MOMENTO Revista del Depto de Física U. Nacional de Colombia. Número 9, Octubre de 1993

DETECTORES DE PARTICULAS SOBRE VARIEDADES NO MINKOWSKIANAS

J. M. Tejeiro
Departamento de Física. Universidad Nacional
Santafé de Bogotá

RESUMEN

Se discuten los conceptos de vacío y partícula utilizando diferentes modelos de detectores y se comparan con aquellos derivados del método de segunda cuantización sobre variedades no Minkowskianas.

ABSTRACT

The concepts of particle and vacuum are discussed using differents detector's models and are compared with those that arise from the second quantization method on a non-Minkowskian manifold.

1. INTRODUCCION

Desde los orígenes de la mecánica cuántica se intentó cuantizar la interacción gravitacional (Schrödinger 1930) encontrándose sistemáticamente con una serie de problemas, tanto de caracter matemático como de interpretación, que han dejado a la gravedad al margen de la teoría cuántica de las interacciones fundamentales [1]. Es de anotar en este punto que, aparte de los problemas mencionados, nos encontramos también con el hecho de que la interacción gravitacional es varios órdenes de magnitud más pequeña que la más débil de las otras interacciones fundamentales de la naturaleza, haciendo los efectos cuánticos de gravedad inobservables a las escalas de energía disponibles. Sin embargo la necesidad de una teoría cuántica de la gravedad no es solo de carácter formal pues es sabido que el modelo estándar de las partículas fundamentales, el cual unifica las interacciones fuerte-electro-débil, presenta una serie de problemas cuya solución posiblemente requiere de la unificación de la interacción gravitacional. Además los recientes desarrollos de la cosmología pueden permitir una "prueba indirecta" de los efectos cuánticos de la gravedad.

Uno de los posibles caminos para acercarse a un modelo cuántico de la gravedad es trabajar en la aproximación semiclásica, en donde el campo gravitacional es descrito por las ecuaciones de campo de Einstein, mientras que los campos de materia son cuantizados de la manera usual [1]. Este esquema de aproximación se conoce con el nombre de Teoría Cuántica de Campos sobre Variedades Curvas, es decir el estudio de los efectos del campo gravitacional sobre los campos cuánticos de materia. Uno de los resultados más importantes de esta aproximación es el efecto Hawking, i.e. la emisión de radiación por un agujero negro [2, 3].

Aún dentro de este esquema, en donde el campo gravitacional no es cuantizado, surgen problemas en la interpretación del formalismo de cuantización de los campos de materia, en particular en lo referente a los conceptos de vacío y partícula [4]. Estos problemas tienen su origen en la pérdida de invarianza de la teoría bajo el grupo de Poincaré, y por esta razón aún en el espacio-tiempo Minkowskiano (ausencia de la gravedad) podemos ver las dificultades de definir unívocamente el estado de vacío y partícula, cuando se consideran observadores acelerados o la variedad espacio-tiempo presenta fronteras [5, 6 ,7].

Un método para analizar los conceptos de vacío y partícula es trabajar con un modelo de detector de partículas, es decir un hamiltoniano de interacción campo-aparato de medida (detector) [8]. El objetivo central del presente artículo es analizar diferentes modelos de detectores en el marco de los postulados básicos de la teoría cuántica de campos.

2. DETECTORES DE PARTICULAS

Un objeto físico cuya forma de acción sobre el sistema es conocida puede ser utilizado como un "aparato de observación" o "detector". Sinembargo el detector debe satisfacer ciertas propiedades para poder decidir sobre su respuesta: En primer lugar el estado del detector debe estar correlacionado con el estado del objeto por observar, además el detector gana información sobre el sistema por medio de alguna interacción, y finalmente es claro que dependiendo del tipo de medida que se quiera realizar, por ejemplo distribución de impulsos, dirección de spin, masa, carga, etc., será necesario, en general, considerar para cada uno de estos casos un tipo especial de detector.

Definamos un detector de partículas de un campo cuántico de materia como un modelo mecánico-cuántico, que conduce a una distribución energética en la representación número de ocupación de estados del campo cuántico. Esta definición puede realizarse por medio de un modelo mecánico-cuántico con grados de libertad internos, en donde la interacción del detector con el campo cuántico, descrita por un hamiltoniano de interacción $\mathcal{H}_I$, produce una transición interna en el estado del detector.

El primer modelo de detector que se trabajó, llamado detector de Unruh-DeWitt [8], consiste en una interacción puntiforme, es decir una interacción de monopolo. En este modelo de detector, para poder dar una distribución de la energía de las partículas, se requiere realizar las medidas sobre amplios intervalos de tiempo. Normalmente se describe la interacción considerando teoría de perturbaciones dependiente del tiempo hasta el primer orden.

Sea $x(\tau)$ la línea de universo del detector, con τ un parámetro afín, el cual, como es usual, mide el tiempo propio del detector. La densidad lagrangiana de interacción, $\mathcal{L}_I = \mathcal{H}_I$ relacionada con el hamiltoniano de interacción por

$$\mathcal{L}_x = \alpha m(\tau)\Phi(x(\tau)) \tag{1}$$

en donde α es una constante de acoplamiento y $m(\tau)$ un operador el cual actúa sobre el estado del campo cuántico, produciendo una transición de un estado de energía E_0 a otro de energía E. Los primeros términos del operador de transición (o matriz S) están dados por:

$$S = 1 + i\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(x(\tau_1))\, d\tau_1 + i^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(\mathcal{L}(x(\tau_1)),\, \mathcal{L}(x(\tau_2)))\, d\tau_1\, d\tau_2 + \ldots \tag{2}$$

Puesto que $m(\tau)$ se transforma como un escalar bajo transformaciones de Lorentz, se le llama a este modelo detector de monopolo. Además, supongamos que este operador depende solamente del tiempo propio del detector y no de su posición. Sea $\mathcal{H}_0$ el hamiltoniano no perturbado del sistema detector. En la descripción de interacción la evolución temporal del operador del sistema está dada por:

$$m(\tau) = e^{i\mathcal{H}_0\tau} m(0) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \tag{3}$$

Donde $\mathcal{H}_0|E\rangle = E|E\rangle$.

La amplitud de transición para que el sistema pase de un estado $|\Phi_0,E_0\rangle$ a otro estado $|\Phi,E\rangle$ bajo la acción del operador S está dada, en primera aproximación, por:

$$\langle\Phi,E|S|E_0\Phi_0\rangle = i\alpha\langle E|m(0)|E_0\rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau(E-E_0)} \langle\Phi|\Phi(x(\tau))|\Phi_0\rangle \tag{4}$$

esto significa que la amplitud de transición buscada es la transformada de Fourier de la amplitud de transición del operador de campo: $<\Phi|\Phi(x(\tau))|\Phi>$. Sea $\{|\Phi>\}$ un sistema completo de estados propios del operador de campo y $d\mu(\Phi)$ la medida de integración en el espacio de Hilbert de los estados del campo. Entonces la probabilidad de transición está dada por:

$$P = \int |i\alpha<\Phi,E|S|E_0\Phi_0>|^2 d\mu(\Phi) = \alpha^2|<E|m(0)|E_0>|^2 F(\Delta E) \qquad (5)$$

El primer término $\alpha^2|<E|m(0)|E_0>|^2$ depende únicamente del detector, mientras que la función $F(\Delta E)$, llamada función respuesta, es independiente de los detalles del detector y representa la distribución de partículas del campo cuántico:

$$F(\Delta E) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\Delta E} G^+(x(\tau_1);x(\tau_2))\, d\tau_1\, d\tau_2 \qquad (6)$$

en donde $G^+(x(\tau_1);x(\tau_2)) = <\Phi_0|\Phi(x(\tau_2))\Phi(x(\tau_1))|\Phi_0>$ es la función de Green-Wightman, la cual es una función de la trayectoria del detector (cuando el campo está inicialmente en el estado de vacío). Consideremos primero el caso de un campo escalar sin masa cuya función de Green-Wightman está dada por [1]:

$$G^+(x(\tau_1);x(\tau_2)) = \frac{1}{[x^0(\tau_2) - x^0(\tau_1)]^2 - [\vec{x}(\tau_2) - \vec{x}(\tau_1)]^2} \qquad (7)$$

Para un detector en reposo cuya línea de universo está dada por $x(\tau) = (\tau,0,0,0)$ la función respuesta toma la forma

$$F(\Delta E) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\Delta\tau\Delta E}}{|\Delta\tau - i\epsilon|}\, d\Delta\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\Sigma_\tau \qquad (8)$$

La divergencia que surge en la última integral se puede eliminar formalmente introduciendo una función de corte, en donde el integrando es diferente de cero solo para un intervalo de tiempo finito, pues éste entra solo como un factor proporcional al tiempo de medida en la función respuesta. Así se obtiene una probabilidad de transición por unidad de tiempo. Teniendo esto en cuenta la función respuesta, después de una integración en el plano complejo, toma la forma:

$$F(\Delta E) = \frac{\Delta E}{2\pi}\Theta(-\Delta E) \tag{9}$$

en donde $\Theta(x)$ es la función paso. Esto significa que si el detector se encuentra inicialmente en su estado base entonces $\Delta E>0$ y la función respuesta es cero, i.e. el detector no absorbe energía del campo (no detecta partículas). La misma conclusión es cierta si el detector se mueve a velocidad constante. Ahora, si el detector en reposo está en un estado del campo diferente del vacío, por ejemplo en un estado $|n_k>$ de n_k partículas de momentum $\vec{k}$, la función respuesta del detector se compone de tres términos (este resultado se sigue del cálculo del valor esperado $<n_k|\phi(x(\tau_2))\phi(x(\tau_1))|n_k>$:

$$F(\Delta E) = \frac{\Delta E}{2\pi}\Theta(-\Delta E) - \frac{n_k}{4\pi^2 k^0}\delta(-\Delta E - k^0) - \frac{n_k}{4\pi^2 k^0}\delta(-\Delta E + k^0) \tag{10}$$

El primer término es el obtenido para el estado de vacío. El segundo corresponde a la absorción de un quantum del campo si la energía de éste coincide con la energía de transición del detector. El último término se puede llamar un término de emisión estimulada en caso de que el detector se encuentre en un estado exitado.

Consideremos ahora el caso de un detector acelerado en el estado de vacío de un campo cuántico escalar. Supongamos que el detector posee una aceleración propia constante α, entonces su linea de universo, haciendo coincidir el eje x con la dirección de la aceleración, está dada por [9]

$$(\alpha \sinh(\tfrac{\tau}{\alpha}), \alpha \cosh(\tfrac{\tau}{\alpha}), 0, 0)$$

la función de Green-Wightman está dada por:

$$G^+(x(\tau_1); x(\tau_2)) = -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}[\Delta\tau - i\epsilon + 2i\pi\alpha k]^2 \tag{11}$$

Remplazando en la ecuación (6) para la función respuesta, integrando en el plano complejo y cerrando el círculo en el plano inferior para efectos de convergencia, obtenemos

$$F(\Delta E) = \frac{\Delta E}{2\pi}\frac{1}{e^{2\pi\Delta E\alpha} - 1} \tag{12}$$

La interpretación física de esta expresión es directa: Un detector uniformemente acelerado con respecto al vacío Minkowskiano registra una distribución térmica de partículas a una temperatura proporcional a su aceleración $T = 1/2\pi\alpha k_B$. Aquí surge la pregunta: de donde sale la energía para producir los cuantos que registra el detector? En primera instancia se podría responder que el trabajo lo suple la fuerza externa que acelera al detector, sin embargo esta respuesta presenta serias dificultades, pues como veremos enseguida los conceptos de vacío y partícula están estrechamente relacionados con el grupo de isometrías de la variedad Minkowskiana, i.e. con el grupo de Poincaré [10]. Recordemos rápidamente la definición de vacío en la Teoría Cuántica de Campos (TCC). El operador de campo se expande en un conjunto completo de funciones de frecuencia positiva y negativa (ondas planas): $\{f_k(x) = e^{-i\omega t} g_{\vec{k}}(\vec{x})\}$ y su compleja conjugada, donde los coeficientes son los operadores de aniquilación y creación a_k y a_k^+. El estado de vacío se define como:

$$a_k|0> = 0 \qquad \forall k \tag{13}$$

Sin embargo esta escogencia del vacío no es única, pues si elegimos otras coordenadas, por ejemplo (τ, ξ, v, ζ) relacionadas con las canónicas por $x = \xi\, cosh(\tau/\alpha)$ $x = \xi\, sinh(\tau/\alpha)$ $y = v$ $z = \zeta$ con α una constante, la métrica toma la forma $ds^2 = \frac{1}{\alpha^2}\xi^2 d\tau^2 - d\xi^2 - dv^2 - d\zeta^2$. Claramente esta métrica es estacionaria con respecto a la nueva coordenada temporal τ y representa el sistema de coordenadas propio para un observador acelerado. Veamos entonces qué sucede con la TCC. Como la métrica es estacionaria con respecto a τ la ecuación de Klein-Gordon puede ser separada en modos de frecuencia negativa y positiva respecto a τ y el conjunto completo de funciones para expandir el operador de campo será $\{g_{v\vec{k}}(x) = N_{v\vec{k}}\, e^{-iv\tau + i\vec{k}\cdot\vec{y}} K_{iv}(k\xi/\alpha)\}$ en donde $\vec{k} = (k_v, k_\xi)$, $\vec{y} = (v, \zeta)$, $k = |\vec{k}|$, $K_{iv}(x)$ las funciones de Bessel de orden y argumento imaginario y $N_{v\vec{k}} = (sinh(\nu\pi))^{1/2}/2\pi^2$ la constante de normalización. Expandiendo el operador de campo en estos nuevos modos del campo

$$\Phi(x) = \int_0^\infty d\nu \int [b_{v\vec{k}}\, g_{v\vec{k}} + b^+_{0\vec{k}}\, g^*_{0\vec{k}}\,]\, d\sigma(\vec{k}) \tag{14}$$

con $b_{v\vec{k}}$ y $b^+_{0\vec{k}}$ los correspondientes operadores destrucción y creación respectivamente en la nueva base. El valor esperado del operador número de ocupación $N_{v\vec{k}} = b^+_{0\vec{k}}\, b_{v\vec{k}}$ en el estado de vacío de

Minkowski está dado por

$$<0|N_{v\vec{k}}|0> = \frac{1}{e^{2\pi\alpha v} - 1} \tag{15}$$

Así el vacío de Minkowski aparece para el observador acelerado como un estado térmico a la temperatura T = $1/2\pi\alpha k_B$. Este resultado, puesto que es independiente de los detalles del detector, haría pensar que las partículas detectadas por el observador de monopolo provienen efectivamente del campo cuántico, y de algún agente externo responsable, por ejemplo, de la aceleración del detector. Sin embargo con esta interpretación hay un problema: Consideremos un detector en el espacio-tiempo de Minkowski que gira con velocidad angular constante, cuya linea de universo es $x(\tau) = (c\tau, R\cos(\omega\tau), R\sin(\omega\tau), 0)$. Entonces de la ecuación (7) obtenemos la función de Green-Wightman, la cual conduce a una función respuesta cuyo espectro es no térmico. Ahora, si tratamos el problema de la TCC sobre una variedad Minkowskiana con tensor métrico $g_{\mu\upsilon} = diag(-1 + r^2\frac{\omega}{c}, 1, r^2, 1)$ entonces un conjunto de funciones base para la ecuación de Klein-Gordon en estas coordenadas es:

$$h_{qmk} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2cq + m\omega/c}}\, e^{-i(qt - m\theta - k_z z)} J_m(\omega r) \tag{16}$$

en donde $\omega^2 = (q + m\omega/c)^2 - k^2_z$ y J_m las funciones de Bessel. El valor esperado del operador número de ocupación (calculado con los operadores de creación y destrucción obtenidos al expandir el operador de campo en esta base) en el vacío de Minkowski es cero. Esto significa que las definiciones de vacío de un observador rotante y uno inercial están de acuerdo, a pesar de que la respuesta de un detector en reposo relativo con el observador rotante no es nula. Este ejemplo nos muestra que en general no hay un acuerdo entre los conceptos de vacío y partícula, cuando se analizan desde el punto de vista de la TCC y de un modelo de detector, aun cuando en el caso de un observador y un detector uniformemente acelarado si haya acuerdo (ver ecuaciones 12 y 15).

3. EQUIVALENCIA DE DETECTORES

Al problema planteado en la última sección, esto es, la no unicidad de la definición de vacío y partícula en el marco de la TCC, no se le ha encontrado una solución satisfactoria y es hoy día un campo de investigación activo [1, 11, 12}. De hecho existe una estrecha relación entre este problema y la, hasta ahora esquiva, Teoría Cuántica de la Gravedad, pues la presencia del campo gravitacional conduce a que el grupo de Poincaré deje de ser el grupo de isometrías de la variedad espacio-tiempo, sobre el cual están basados los conceptos de vací o y partícula en la TCC sobre el espacio de Minkowski. El estudio de los detectores de partículas es uno de los métodos que se utilizan para investigar esta clase de problemas y, como se dijo en la introducción, se han trabajado diferentes tipos de modelos, los cuales describiremos brevemente.

I. Detector de monopolo o Unruh-DeWitt cuya lagrangiana de interacción está dada por la ecuación (1); fué discutido en algun detalle en el numeral anterior.

II. Detector cuadrático $\mathfrak{D}_c$, en donde la Lagrangiana de interacción está dada por:

$$\mathcal{L} = \alpha_2 m((x\tau))\Phi(x(\tau))^2 \tag{17}$$

La forma de interacción de este modelo es similar a la de monopolo, sin embargo cuando se calcula la función respuesta surgen divergencias debido a que da lugar a funciones de Green-Wightman de la forma $G^+(x,x)$ las cuales deben ser renormalizadas. La función respuesta renormalizada para este modelo da algunos términos adicionales a los del modelo de Unruh-DeWitt, los cuales cambian un poco los detalles del comportamiento del detector.

III. Detector acoplado derivativamente $\mathfrak{D}_D$, con lagrangiana de interacción dada por:

$$\mathcal{L} = \alpha_3 m^\mu((x\tau))\partial_\mu\Phi(x(\tau)) \tag{18}$$

Hinton [13, 14] utiliza este modelo como alternativo al de Unruh-DeWitt e investiga su comportamiento para diferentes M^μ sobre variedades de Rindler y Schwarzschild.

Un punto importante es en qué medida los diferentes tipos de modelos son equivalentes, es decir que ellos nos permitan sacar conclusiones independientes del tipo de detector usado. Para este fín definamos la equivalencia entre diferentes tipos de detectores de la siguiente manera [14]:

Sea $\mathfrak{D}$ el modelo de detector y $S = \{s_i|$ *todas la situaciones en las cuales* S *puede encontrarse*$\}$. Por "situaciones" queremos significar lo siguiente: un conjunto de factores externos tales como: -El estado del campo cuántico en el cual el detector se encuentra; -El estado de movimiento del detector; -Las propiedades de la variedad espacio-tiempo; -La orientación del detector. Sea $S(s_i)$ la reacción del detector (la función respuesta) en la situación s_i. Entonces dos situaciones s_i y s_j son $\mathfrak{D}$-equivalentes si $\mathfrak{D}(s_i) = \mathfrak{D}(s_j)$. De esta forma la $\mathfrak{D}$-equivalencia particiona al conjunto S en clases de equivalencia:

$$S^{\mathfrak{D}} = \{\textit{todas las clases } \mathfrak{D} \textit{ equivalentes de } S\} \qquad (19)$$

Para poder aplicar el concepto de equivalencia de detectores es necesario generalizar las funciones respuesta calculadas, pues ellas han sido evaluadas en situaciones muy particulares. Con respecto a los tres modelos de detectores bosquejados en el presente artículo la situación se puede resumir en los dos conjuntos siguientes: $S_1 = \{$*estados de particula independientes del tiempo en el espacio-tiempo Minkowskiano* $(\mathcal{M},\eta)$ *con detectores estacionarios*$\}$ y $S_2 = \{$*estados de vacío de Minkowski con detectores sobre una línea de universo como de tiempo en* $(\mathcal{M},\eta)\}$. Entonces $\mathfrak{D}_u$ y $\mathfrak{D}_c$ son S_1-equivalentes, $\mathfrak{D}_u$ y $\mathfrak{D}_c$ son S_2-equivalentes, pero $\mathfrak{D}_u$, $\mathfrak{D}_D$ y $\mathfrak{D}_c$ son S_3-equivalentes, en donde S_3 es un subconjunto de S_2 restringido por la condición de que el detector posea una linea de universo estacionaria.

Esta formalización del concepto de equivalencia de detectores permite discutir, de una manera independiente del modelo, los conceptos de vací o y partícula, sin embargo como lo ilustramos en los ejemplos anteriores en donde hicimos uso de la definición de vacío utilizando la cuantización del campo de materia, en situaciones semejantes a la de los detectores de partículas, (coordenadas en el sistema estacionario del detector), nos encontramos con la no equivalencia de estos conceptos.

CONCLUSIONES

Hemos mostrado en el presente artículo que la simple extensión de la formulación de la TCC a sistemas acelerados conduce a una interpretación inconsistente de los conceptos de vacío y partícula. Esta clase de problemas, además de otros de caracter matemático, han estado presentes en todos los intentos para desarrollar una teoría cuántica de la gravedad, pues parece que el factor común a la clase de dificultades con que nos encontramos cuando se tiene en cuenta el campo gravitacional es la perdida de la invarianza de la teoría bajo el grupo de Poincaré. Para finalizar se formularán algunas preguntas, que hasta el presente permanecen abiertas y que merecen capítulos aparte para su discusión.

Es el "efecto Unruh" (detectores de partículas) un resultado general susceptible de verificación experimental, o es tan solo un "GedankenExperiment" que refleja alguna contradición lógica de la teoría?

Existe una manera de formular la TCC sin hacer uso de un sistema especial de soluciones de la ecuación de campo, para efectos de solucionar el problema, por lo menos localmente, de una definición del estado de vacío y partícula independiente del observador?

Los conceptos de vacío y partícula son necesriamente globales, al ser definiciones covariantes bajo el grupo de Poincaré, entonces: es posible dar una formulación de la TCC la cual no requiera, para su interpretación, recurrir a conceptos globales?, i.e., una formulación general covariante de la TCC en la cual sea posible calcular efectos puramente locales, independientes de la estructura topológica de la variedad espacio-tiempo?

Estas preguntas están lejos de agotar todos los posibles caminos para abordar el problema de la Teoría Cuántica de la Gravedad, y no sabemos si ellas tienen sentido. Pero los problemas que aquí se han bosquejado muestran que la fí sica está enfrentada a uno de los dilemas más profundos de este siglo, cuya solución podría conducirnos a cambios radicales en nuestros conceptos físicos.

REFERENCIAS

[1] N. D. Birrel, P. C. W. Davies. "Quantum Fields in Curved Space". Cambridge 1986, Cambridge University Press.
[2] S. Hawking. Commun. Math. Phys. 43,199 (1975)
[3] D. Polarski. Class. Quantum Grav. 6,717 (1989)
[4] B. S. DeWitt. Phys. Reports 19c,297 (1975)
[5] P. G. Grove. Class. Quantum Grav. 3,801 (1986)
[6] R. Padmanabhan. Class. Quantum Grav. 2,117 (1985)
[7] G. Plunien, B. Mueller, W. Greiner. Phys. Reports 134,87(1986)
[8] W. G. Unruh. Phys. Rev. D14,870 (1976)
[9] W. Rindler. Essential Relativity: Special, General and Comological, Van Nostrand, New York 1963
[10] J. M. Tejeiro. Momento, 6,45 (1992)
[11] P. C. Davies. Class. Quantum Grav. 6,1041 (1989)
[12] M. Kretzschmar, W. Fugmann. Il Nuo. Cimento 103B,389 (1989)
[13] K. J. Hinton. J. Phys. A: Math. Gen. 16,1937 (1983)
[14] K. J. Hinton. Class. Quantum Grav.1,27 (1984) }