

## FUNCIONES DE ONDA EN EL ESPACIO DE FASE: PARTICULA EN UN POTENCIAL LINEAL

D. Campos

Departamento de Física

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

### RESUMEN

Se encuentra la representación-*qp* para los estados propios del Hamiltoniano de una partícula sujeta a un potencial lineal y se analiza el límite semicásico.

### ABSTRACT

The coherent-state representation-*qp* of the eigenvectors of the Hamiltonian for a particle in a linear potential is found. It's semiclassical approximation is derived.

### 1. INTRODUCCION

La formulación de la mecánica cuántica en el espacio de fase es un tema de especial interés [1, 2]. En particular se busca el desarrollo de métodos de aproximación semicásicos libres de los problemas de divergencia en los puntos de retorno, que caracterizan las funciones semicásicas determinadas por el método de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) [3]. A la luz de este objetivo, un camino digno de explorar es formular la mecánica cuántica directamente en el espacio de fase usando funciones de onda

$$\Psi(p, q) = \langle p, q | \Psi \rangle, \quad \Psi(q, p) = \langle q, p | \Psi \rangle = w(q, p) \Psi(p, q) \quad (1)$$

que dependen tanto de la posición  $q$  como del impulso  $p$  de la partícula.

Por definición [4] los estados coherentes  $|q, p\rangle$  y  $|p, q\rangle$  están ligados con los estados coherentes de Glauber  $|z\rangle$  por la relación [5, 6]

$$|p, q\rangle = w\left(\frac{1}{2}q, p\right)|z\rangle, \quad (2)$$

$$|q, p\rangle = w^*\left(\frac{1}{2}q, p\right)|z\rangle = w^*(q, p)|p, q\rangle, \quad (3)$$

donde el asterisco representa la operación complejo conjugado y  $w(q, p)$  es el factor de fase

$$w(q, p) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}qp\right). \quad (4)$$

En este artículo examinaremos en primer lugar la forma que adopta un operador  $B(\hat{q}, \hat{p})$  en la representación de estados coherentes, llamada también representación en el espacio de fase. Por otro lado usaremos este lenguaje para expresar los estados propios del Hamiltoniano de una partícula sujeta a un potencial lineal y determinar su comportamiento semicásico.

## 2. OPERADORES EN REPRESENTACION DEL ESPACIO DE FASE

Queremos determinar la forma que adoptan los operadores básicos de posición e impulso en la representación de estados coherentes- $qp$  o  $-pq$ . Para ésto seguimos un procedimiento similar al usado para obtener la correspondencia  $\hat{q} \rightarrow q$ ,  $\hat{p} \rightarrow -i\hbar \partial/\partial q$ , en representación de coordenadas [7].

Vamos a considerar dos funciones arbitrarias,  $F(z)$  y  $G(z)$ , expandibles en series de potencias en  $z$ :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n. \quad (5)$$

A partir de la relación  $\Psi(p, q) = w^*(q, p) \Psi(q, p)$  es posible probar por inducción las reglas de permutación

$$F\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right)[w^*(q, p) \Psi(q, p)] = w^*(q, p) F\left(q + i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \Psi(q, p) \quad (6)$$

$$G\left(p - i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right)[w^*(q, p) \Psi(q, p)] = w^*(q, p) G\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) \Psi(q, p) \quad (7)$$

que permiten extraer la función exponencial  $w^*(q, p)$  de la acción de los operadores diferenciales  $\partial/\partial p$  y  $\partial/\partial q$ .

Consideremos ahora los productos escalares  $\langle p, q | F(\hat{q}) | \Psi \rangle$  y  $\langle p, q | G(\hat{p}) | \Psi \rangle$ , donde  $|p, q\rangle$  es un estado coherente y  $|\Psi\rangle$  es un estado vectorial arbitrario. Usando la descomposición del operador unidad en términos de kets de posición y empleando la identidad

$$F\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) w^*(q', p) = F(q') w^*(q', p), \quad (8)$$

encontramos

$$\langle p, q | F(\hat{q}) | \Psi \rangle = F\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \Psi(p, q) = w^*(q, p) F\left(q + i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \Psi(q, p) \quad (9)$$

donde la última igualdad es consecuencia de la primera regla de permutación arriba mencionada. De manera completamente similar, usando la descomposición del operador unidad en términos de kets propios de impulso, encontramos

$$\langle p, q | G(\hat{p}) | \Psi \rangle = G\left(p - i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) \Psi(p, q) = w^*(q, p) G\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) \Psi(q, p). \quad (10)$$

Los resultados anteriores se pueden generalizar para funciones arbitrarias  $B(\hat{q}, \hat{p})$ , expandibles en series de potencias de los operadores de posición e impulso,  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$ . Por otro lado, usando la relación  $\langle q, p | = w(q, p) \langle p, q |$ , es posible escribir los resultados en la forma

$$\langle p, q | B(\hat{q}, \hat{p}) | \Psi \rangle = B\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}, p - i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) \Psi(p, q) \quad (11)$$

$$\langle q, p | B(\hat{q}, \hat{p}) | \Psi \rangle = B\left(q + i\hbar \frac{\partial}{\partial p}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) \Psi(q, p). \quad (12)$$

Estas relaciones muestran un alto de grado de simetría entre las representaciones  $pq$  y  $qp$ . A propósito, estos nombres designan el orden en que aparecen posición e impulso dentro del ket que representa el estado coherente que sirve de base para la representación.

Las ecuaciones anteriores tienen un alto grado de similitud con las representaciones de impulsos y de coordenadas, excepto que incluyen ahora términos adicionales generados por las sustituciones siguientes:

Representación- $pq$ :

$$\hat{q} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial p}, \quad \hat{p} \rightarrow p - i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \quad |\Psi\rangle \rightarrow \Psi(p, q). \quad (13)$$

Representación- $qp$ :

$$\hat{q} \rightarrow q + i\hbar \frac{\partial}{\partial p}, \quad \hat{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \quad |\Psi\rangle \rightarrow \Psi(q, p). \quad (14)$$

$\Psi(q, p)$  y  $\Psi(p, q)$  son funciones diferentes que distinguimos por el orden en que aparecen en el argumento las variables de posición ( $q$ ) e impulso ( $p$ ).

### 3. PARTICULA SUJETA A UN POTENCIAL LINEAL

En la presente sección consideraremos una partícula de masa  $m$ , con un grado de libertad y energía potencial  $V(\hat{q}) = -F\hat{q}$ , donde  $F$  es una constante real. En particular, esta situación describe una partícula en un campo gravitacional ( $F = m g$ ) o una

partícula de carga  $q$  en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$ ). El sistema tiene asociado un Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{q}} \quad (15)$$

que satisface la ecuación de valores propios  $\hat{H} | E \rangle = E | E \rangle$ , la cual adopta diferentes formas según la representación usada para su descripción. La solución de la ecuación de valores propios en representación de coordenadas e impulsos es bien conocida [3, 8], a diferencia de la representación- $qp$  cuya determinación es el objeto central de la presente sección.

### 3.1 Representación de impulsos

En esta representación la ecuación de valores propios (15) adopta la forma más sencilla, ya que el operador posición aparece en el Hamiltoniano de manera lineal y el impulso participa cuadraticamente:

$$\left[ \frac{p^2}{2m} - \mathbf{F} i \hbar \frac{\partial}{\partial p} \right] \tilde{\varphi}_E(p) = E \tilde{\varphi}_E(p) \quad (16)$$

Esta ecuación diferencial de primer orden se puede solucionar fácilmente para dar como resultado la función de onda

$$\tilde{\varphi}_E(p) = \langle p | E \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{E}{F} p - \frac{1}{6mF} p^3 \right) \right] \quad (17)$$

asociada con el valor propio  $E$ . Como el Hamiltoniano es hermítico, los valores propios son reales y están en el rango  $-\infty < E < \infty$ . El factor de normalización se ha elegido de tal manera que los estados quedan ortonormalizados a la delta de Dirac,  
 $\langle E | E' \rangle = \delta(E - E')$ .

Dependiendo del valor de los parámetros ( $E/F, mF$ ), la función  $\tilde{\varphi}_E(p)$  oscila muy rápidamente, excepto en la vecindad de los puntos  $p = 0$  y  $p = \pm (6mE)^{1/2}$ . Cumple además la relación  $\tilde{\varphi}_E(-p) = \tilde{\varphi}_E^*(p)$ , asociada con la propiedad de invarianza temporal del sistema.

### 3.2 Representación de coordenadas

En esta representación la ecuación de valores propios es ligeramente más complicada, ya que la ecuación diferencial

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{q} \right] \varphi_E(q) = E \varphi_E(q) \quad (18)$$

es de segundo orden en la coordenada de posición. Para solucionar esta ecuación hacemos el cambio de variables

$$z := \alpha q + b, \quad u_E(z) := \varphi_E\left(\frac{z-b}{\alpha}\right) \quad (19)$$

de tal manera que al elegir los parámetros como

$$\alpha = \left[ \frac{2mF}{\hbar^2} \right]^{1/3}, \quad b = \frac{\alpha E}{F}, \quad (20)$$

la ecuación (18) se convierte en la ecuación diferencial de Airy [9, 10],

$$\frac{d^2 u_E(z)}{dz^2} + z u_E(z) = 0. \quad (21)$$

De las dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación,  $Ai(-z)$  y  $Bi(-z)$ , la única físicamente aceptable es la la solución regular  $Ai(-z)$ . Por lo tanto la función de onda en representación de coordenadas es dada por la expresión

$$\varphi_E(q) = \langle q | E \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{F}} Ai\left(-\alpha\left(q + \frac{E}{F}\right)\right), \quad (22)$$

la cual involucra la dependencia de la variable de posición a través de la variable real

$$z = \alpha\left(q + \frac{E}{F}\right) = -\alpha\xi, \quad \xi := -\left(q + \frac{E}{F}\right). \quad (23)$$

Es de interés observar la propiedad

$$\varphi_E(q) = \varphi_0\left(q + \frac{E}{F}\right),$$

de tal manera que la función propia para cualquier valor propio  $E$  se puede obtener por un desplazamiento rígido a lo largo del eje  $q$  de la función propia correspondiente a la energía cero.

### 3.3 Representación integral de la función de Airy

Ahora bien, si usamos la transformada de Fourier que conecta las funciones de onda en representaciones de impulso y de coordenadas

$$\varphi_E(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} w(q, p) \tilde{\varphi}_E(p) dp \quad (24)$$

y comparamos esta expresión con (22), encontramos la siguiente representación integral para la función de Airy  $Ai(z)$

$$\alpha Ai(\alpha \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\pm i\left[\frac{1}{3}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^3 + \xi t\right]\right] dt \quad . \quad (25)$$

Podemos usar el signo + o - en el exponente del integrando como consecuencia del carácter real de los parámetros  $\alpha$  y  $\xi$ . Esta expresión corresponde a la fórmula 10.4.32 de Abramowitz y Stegun [9].

### 3.4 Representación- $qp$ .

Por aplicación de (14), la ecuación de valores propios (15) adopta la forma

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} - Fq - i\hbar F \frac{\partial}{\partial p} \right] \varphi_E(q, p) = E \varphi_E(q, p), \quad (26)$$

la cual corresponde a una ecuación diferencial parcial de primer orden en el impulso y de segundo orden en la posición. La solución está dada por [4]

$$\begin{aligned} \varphi_E(q, p) &= \int_{-\infty}^{\infty} w^*(q', p) M(q') \varphi_E(q' + q, p) dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{F}} \int_{-\infty}^{\infty} w^*(x + \xi, p) M(x + \xi) \alpha Ai(-\alpha x) dx \end{aligned} \quad (27)$$

donde

$$M(q) := \frac{1}{\sqrt{\pi} q_o} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{q_o}\right)^2\right) \quad , \quad (28)$$

$q_o$  y  $p_o$  son unidades de longitud e impulso sujetas a la restricción  $q_o p_o = \hbar$ , y la última igualdad en (27) es consecuencia del cambio de variables  $q' \rightarrow x$  ( $q$  actúa como un parámetro)

$$x = \left( q' + q + \frac{E}{F} \right) = q' - \xi \quad . \quad (29)$$

Al emplear en (27) la representación integral (25), obtenemos

$$\varphi_E(q, p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{F}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \frac{t^3}{3\alpha^3} + i\xi t\right] \Phi_p(t) dt \quad (30)$$

donde

$$\Phi_p(t) := \int_{-\infty}^{\infty} w^*(x + \xi, p + \hbar t) M(x + \xi) dx = \sqrt{2\pi\hbar} \tilde{M}(p + \hbar t) \quad (31)$$

es una función auxiliar que involucra el impulso  $p$  como un parámetro. Se observa que la función  $\varphi_E(q, p)$  tiende rápidamente a cero a medida que aumenta el valor absoluto del impulso  $p$ .

Puesto que las cantidades  $t$  y  $\alpha$  tienen dimensiones de inverso de longitud, es conveniente introducir como variable de integración la cantidad adimensional  $v = t/\alpha$ , de tal manera que

$$\varphi_E(q, p) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{F}} \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \frac{1}{3} v^3 - izv\right] \tilde{M}(p + Bv) dv \quad (32)$$

donde hemos empleado  $z = -\alpha\xi$  y definido

$$B := \hbar\alpha, \quad (33)$$

$$\tilde{M}(p + Bv) = (\sqrt{\pi} p_o)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{p + Bv}{p_o}\right)^2\right] \quad (34)$$

El exponente involucrado en la integral (32) se puede reescribir en la forma

$$X := i \frac{v^3}{3} - izv - \frac{1}{2} \left(\frac{p + Bv}{p_o}\right)^2 = i \frac{v^3}{3} - iZ^* \sigma v - \sigma^2 v^2 - y^2$$

con las cantidades auxiliares

$$\sigma := \frac{B}{\sqrt{2} p_o} = \frac{q_o}{\sqrt{2}} \alpha,$$

$$x := \frac{q + E/F}{\sqrt{2} q_o}, \quad y := \frac{p}{\sqrt{2} p_o}, \quad Z := x + iy. \quad (35)$$

Al hacer la transformación  $v = u - \lambda$  y elegir el parámetro  $\lambda$  como  $\lambda = i\sigma^2$ , podemos eliminar el término cuadrático  $-\sigma^2 v^2$  que aparece en X. Como consecuencia,

$$\varphi_E(q, p) = \alpha \sqrt{\frac{2\sqrt{\pi} q_o}{F}} \exp\left[\frac{2}{3} \sigma^6 - 2 \sigma^3 Z^* - y^2\right] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\sigma^2}^{\infty + i\sigma^2} \exp\left[i\left[\frac{1}{3} u^3 - (2\sigma Z^* - \sigma^4)u\right]\right] du. \quad (36)$$

La integral que aparece en esta expresión es idéntica en forma a la representación integral (25) para la función de Airy  $Ai(\dots)$ , excepto que el parámetro  $2\sigma Z^* - \sigma^4$  es ahora un número complejo.

De la igualdad  $-i(2\sigma Z^* - \sigma^4)u = -i(2\sigma x - \sigma^4)u - 2\sigma y u$  se observa que la parte imaginaria del número  $Z^*$  da origen en el exponente a un término  $-2\sigma y u$ . Para analizar sus consecuencias usamos la relación

$$-y \sigma u \exp(-i x \sigma u) = (-i y \partial/\partial x) \exp(-i x \sigma u) \quad (37)$$

con el fin de obtener la identidad

$$\exp(-y \sigma u) \exp(-i x \sigma u) = \exp(-i y \partial/\partial x) \exp(-i x \sigma u) \quad (38)$$

y reescribir así la función de onda  $\varphi_E(q, p)$  en la forma

$$\varphi_E(q, p) = \alpha \sqrt{\frac{2\sqrt{\pi} q_o}{F}} \exp\left[\frac{2}{3} \sigma^6 - 2 \sigma^3 Z^* - y^2\right] \exp(-i y \partial/\partial x) Ai(-(2\sigma x - \sigma^4)) \quad (39)$$

donde el operador  $\exp(-i y \partial/\partial x)$  actúa sobre la función de Airy real.

Para evaluar la expresión (39) tendremos en cuenta que la función de Airy  $Ai(z)$  admite una expansión en series de potencias de la variable  $z$ , real o compleja [9]. Al ser esto así podemos considerar en general una función  $F(z)$  que admite la expansión de Taylor

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(z_o) (z - z_o)^n \quad (40)$$

en la vecindad de un punto  $z_o$  del plano complejo, de tal manera que

$$F(z + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(z_0) z^n. \quad (41)$$

En particular, si  $z_0 = x$  y  $z = -iy$ , entonces

$$F(x - iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(x) (-iy)^n = \exp\left(-iy \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) \quad (42)$$

Finalmente, como consecuencia de (42) la relación (39) se puede interpretar como

$$\phi_E(q, p) = \alpha \sqrt{\frac{2\sqrt{\pi} q_0}{F}} \exp\left[\frac{2}{3} \sigma^6 - 2 \sigma^3 Z^* - y^2\right] Ai(-(2\sigma Z^* - \sigma^4)) \quad (43)$$

donde la función de Airy se evalúa ahora en un punto del plano complejo  $Z$ , conectado con las variables de posición e impulso a través de la relación

En la Fig.-1 se muestra el comportamiento del módulo al cuadrado de la función de onda en representación- $qp$  para energía cero y diferentes valores del parámetro  $\alpha$ , donde las unidades de longitud e impulso se han tomado con el valor de uno. La cantidad  $|\phi_E(q, p)|^2 dq dp$  representa la probabilidad de encontrar la partícula en un estado coherente  $|q, p\rangle$  dentro del elemento  $dq dp$ . La estructura de la función cambia rápidamente dependiendo del valor del parámetro  $\alpha$  hasta alcanzar el comportamiento semicásico cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Para terminar esta sección es conveniente indicar una manera alternativa de evaluar la función de onda- $qp$ . Si tenemos en cuenta la identidad

$$(p + B v) \exp[-izv] = \left(p + iB \frac{\partial}{\partial z}\right) \exp[-izv]$$

es fácil verificar la relación

$$\tilde{M}(p + B v) \exp[-izv] = \tilde{M}\left(p + iB \frac{\partial}{\partial z}\right) \exp[-izv]. \quad (45)$$

Como consecuencia, podemos emplear esta identidad en la ecuación (32), extraer el operador diferencial del signo integral, identificar la integral resultante con la función de onda en representación de coordenadas. Esto es,

$$\phi_E(q, p) = \sqrt{2\pi\hbar} \tilde{M}\left(p + iB \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\alpha}{\sqrt{F}} Ai(-z) = \sqrt{2\pi\hbar} \tilde{M}\left(p + i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) \phi_E(q) \quad (46)$$

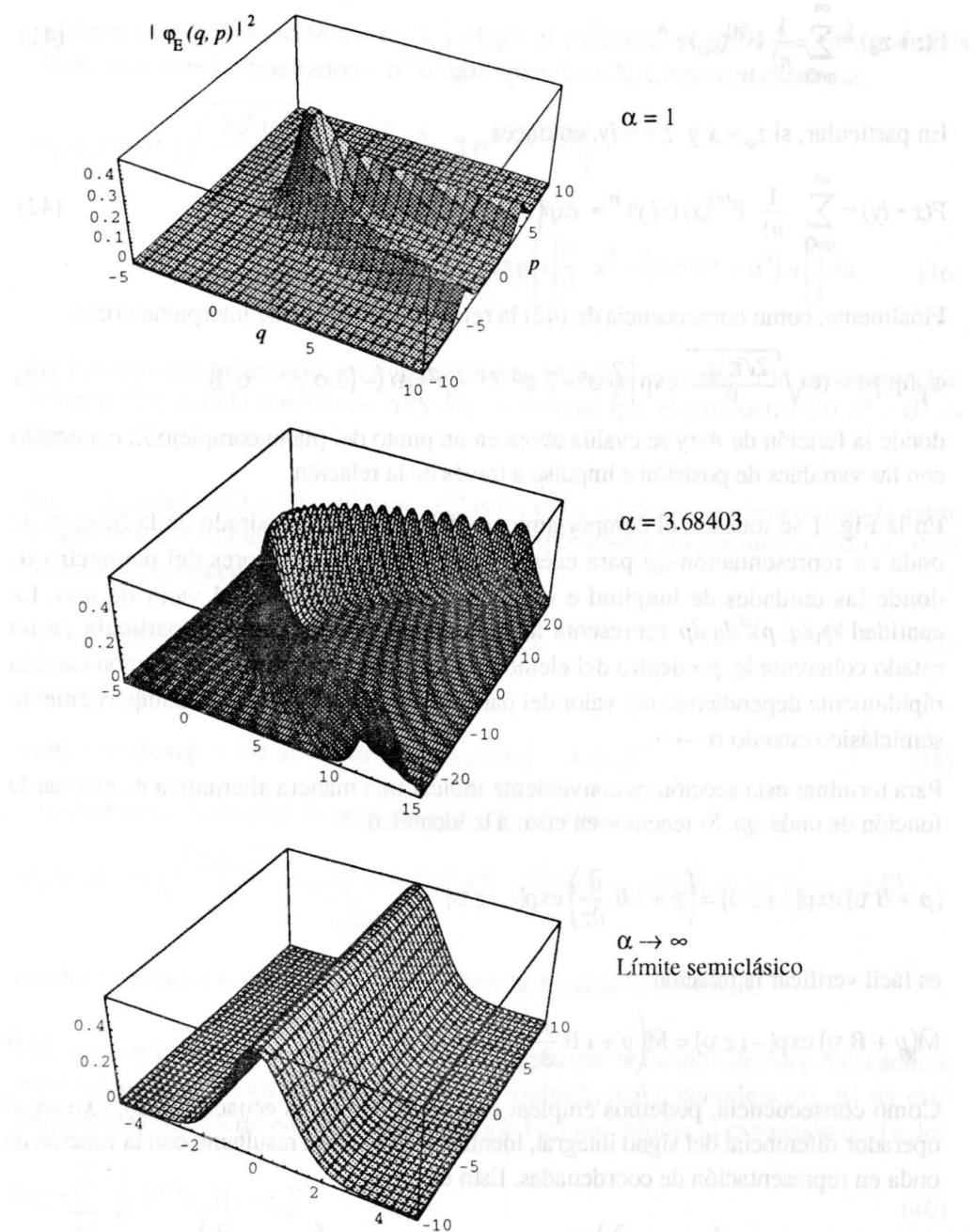


Figura-1. Módulo al cuadrado de la función de onda- $qp$  para energía cero y diferentes valores de  $\alpha$ . Para energía diferente de cero la gráfica se desplaza rígidamente a lo largo del eje  $q$ , hacia la izquierda si  $E > 0$  y hacia la derecha si  $E < 0$ .

#### 4. DISCUSION

La función de onda  $\varphi_E(q, p)$  permite generar inmediatamente la función de onda  $\varphi_E(p, q)$  a través de la relación  $\varphi_E(p, q) = w^*(q, p) \varphi_E(q, p)$ . A partir de estas funciones podemos reconstruir igualmente las funciones de onda en representaciones de coordenadas e impulsos por medio de las transformaciones [4]

$$\varphi_E(q) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi} p_o)^{1/2} (2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_E(q, p) dp \quad (47)$$

$$\tilde{\varphi}_E(p) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi} q_o)^{1/2} (2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_E(p, q) dq \quad , \quad (48)$$

las cuales indican la manera como se suman las amplitudes de probabilidad en el espacio de fase con el fin de generar amplitudes de probabilidad en posición e impulso, respectivamente.

A partir de la representación integral (25) podemos deducir la relación

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha A_i(\alpha \xi) = \delta(\xi) . \quad (49)$$

Ahora bien, en virtud de la definición (20), el valor de  $\alpha$  aumenta cuando crece la masa de la partícula o la intensidad de la fuerza, o cuando consideramos la situación hipotética en la cual la constante de Planck tiende a cero. Cualquiera de estas situaciones corresponde a una *situación semicásica*. En este límite, por sustitución de (49) en (27), obtenemos inmediatamente

$$\varphi_E(q, p) = \frac{1}{\sqrt{F}} w\left(q + \frac{E}{F}, p\right) M\left(q + \frac{E}{F}\right) \quad (50)$$

$$\varphi_E(p, q) = \frac{1}{\sqrt{F}} w\left(\frac{E}{F}, p\right) M\left(q + \frac{E}{F}\right) \quad , \quad (51)$$

donde la última ecuación surge de combinar (1) con (50). Al reemplazar (50) en (47) y (51) en (48) obtenemos las expresiones semicásicas para las funciones propias del Hamiltoniano en representación de coordenadas e impulsos, respectivamente:

$$\varphi_E(q) = \frac{1}{\sqrt{F}} \delta\left(q + \frac{E}{F}\right) \quad (51)$$

$$\tilde{\Phi}_E(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}} w\left(\frac{E}{F}, p\right) . \quad (52)$$

La ecuación (51) coincide con el resultado exacto que se obtiene al aplicar la propiedad (47) de las funciones de Airy a la función de onda (22) en representación de coordenadas. Esto es, con la presente aproximación se obtiene aún en el límite semicásico (en el sentido  $\alpha \rightarrow \infty$ ) la solución exacta y no se ha destruido la conexión vía transformada de Fourier que forzosamente rige para las funciones de onda  $\phi_E(q)$  y  $\tilde{\Phi}_E(p)$ .

El parámetro  $\alpha$ , que rige el comportamiento del sistema, tiene dimensiones del inverso de longitud, y su valor está determinado por un efecto combinado de la masa de la partícula, la intensidad del campo de fuerza y la constante de Planck. De la definición de  $\alpha$  es claro que  $\hbar\alpha$  representa un impulso lineal característico del sistema, el cual debe ser suficientemente grande para garantizar la validez de la ecuación (52) que gobierna el comportamiento semicásico de la función de onda en representación de impulsos. Como (52) se obtiene directamente de (17) sólo si la masa de la partícula se hace muy grande (manteniendo  $F$  y  $\hbar$  como constantes), entonces el comportamiento semicásico que hemos considerado en el presente papel está asociado básicamente con la masa de la partícula y no con la situación hipotética en la cual la constante de Planck se hace tender a cero con el fin de despreciar los efectos mecánico cuánticos.

## REFERENCIAS

- [1] K. Takatsuka, Phase-space representation of quantum mechanics and its relation to phase-space path integrals, Phys. Rev. A, 39, 5961 [1989].
- [2] Y.S. Kim and W.W. Zachary, ed., The Physics of Phase Space, Springer, Berlin (1987).
- [3] D. Rapp, Quantum Mechanics, Holt, Rinehart and Winston, New York (1971).
- [4] D. Campos, Funciones de onda en el espacio de fase, Momento 6, 3 (1992).
- [5] R. J. Glauber, Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, Phys. Rev., 131, 2766 (1963).
- [6] J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan, Fundamentals of Quantum Optics, Benjamin, New York (1968).
- [7] W. Louisell, Radiation and Noise in Quantum Electronics, McGraw-Hill, New York (1964).
- [8] D. Campos, Teoría de Sistemas Cuánticos, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá (1989).
- [9] M. Abramowitz and A. Stegun, Hanbook of Mathematical Functions, Dover, New York (1970).
- (10) H. Hochstadt, The Functions of Mathematical Physics, Wiley, New York (1971).