteriormente se tiene que:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \tag{16}$$

Las expresiones del álgebra de Poincaré junto con (13),(14),(15) y (16) constituyen el álgebra Supersimétrica. Si nos detenenos en la ecuación (16) podemos concluir que dos transformaciones de supersimetría equivalen a una traslación en el espacio-tiempo, además podemos ver que $[Q_\alpha, P^2] = 0$ y $[Q_\alpha, W^2] \neq 0$ donde P^2 y W^2 son los invariantes de Casimir del grupo de Poincaré. Estas relaciones implican que en una representación irreducible del álgebra supersimétrica están contenidas partículas con la misma masa pero con diferente valor de espín. Esto es, si B es un bosón, entonces $B \to F$ a través de Q, donde F es un fermión con la misma masa que B, a estas partículas se les denomina "Superpartners" o supercompañeras.

6. Conclusiones.

Se inició estudiando las simetrías del espacio-tiempo y las representaciones del grupo de Lorentz por medio del grupo $SL(2, \mathbb{C})$ dada la existencia de un homeomorfismo entre los dos grupos. Con esto se puede ver como una extensión del álgebra del grupo de Poincaré lleva al álgebra supersimétrica, resumida así*:

$$
\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= \imath g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \imath g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \imath g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} + \imath g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} && (4)\\
[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= -\imath g_{\mu\rho} P_\nu + \imath g_{\nu\rho} P_\mu && (6)\\
[P_\mu, P_\nu] &= 0 && (7)\\
[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] &= \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta && (13)\\
[\bar{Q}_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}] &= \frac{1}{2} \bar{Q}_{\dot\beta} (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot\alpha}^{\dot\beta} && (14)\\
[Q_\alpha, P_\mu] &= [\bar{Q}_{\dot\alpha}, P_\mu] = 0 && (15)\\
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu && (16)
\end{aligned}
$$

El álgebra supersimétrica permite tener partículas de diferente espín con la misma masa en un mismo multiplete irreducible. Se concluye así que Supersimetría es una teoría relativista que generaliza de una manera no-trivial las simetrías del espacio-tiempo.

BIBLIOGRAFIA

1. S. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961;), 579; Phys. Rev. Lett **19** (1967;), 1264; Elementary Particle Theory (Nobel Symposium No 8) (1968) (N. Svartholm, eds.), Almquist and Wiksell, Stockholm.
2. Georgi H. and Glashow S., Phys. Rev. Lett. **32** (1974), 438.
3. Wess j. and Bagger J., *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton.
4. Einstein, A., *El significado de la Relatividad*, Espasa Calpe, 1980.
5. Jackson. J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, 1975, pp. 532-560 (Second edition).
6. Barut, A.O., *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Mac Millan (1965).
7. Ramond, P., *Field Theory: A Modern Primer.*, *Frontiers in Physics*, Addison Wesley, New York (1989).
8. Sohnius, M.f., *Introducing Supersymmetry*, Phys. Rep. C 128, No 2-3 (1985).
9. Martínez, R., *Notas sobre Supersimetría*, (sin publicar).
10. Coleman S. and Mandula J., Phys. Rev **159** (1967), 151.
11. Haag R., Lopuszanski J. and Sohnius M., Nucl. Phys. B **88** (1975), 257.

*Sin embargo, se puede extender dicha álgebra a N genardaores supersimétricos, Q_α^i con $i = 1, \ldots, N$.