

# Análisis por Elementos Finitos del Amplificador de Fibra Óptica Dopada con Erblio

P. Torres

Grupo Teórico de Óptica Cuántica

Departamento de Física. Universidad Nacional. Bogotá

## Resumen

Se analiza el amplificador de fibra óptica dopada con iones de Erblio utilizando un modelo teórico semiclásico donde los dopantes de la fibra son tratados como un sistema atómico de tres niveles, obteniéndose la expresión de la susceptibilidad atómica compleja que produce la amplificación de una señal. La ecuación de onda se soluciona por el método escalar de elementos finitos generalizado para obtener la constante de propagación compleja responsable por la amplificación. Se presentan resultados para la ganancia y la constante de propagación compleja.

## Abstract

Erbium-doped fiber optical amplifier is analyzed using a semiclassical theory, where we calculate the complex atomic susceptibility of dopant as modeled as a three level atomic system. The complex propagation constant is obtained solving the wave equation by a generalized scalar finite element method. Results to the gain and the complex propagation constant are showed.

## 1 Introducción

Desde 1985, cuando en la Universidad de Southampton [1] reportaron una técnica para fabricar fibras ópticas dopadas con iones trivalentes de tierras raras (Nd, Er, Pr, Ho, Tm), se inició una importante generación de fibras ópticas que se pueden usar como un tipo novedoso de amplificador óptico. En la figura 1 se ilustra la configuración básica de este dispositivo; se observa que la fibra dopada queda acoplada transversalmente al bombeo, de esta manera una señal débil es amplificada

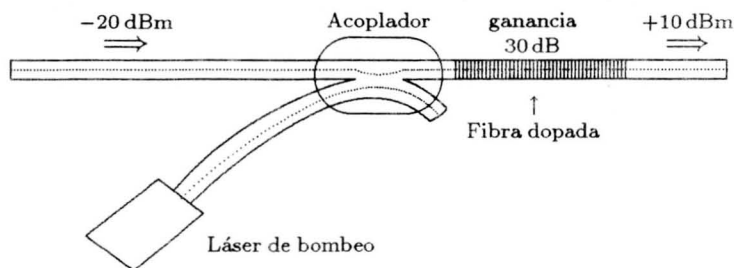


Figura 1: Configuración básica del amplificador óptico de fibra dopada

cuando atraviesa la fibra dopada con iones de tierras raras. El acoplador usado permite que la radiación de bombeo pase a la línea de transmisión y evita que la radiación de la señal que se amplifica pase a la rama del bombeo.

El amplificador óptico de fibra dopada con erbio (EDFA = Erbium Doped Fiber Amplifier) ha despertado gran interés debido a que el ión  $\text{Er}^{3+}$  posee una transición láser alrededor de  $1.536 \mu\text{m}$ , que permite amplificar las señales de los sistemas de comunicaciones por fibra óptica más modernos (longitudes de onda entre  $1.53 \mu\text{m}$  y  $1.55 \mu\text{m}$ ).

El proceso de amplificación que experimenta un haz de radiación que viaja a través de una fibra dopada se puede entender examinando la figura 2, que muestra el diagrama de niveles de energía del erbio relevantes en este proceso. La transición del estado  ${}^4I_{13/2}$  al  ${}^4I_{15/2}$  es una transición láser alrededor de  $1.536 \mu\text{m}$ ; la inversión de población entre estos dos estados se produce bombeando el ión  $\text{Er}^{3+}$  a algún estado superior del cual decae rápidamente, mediante transiciones mayoritariamente no radiativas, al estado  ${}^4I_{13/2}$ ; una vez creada la inversión de población, las señales que sean cuasi resonantes con la transición láser del medio activo se amplifican por emisión estimulada. La ganancia, esto es, la razón entre la intensidad de la señal a la salida con la intensidad de la señal a la entrada del amplificador, se ha estudiado bombeando el ión  $\text{Er}^{3+}$  con láseres de diferentes longitudes de onda ( $0.65 \mu\text{m}$ ,  $0.80 \mu\text{m}$ ,  $0.98 \mu\text{m}$ ,  $1.48 \mu\text{m}$ , ...). Diferentes reportes muestran que el máximo rendimiento se logra cuando se bombea con láseres de longitud de onda cercana a la banda  $1.48 \mu\text{m}$  [3, 4].

donde  $n(x, y)$  y  $\chi^{\text{Er}}(x, y)$  son los perfiles del índice de refracción de la fibra y de la susceptibilidad atómica de los dopantes sobre el plano transversal a la dirección de propagación;  $k_0$  es la constante de propagación en el vacío.

Para solucionar la ecuación (1) para geometrías, perfiles de índice de refracción y distribuciones de iones dopantes arbitrarios, se utiliza el método de elementos finitos escalar (SFEM = Scalar Finite Element Method) [7, 8, 9]. Esta técnica parte de la forma variacional de la ecuación (1):

$$\int \int_S \{(\delta \mathcal{E}_s) \nabla_t^2 \mathcal{E}_s + k_0^2 [n^2(x, y) + \chi(x, y)^{\text{Er}} - \beta^2] \mathcal{E}_s (\delta \mathcal{E}_s)\} dS = 0 \quad (2)$$

donde  $S$  es el área de la sección transversal de la fibra óptica dopada. Mediante el SFEM se soluciona la ecuación (2) discretizando el núcleo de la fibra y sus inmediaciones en subregiones (o elementos) de forma triangular, de modo que el problema se reduce a solucionar el problema de valores propios:

$$[A]\{\mathcal{E}_s\} = \beta^2[B]\{\mathcal{E}_s\} \quad (3)$$

donde:

$$[A] = \sum_e \int \int_{S_e} \left( k_0^2 (n_e^2 + \chi_e^{\text{Er}}) [N_e]^T [N_e] - \frac{\partial [N_e]^T}{\partial x} \frac{\partial [N_e]}{\partial x} - \frac{\partial [N_e]^T}{\partial y} \frac{\partial [N_e]}{\partial y} \right) dx dy \quad (4)$$

$$[B] = \sum_e \int \int_{S_e} [N_e]^T [N_e] dx dy$$

$\int \int_{S_e}$  denota integración sobre un elemento triangular; el subíndice  $e$ , la cantidad relativa a un elemento;  $[N_e]$  es una matriz que depende de las coordenadas de los vértices de los elementos triangulares; el vector propio  $\{\mathcal{E}_s\}$  contiene los valores del campo en cada uno de los vértices de los triángulos. Como se ve de la ecuación (4), en la expresión de la matriz  $[A]$ , se encuentra la susceptibilidad atómica del erbio  $\chi^{\text{Er}}$ , término que, como se mostrará más adelante, es complejo y, por lo tanto, hace al problema de valores propios complejo; desde este punto de vista se dice generalizar el SFEM, pues este método es más que todo usado para cálculos con  $[A]$  real [10].

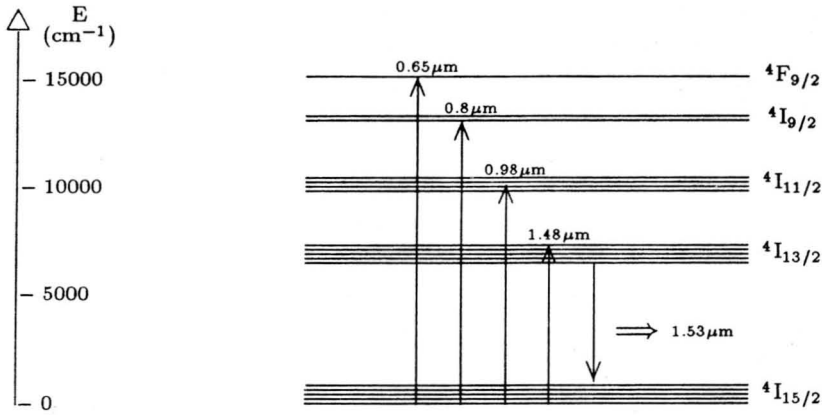


Figura 2: Diagrama de niveles del ión  $\text{Er}^{3+}$ , tomado de la referencia [2].

El estudio del EDFA por simulación numérica podría llevar a mejorar el diseño del amplificador, reducir costos de producción y tiempo de desarrollo de nuevos productos y sistemas.

El propósito de este trabajo es presentar un modelo teórico basado en un método de elementos finitos generalizado para simular la ganancia de una señal de onda continua por el EDFA bombeado a  $1.48 \mu\text{m}$ .

## 2 Método de análisis

El objetivo del análisis es evaluar el coeficiente de ganancia  $\varphi$  del modo fundamental para una señal débil en una fibra óptica monomodal dopada. Cuando  $\varphi$  es conocido, la ganancia se obtiene como  $\mathcal{G} = \exp(\varphi L)$ , donde  $L$  es la longitud del amplificador.

El coeficiente de ganancia modal está definido como  $\varphi = 2\text{Im}\{\beta\}$  [5], donde  $\beta$  es la constante de propagación modal compleja. Para obtener  $\beta$  se soluciona la ecuación de onda escalar que cumple la componente transversal mayoritaria del campo de la señal viajera en la fibra dopada [6]:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_s}{\partial y^2} - \beta^2 \mathcal{E}_s + k_o^2 n^2(x, y) \mathcal{E}_s + k_o^2 \chi^{\text{Er}}(x, y) \mathcal{E}_s = 0 \quad (1)$$

Para evaluar la susceptibilidad  $\chi^{\text{Er}}$ , es necesario modelar el ciclo bombeo-amplificación. El espectro de absorción de la transición  ${}^4I_{15/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$  tiene dos picos a 1.49 y 1.53  $\mu\text{m}$ ; por consiguiente se considera el estado  ${}^4I_{13/2}$  como compuesto por dos subniveles (2 y 3); de esta manera el campo de bombeo, con longitud de onda  $\lambda_p \approx 1.48\mu\text{m}$ , produce una transición del estado fundamental  ${}^4I_{15/2}$  (nivel 1 en el modelo) al subnivel 3, la cual es seguida por una transición no radiativa al subnivel 2; desde este último subnivel el sistema puede decaer por emisión estimulada de un fotón con longitud de onda  $\lambda = 1.53 - 1.55\mu\text{m}$  al nivel 1.

Siguiendo la dinámica arriba descrita, considerando los niveles de energía ensanchados homogéneamente y solucionando para campos de onda continua, se obtiene para la inversión de población entre los niveles 1 y 2, en la aproximación de ecuaciones de tasa de población:

$$N_2 - N_1 = \frac{R(x, y) - \gamma_2}{2W(x, y) + R(x, y) + \gamma_2} \quad (5)$$

donde  $N_i, i = 1, 2$  son las poblaciones de los niveles;  $\gamma_2$  la tasa de emisión espontánea del nivel 2.  $R(x, y)$  y  $W(x, y)$  son las tasas de bombeo y emisión estimulada, respectivamente, y están dadas por:

$$W = \frac{2|V_{21}|^2}{\gamma_{21}\hbar^2} \mathcal{L}_s = W_0 \mathcal{L}_s, \quad R = \frac{2|V_{13}|^2}{\gamma_{13}\hbar^2} \mathcal{L}_p = R_0 \mathcal{L}_p \quad (6)$$

con

$$\mathcal{L}_s = \frac{\gamma_{21}^2}{\gamma_{21}^2 + \Delta_{21}^2}, \quad \mathcal{L}_p = \frac{\gamma_{13}^2}{\gamma_{13}^2 + \Delta_{13}^2} \quad (7)$$

$V_{21} = \varphi_{21}\mathcal{E}_s$  y  $V_{13} = \varphi_{13}\mathcal{E}_p$  son los elementos matriciales reducidos de la interacción con el campo, donde  $\varphi_{ij}$  es el momento de dipolo eléctrico de la transición  $i \leftrightarrow j$ ;  $\Delta_{21} = (\omega_2 - \omega_1) - \omega_s$ ,  $\Delta_{13} = (\omega_1 - \omega_3) + \omega_p$ ;  $\hbar\omega_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , son las energías de los niveles atómicos;  $\gamma_{ij}$ , con  $i \neq j$ , son las tasas de relajación de fase.

En la aproximación de ecuaciones de tasa de población, la polarización del erbio está relacionada con la inversión de población según:

$$\mathcal{P}^{\text{Er}} = \frac{i\mathcal{N}^{\text{Er}}(x, y)|\varphi_{21}|^2\mathcal{E}_s}{\hbar} \mathcal{D}_{21}(N_2 - N_1) \quad (8)$$

Como esta polarización se relaciona con el campo de la señal a amplificar mediante  $\mathcal{P}^{\text{Er}}(x, y) = \epsilon_0\chi^{\text{Er}}(x, y)\mathcal{E}_s$ , se obtiene, junto con las ecuaciones

(5) y (8), la expresión de la susceptibilidad atómica compleja del EDFA:

$$\chi^{\text{Er}} = \frac{i\mathcal{N}^{\text{Er}}(x, y)|\wp_{21}|^2}{\epsilon_0\hbar} \mathcal{D}_{21} \left( \frac{R(x, y) - \gamma_2}{2W(x, y) + R(x, y) + \gamma_2} \right) \quad (9)$$

donde  $\mathcal{N}^{\text{Er}}(x, y)$  es el perfil de densidad de iones de Erblio y  $\mathcal{D}_{21} = (\gamma_{21} + i\Delta_{21})^{-1}$ . La componente imaginaria de  $\chi^{\text{Er}}$  es la responsable de la amplificación de la señal. La aparición de  $R(x, y)$  y  $W(x, y)$  en el denominador conduce a la saturación de la ganancia con la potencia de bombeo y con la intensidad de la señal. La componente real es la modificación del índice de refracción debida a la interacción con los iones  $\text{Er}^{3+}$ .

### 3 Resultados y discusión

El método requiere conocer, según la ecuación (4), el valor de  $\chi^{\text{Er}}$  en cada elemento triangular, valor que a la vez depende, como se ve en (9), del valor de los campos a amplificar y de bombeo en cada vértice de los triángulos. Para ello se soluciona con SFEM la ecuación de onda (1) sin el término de susceptibilidad  $\chi^{\text{Er}}$  a las longitudes de onda  $\lambda_s$  y  $\lambda_p$ , para luego, con los vectores propios calculados que correspondan a las distribuciones modales de interés, construir las matrices del problema de valores propios complejos de la ecuación (4).

En la figura 3 se muestra la curva de ganancia obtenida (línea continua) de un amplificador de fibra con núcleo de radio  $r_{\text{co}} = 2.0 \mu\text{m}$  y longitud  $L = 2.2 \text{ m}$  como función de la potencia de bombeo. La curva, considerando el perfil de dopado como  $\mathcal{N}^{\text{Er}}(r) = \mathcal{N}_0^{\text{Er}} \text{sech}^2(r/r_{\text{Er}})$ , con  $\mathcal{N}_0^{\text{Er}} = 1.56 \times 10^{23} \text{ iones/m}^3$  y  $r_{\text{Er}} = 1.75 \mu\text{m}$ , es la que mejor se ajusta a los resultados experimentales reportados por el grupo COST 217 [11]. Es importante mencionar que el valor de  $\mathcal{N}_0^{\text{Er}}$  se ajusta de modo que reproduzca el valor experimental de atenuación ( $\approx 6 \text{ dB/m}$ ); con esto quiero decir que la curva de ganancia también se puede reproducir con diferentes perfiles de dopado, sin embargo los valores de  $\mathcal{N}_0^{\text{Er}}$  no permiten reproducir dicho valor experimental de atenuación.

En la figura 4 se muestran las curvas de ganancia obtenidas en función de la potencia de la señal de entrada para diferentes potencias de bombeo del EDFA analizado. Se observa que cuando la potencia de bombeo y la potencia de la señal son ambas bajas, el EDFA opera en el régimen

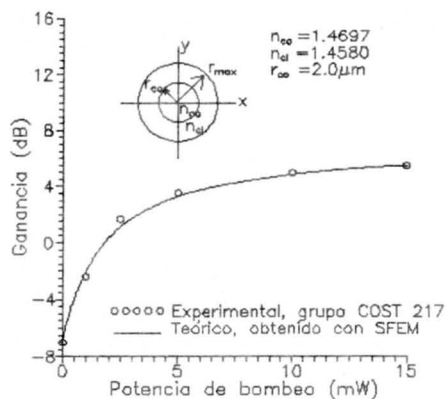


Figura 3: Ganancia de un EDFA de 2.2 m de longitud .vs. potencia de bombeo acoplada a la fibra. La longitud de onda de la señal es de  $1.536 \mu\text{m}$  y su potencia  $-32 \text{dBm}$ . La longitud de onda de bombeo es de  $1.486 \mu\text{m}$ .

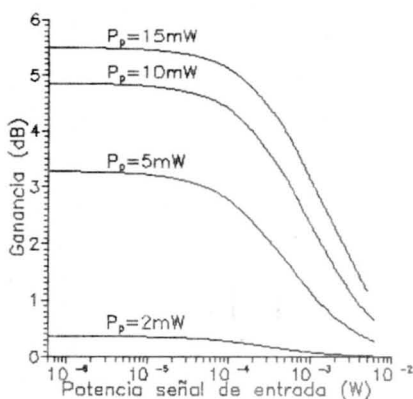


Figura 4: Ganancia del EDFA analizado .vs. potencia de la señal de entrada. Las longitudes de onda iguales al caso anterior.

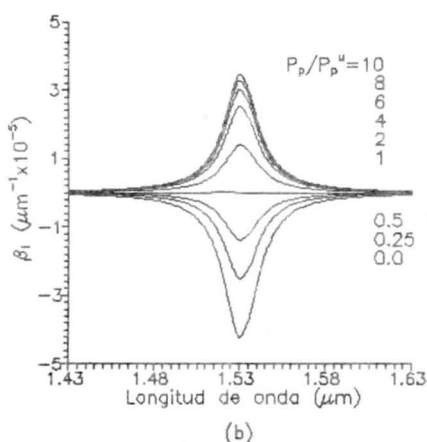
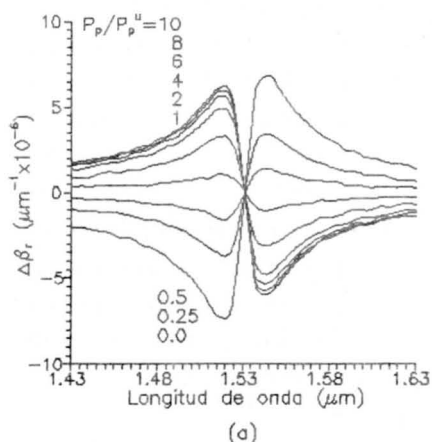


Figura 5: Espectros: (a) del cambio de la componente real y (b) de la componente imaginaria de la constante de propagación de una señal que viaja en un EDFA. La longitud de onda de bombeo y la potencia de la señal son iguales a las de la Figura 1.

de pequeña señal en el cual la ganancia es independiente de la potencia de la señal. En el otro extremo, cuando hay una señal fuertemente saturada, la fibra dopada actúa como un amplificador de potencia; la ganancia tiende a cero a medida que aumenta la potencia de la señal porque el alto flujo de fotones reduce la inversión de población. Las curvas de la figura 4 son cualitativamente consistentes con otros tipos de amplificadores de fibra reportados [12, 13].

Recientemente se ha iniciado la fabricación de guías de onda cortas con altas concentraciones de dopantes [14] que pueden modificar el índice de refracción a través de la componente real de  $\chi^{\text{Er}}$ , y por lo tanto modificar la constante de propagación de la señal a amplificar. Para analizar este aspecto en guías cortas, se consideró un EDFA con perfil de dopado de paso (reportado en [15])  $\mathcal{N}^{\text{Er}}(r) = 1 \times 10^{25}$  iones/ $\text{m}^3$  para  $r \leq r_{\text{co}}$  y nulo para  $r > r_{\text{co}}$  (el valor de la concentración de iones dopantes es de los más altos reportados en amplificadores de fibras [14, 15]), y para una señal débil, esto es, lejos de saturación. En la figura 5(a) se muestra la variación de la componente real de la constante de propagación ( $\Delta\beta_r$ ) en función de la longitud de onda, para diferentes valores de potencia de bombeo normalizado a la potencia umbral  $P_p/P_p^u$ . El orden de magnitud de  $\Delta\beta_r$  implica variaciones despreciables de dispersión de velocidad de grupo para la señal amplificada; para cortas longitudes del EDFA, el efecto de ensanchamiento del pulso inducido por el proceso de amplificación es por tanto también despreciable. Como el coeficiente de ganancia es proporcional a la componente imaginaria de la constante de propagación, en la figura 5(b) se muestra su espectro para los mismos valores de potencia. El espectro muestra dos regímenes de bombeo: para  $\frac{P_p}{P_p^u} < 1$  se tiene absorción ( $\beta_i < 0$ ) y para  $\frac{P_p}{P_p^u} > 1$  se tiene amplificación ( $\beta_i > 0$ ); tales cambios son confirmados por el perfil de ganancia en la referencia [15]. Finalmente, para el cálculo de cada curva de estos espectros, se discretizó la sección transversal de la fibra según el valor de la longitud de onda de la señal respecto al radio del núcleo.

## 4 Conclusión

Se ha presentado una generalización del método de elementos finitos que permite obtener la constante de propagación y la ganancia de un amplificador óptico de fibra dopada. La versatilidad del método ha quedado demostrada al permitir el análisis con diferentes perfiles de dopado.



Los resultados obtenidos concuerdan con resultados experimentales, por lo tanto esta técnica puede ser una herramienta útil para analizar y diseñar EDFA y amplificadores con geometrías que se puedan discretizar adecuadamente con elementos triangulares.

## Bibliografía

- [1] S. B. Poole, D. N. Payne, and M. E. Ferman (1985) *Electron. Lett.* **21** 738.
- [2] E. Desuvire, C. R. Giles, and J. R. Simpson (1989) *J. Lightwave Technol.* **7** 2095.
- [3] Y. Kimura, M. Nakazawa, and K. Suzuki (1990) *Appl. Phys. Lett.* **57** 2635.
- [4] R. G. Smart, J. L. Zyskind, J. W. Sulhoff, and D. J. DiGiovani (1993) *IEEE Photon. Technol. Lett.* **5** 523.
- [5] A. M. Snyder and J. D. Love (1983) *Optical Waveguide Theory* New York: Chapman and Hall.
- [6] P. Torres (1994) *Análisis Modal de Amplificadores Ópticos*, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia.
- [7] O. C. Zienkiewicz (1977) *The Finite Element Method*, 3<sup>er</sup> ed. Londres: McGraw-Hill.
- [8] N. Mabaya, P. E. Lagasse, and P. Vandenbulcke (1981) *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **MTT-29** 600.
- [9] K. Hayata, M. Koshiba, and M. Suzuki (1986) *J. Quantum Electron.* **QE-22** 781.
- [10] B. M. A. Rahman, F. A. Fernandez, and J. B. Davis (1991) *Proc. IEEE* **79** 1442.
- [11] P. Kilverli, COST 217 group, (1992) *Technical Digest Symposium on Optical Fiber Measurements*, pag. 183. Ed. by G. W. Day and D. L. Franzen, *NIST Special Publication* **839**.
- [12] E. Desurvire, C. R. Giles, J. R. Simpson, and J. L. Zyskind (1989) *Opt. Lett.* **14** 1266.

- [13] B. Calvas, and P. Urquhart (1993) *J. Opt. Soc. Am.* **10** 666.
- [14] M. Federighi et. al. *J. Lightwave Technol.* **7** 2095.
- [15] E. Desurvire (1990) *J. Lightwave Technol.* **8** 1517.