

Solución Numérica de la Ecuación de Laplace en una Región Plana Acotada.

Mariela Marín (*)

Mauricio García Castañeda (**)

Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia

RESUMEN: Empleando un algoritmo basado en el método de Diferencias Finitas, se desarrolló una rutina numérica para solucionar la Ecuación de Laplace en una región plana rectangular. Así mismo, se presentan gráficamente las líneas equipotenciales, calculadas por medio de un esquema de interpolación de Lagrange.

ABSTRACT: Laplace's equation for a flat rectangular region is solved using a numerical routine based on the finite difference method. Also, the graphic representation of the equipotential lines is presented by means of a Lagrange interpolation scheme.

INTRODUCCION.

La ecuación de Laplace pone de manifiesto que en una región en la cual no existen cargas eléctricas, el potencial electrostático satisface una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

Consideremos la región rectangular de la figura 1. Así, el problema a solucionar es la ecuación diferencial parcial:

$$\nabla^2 V(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x,y) = 0 \quad (1)$$

con $0 < x < a$; $0 < y < b$, sujeta a unas condiciones de frontera que en general pueden darse por:

$$V(x, 0) = f(x); \quad V(x, b) = g(x)$$

$$V(0, y) = p(y); \quad V(a, y) = q(y)$$

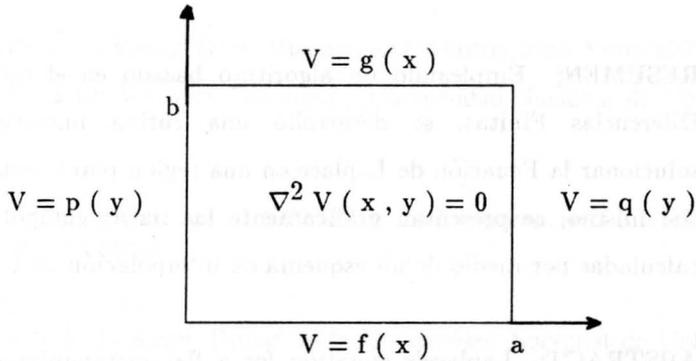


Figura 1. Definición de la región plana rectangular para la Ecuación de Laplace.

EL ALGORITMO NUMERICO.

Solucionar numéricamente la ecuación (1) por el método de las diferencias finitas, implica reemplazar las derivadas presentes en el problema por sus correspondientes cocientes diferenciables.

Sea la función $V(x, y)$. Al mantener fija y , la aproximación de la

primera derivada de V respecto a x en el intervalo $x, x \pm \Delta x$, se expresa como (1,2) :

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x,y) \simeq \frac{1}{2 \Delta x} (V_{x+\Delta x,y} - V_{x-\Delta x,y}) \quad (2)$$

Usando la mitad de los incrementos anteriores se puede conseguir la aproximación para la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x,y) \simeq \frac{1}{(\Delta x)^2} (V_{x+\Delta x,y} - 2 V_{x,y} + V_{x-\Delta x,y}) \quad (3)$$

De igual manera se pueden obtener las aproximaciones para los valores numéricos de las derivadas parciales respecto a y .

Reemplazando (3) en la ecuación de Laplace y generalizando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(x,y) \simeq & \frac{1}{(\Delta x)^2} (V_{x+\Delta x,y} - 2 V_{x,y} + V_{x-\Delta x,y}) \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2} (V_{x,y+\Delta y} - 2 V_{x,y} + V_{x,y-\Delta y}) \end{aligned} \quad (4)$$

Si dividimos la región en intervalos $\Delta x = \Delta y = g$, la ecuación (4) toma la forma:

$$\nabla^2 V(x,y) \simeq \frac{1}{g^2} (V_{x+\Delta x,y} + V_{x,y+\Delta y} - 4 V_{x,y} + V_{x-\Delta x,y} + V_{x,y-\Delta y})$$

lo que permite escribir la siguiente expresión:

$$V(x,y) \simeq \frac{1}{4} (V_{x+\Delta x,y} + V_{x,y+\Delta y} + V_{x-\Delta x,y} + V_{x,y-\Delta y}) \quad (5)$$

que proporciona de manera aproximada el potencial electrostático en cualquier punto x,y dentro de la región, el cual está determinado por el promedio de los valores en los cuatro puntos adyacentes a lo largo de los respectivos ejes.

Una vez se hayan obtenido los primeros valores para la rejilla, el proceso se repite tantas veces como sea necesario hasta una última iteración en la cual las diferencias entre los valores previamente calculados y los hallados, difieren menos que un valor predeterminado.

CASOS ANALIZADOS

A. Variación Lineal del Potencial Electrostático Sobre las Fronteras.

Para la región R se adoptó la configuración mostrada en la figura 2, la cual representa un potencial electrostático que varía de manera lineal sobre cada una de las fronteras.

Al utilizar el programa desarrollado se calcula de manera iterativa los potenciales electrostáticos punto a punto en el interior de la región aplicando sucesivamente la ecuación (5). Luego al emplear la rutina de interpolación mencionada, se encuentran las líneas equipotenciales las cuales se muestran en la figura 3 para valores entre 1 y 10 voltios en incrementos de 0.5 V.

B. Potenciales Electrostáticos Constantes Sobre las Fronteras.

En este caso, las condiciones de frontera se establecen como aparece en la figura 4.

Los resultados obtenidos para las equipotenciales se pueden apreciar en la figura 5 para valores entre -5y 5 voltios con un intervalo de 0.5 V.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	*	*	*	*	*	*	*	*	9
3	*	*	*	*	*	*	*	*	8
4	*	*	*	*	*	*	*	*	7
5	*	*	*	*	*	*	*	*	6
6	*	*	*	*	*	*	*	*	5
7	*	*	*	*	*	*	*	*	4
8	*	*	*	*	*	*	*	*	3
9	*	*	*	*	*	*	*	*	2

Figura 2. Condiciones Linealmente Variables

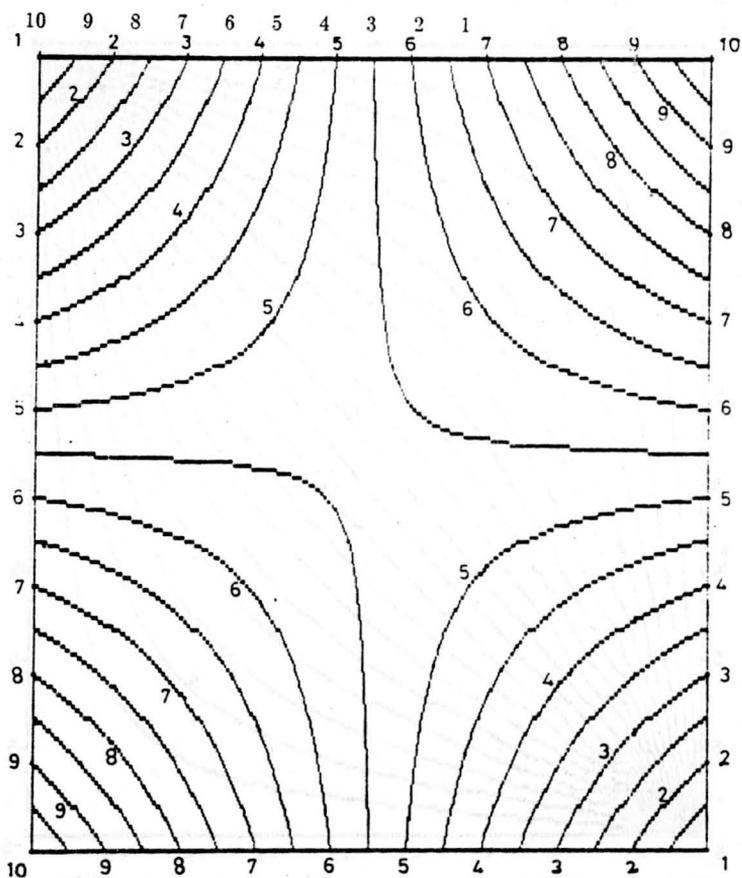


Fig. 3

Líneas equipotenciales de 1 a 10 V., para la configuración mostrada en la figura 2.

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5

Fig. 4: Condiciones Constantes.

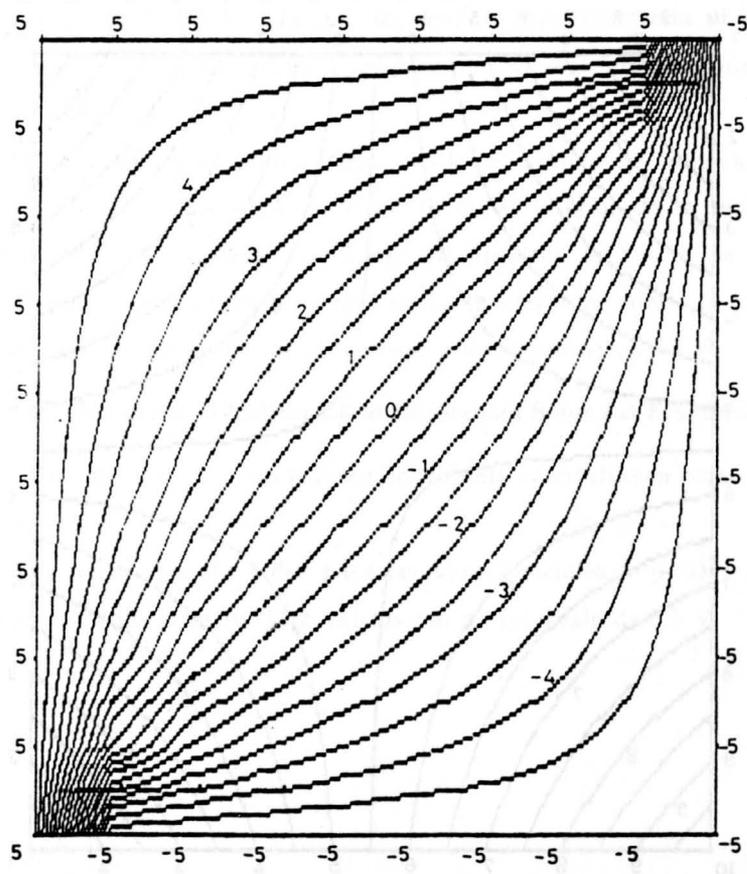


Fig. 5
 Líneas equipotenciales de -5 a +5 V., para las condiciones de frontera mostradas en la figura 4.

(*) Estudiante del programa de Especialización en Ciencias Físicas,
departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia.

(**) Profesor Asociado, departamento de Física, Universidad Nacional de
Colombia.

REFERENCIAS.

1. Churchhouse R., Numerical Methods, J. Wiley, 1981
2. Merrill M., Using Computers in Physics, Houghton Miffling, 1976.