

El Paradigma de las Membranas en Agujeros Negros

José Daniel Muñoz y Juan Manuel Tejeiro
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Física
Santafé de Bogotá D.C., Colombia

Resumen

El paradigma de las membranas es un método para trabajar campos de materia cerca de agujeros negros, que permite construir imágenes espaciales variables en el tiempo, sin perder la exactitud de la relatividad general. En este artículo se describe el paradigma de las membranas, y se aplica al campo electromagnético alrededor de un agujero negro de Schwarzschild.

Abstract

The membrane paradigm is a method in order to work matter fields near black holes, which allows to construct spatial images changing in time, without losing the exactness of the general relativity. This paper describes membrane paradigm, and applies it to the electromagnetic field around a Schwarzschild's black hole.

1 Introducción

Con el descubrimiento de los QUASARs y las galaxias de núcleo activo AGN, los astrofísicos comenzaron a interesarse en los agujeros negros y sus discos de acreción como posibles fuentes de su enorme brillo. Sin embargo, el proceso que describe su funcionamiento, desarrollado en 1977 en Cambridge por Robert D. Blandford y Roman Znajek [3] [1] [2], utiliza el formalismo completo de la relatividad general, con un campo tensorial electromagnético sobre una variedad espacio-temporal curva, algo que generalmente se encuentra alejado de las ideas intuitivas y las imágenes mentales de los astrofísicos. Con el objeto de hacer más accesibles a la intuición, éste y otros procesos de agujeros negros donde juega un papel primordial la relatividad general, un equipo de la universidad de Caltech, comandado por Kip S. Thorne, Richard H. Preiss y Douglas A. McDonald [5], desarrollaron a mediados de los 80's el Paradigma de las Membranas.

El Paradigma de las Membranas para agujeros negros es un marco de trabajo que permite describir y calcular fenómenos cercanos a agujeros negros utilizando imágenes intuitivas sin perder la exactitud de la relatividad general. El paradigma ha probado ser muy útil para estudiar fenómenos de radiación de los discos de acreción y de perturbaciones gravitacionales cerca de agujeros negros, y se perfila como una de las herramientas más útiles para diferenciar entre un agujero negro y una estrella de neutrones, analizando sus espectros.

El objetivo del presente artículo es describir los principios básicos para construir el Paradigma de Membranas, ilustrándolos con el ejemplo del campo electromagnético alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. En un siguiente artículo se expondrá el proceso de Blandford-Znajek utilizando el paradigma. A lo largo del artículo, trabajaremos utilizando unidades naturales ($G = c = 1$), y con la signatura $(1, -1, -1, -1)$ del tensor métrico.

2 Observadores FIDO

La Relatividad General está escrita en términos de espacio-tiempo 4-dimensional, en tanto que, en general, nuestra intuición y nuestras imágenes mentales se expresan en términos de un espacio absoluto que evoluciona a lo largo del tiempo. Nuestro primer objetivo consiste en factorizar la variedad espacio-tiempo, alrededor del agujero negro, en términos de ese espacio y tiempo absolutos (formulación 3+1 de la Relatividad General). Una variedad que permita esa división se llama “globalmente hiperbólica”[4]. En un agujero negro, la variedad espacio-tiempo completa no es globalmente hiperbólica, pero la región exterior al horizonte sí lo es. Como en astrofísica estamos interesados en lo que sucede al exterior del horizonte, basta con separar espacio y tiempo en esta región. Un agujero negro de Schwarzschild se describe tradicionalmente por el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left[1 - \frac{r_s}{r}\right]^{-1} dt^2 - \left[1 - \frac{r_s}{r}\right] dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $r_s = 2M$ es el radio de Schwarzschild, siendo M la masa del agujero negro, y $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido espacial en coordenadas esféricas θ y φ . Observemos que, en estas coordenadas, la variedad espacio-tiempo, para $r > r_s$, queda factorizada como $\mathbb{R} \times \Sigma$, con

\mathbb{R} describiendo la coordenada temporal t , y Σ las hipersuperficies como de espacio ($t = cte$). Asintóticamente en el infinito espacial, la métrica (1) tiende a la métrica Minkowskiana, como debe ser, y la coordenada t nos mide el tiempo que marca un reloj situado en esta región asintótica. El segundo paso consiste en buscar un conjunto de observadores que describa nuestra idea intuitiva de “espacio absoluto”. Estos observadores se encuentran a una distancia fija del agujero negro ($r = cte$) y no rotan ($\theta = \varphi = cte$) con respecto a las estrellas fijas (los puntos de la región asintótica). A estos observadores los llamaremos *observadores referenciales FIDO* (FIDucial Observers). De la métrica (1) se sigue que el tiempo propio τ de estos observadores se relaciona con la coordenada temporal t por

$$\frac{\partial}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} \quad ; \quad \alpha \equiv \frac{\partial \tau}{\partial t} = (g_{00})^{1/2} = \left[1 - \frac{r_s}{r} \right]^{1/2} \quad (2)$$

Para $r \rightarrow r_s$, $\alpha \rightarrow 0$, y nos encontramos sobre el horizonte del agujero negro; y para $r \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 1$, y nos encontramos en la región asintóticamente Minkowskiana.

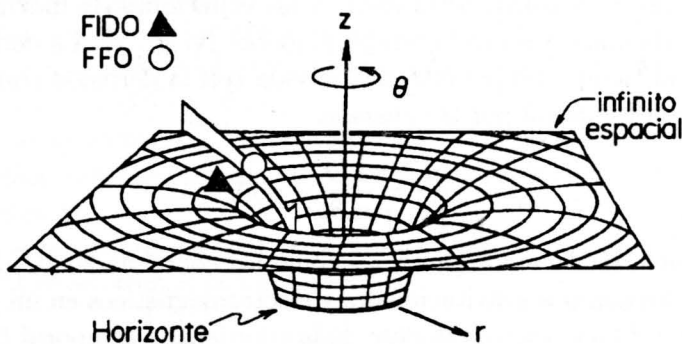


Figura 1. Observadores FIDO y FFO

Los observadores FIDO no son observadores inerciales; en efecto, deben mantener una aceleración propia constante para no caer hacia el agujero negro. El valor de dicha aceleración está dado por

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \ln \alpha = -\alpha^{-1} \frac{M}{r^2} \vec{e}_r \quad (3)$$

Los observadores inerciales son aquellos que están en caída libre. Dentro de éstos, llamaremos observadores FFO (Free Falling Observers) a

aquéllos que, en cada punto de la variedad, caen radialmente hacia el agujero ($\dot{r} < 0$, $\theta = cte$, $\varphi = cte$) habiendo partido con velocidad cero desde la región asintótica en el infinito espacial, tal como se ilustra en la Figura 1. Para nuestro caso particular, las coordenadas naturales para los FFO son las llamadas coordenadas normales de Gauss [6].

De acuerdo al principio de la relatividad general, las leyes de la física son independientes del sistema de coordenadas elegido, por lo que tanto para los FIDO como para los FFO se cumplen esas leyes. Por ejemplo, la ecuación de movimiento para una partícula de carga q , vista por un observador FIDO toma la forma familiar

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}\vec{g} + q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4)$$

siempre y cuando utilicemos el tiempo propio τ del observador FIDO como coordenada temporal. Esta ecuación permite a un observador FIDO determinar directamente \vec{E} y \vec{B} en su punto de observación, midiendo la rata de cambio del momentum de la partícula. Sin embargo, este tiempo propio τ tiene la desventaja de que cambia punto a punto, y por lo tanto es conveniente escribir las ecuaciones de movimiento en términos de una coordenada temporal global (v. gr. t). La derivada con respecto al tiempo propio esta relacionada con la derivada respecto a la coordenada temporal por la ecuación

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \quad (5)$$

En resumen, si tomamos (t, r, θ, φ) como las coordenadas de un evento, entonces los campos gravitacionales y electromagnéticos en un punto del espacio son funciones únicamente de la coordenada temporal t

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \begin{cases} g_{ij}(t), & i, j = 1, 2, 3 \\ g_{00} = \alpha^2(t) \end{cases} \quad ; \quad F_{\mu\nu} \rightarrow \begin{cases} \vec{B}(t) \\ \vec{E}(t) \end{cases} \quad (6)$$

Para un instante t fijo, las componentes g_{ij} nos dan la métrica del 3-espacio, es decir, nos dan la geometría de esa sección espacial. Los campos $\vec{E}(t)$ y $\vec{B}(t)$, definidos por (4), nos dan los valores del campo electromagnético en todo el espacio. Con esto hemos logrado precisamente lo que buscábamos en un comienzo: la factorización de la variedad espacio-tiempo como $\mathbb{R} \times \Sigma$ y todas sus cantidades dinámicas quedan definidas como funciones sobre la hipersuperficie Σ para cada instante de tiempo

t. Resumiendo, esta nos permite visualizar la física como “fotos” del espacio curvo y de los campos de materia sobre él para cada instante de tiempo.

3 Leyes Físicas para los FIDO

El siguiente paso en la construcción de un paradigma de membranas es escribir las ecuaciones de movimiento que describen los campos de materia en las coordenadas (t, r, θ, φ) de los observadores FIDO. El proceso comprende tres pasos:

(i) Las ecuaciones de movimiento para los observadores FFO en coordenadas normales toman la misma forma que en espacio de Minkowski, pues, en estas coordenadas, las conexiones se anulan, y por lo tanto las derivadas covariantes se reducen a las derivadas ordinarias (la métrica es localmente Minkowskiana).

(ii) En un punto de la variedad, las coordenadas de un observador FIDO y las de un observador FFO se relacionan por una transformación de Lorentz, con la velocidad que el observador FFO lleva en ese instante. La magnitud de esta velocidad coincide con la velocidad de escape en ese punto. Utilizando estas transformaciones, las ecuaciones de campo quedan en función de $(\tau, r, \theta, \varphi)$.

(iii) Finalmente, se utilizan las relaciones (2) y (5) para escribir las ecuaciones de campo en función de las coordenadas espaciales (r, θ, φ) y del tiempo global t .

Siguiendo este procedimiento, para nuestro caso particular, las ecuaciones de Maxwell toman la forma:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times (\alpha \vec{E}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho / \epsilon_0 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla} \times (\alpha \vec{B}) - \frac{1}{\epsilon_0} \alpha \vec{J} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{J}) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

donde \vec{J} mide carga por unidad de área por unidad de tiempo τ de los observadores FIDO. Igualmente es posible definir voltajes y corrientes a lo largo de curvas y superficies, respectivamente, de la sección espacial.

$$V_{(c)} \equiv \int_c \alpha \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad ; \quad I_{(A)} \equiv \int_A \alpha \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (8)$$

El vector de Poynting $\vec{\pi}$, definido como $\vec{\pi} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, representa el flujo de energía electromagnética por unidad de área y por unidad de tiempo, y consecuentemente, incluye una derivada temporal. Por lo tanto, al expresarlo en función de la coordenada temporal t , aparece un factor α . Sin embargo, este vector de Poynting así definido no lleva a una conservación de la energía radiada. En efecto, el corrimiento al rojo gravitacional ([7] págs. 187, 657, 659) hace que la energía radiada \mathbb{U} en un punto espacial φ en un instante t llegue al infinito espacial atenuada por un factor $\alpha(t, \varphi)$. Por lo tanto, para construir una cantidad que represente la conservación de la energía radiada, definamos el *valor absoluto de energía radiada* \mathbb{U}_{abs} como el valor que tomaría al llegar al infinito espacial, i. e. $\mathbb{U}_{abs} \equiv \alpha \mathbb{U}$. De esta forma, el vector de Poynting, en términos de energía absoluta, queda definido como

$$\vec{\pi}_{abs}(t) \equiv \frac{1}{\mu_0} \alpha^2 \vec{E}(t) \times \vec{B}(t) \quad (9)$$

4 Condiciones de Frontera en el Horizonte

Escritas las ecuaciones de campo en función de (r, θ, φ) y del tiempo global t , se hace necesario definir condiciones de frontera para resolverlas. Estas condiciones estarán dadas en la región asintótica del infinito espacial, y en el horizonte del agujero negro. Las primeras se definen sobre una región Minkowskiana, y por lo tanto corresponden a condiciones de frontera convencionales, en tanto que las segundas sí requieren un desarrollo especial.

Para dar las condiciones de frontera sobre el horizonte para un observador FIDO, expresemos primero esas condiciones para un observador FFO, puesto que éste es un observador inercial, y luego las traspasaremos a los observadores FIDO por medio de una transformación de Lorentz

Sean \vec{E}_{FFO} y \vec{B}_{FFO} los campos eléctrico y magnético para un observador FFO. Las condiciones de frontera sobre el horizonte para este observador son muy sencillas: \vec{E}_{FFO} y \vec{B}_{FFO} deben ser finitos. Ahora, para encontrar la relación entre estos campos y los campos \vec{E} y \vec{B} medidos por un observador FIDO, es necesario encontrar la velocidad relativa entre los dos observadores, y aplicar las transformaciones de Lorentz correspon-

dientes. La velocidad relativa v está dada por

$$v = \frac{dR}{d\tau} = -(1 - r_s/r)^{-1/2} \frac{dr}{d\tau} = -\frac{(1 - r_s/r)^{-1/2} dr}{\alpha} \frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \quad (10)$$

donde R es la distancia espacial desde el punto de coordenadas (r, θ, φ) hasta el punto sobre el horizonte de coordenadas (r_s, θ, φ) . El factor γ que corresponde a esta velocidad relativa es

$$\gamma = \alpha^{-1} \quad (11)$$

Con esta velocidad relativa, las transformaciones de Lorentz de los campos electromagnéticos arrojan

$$\begin{aligned} E_{\perp} &\equiv E^{\hat{r}} = E_{FFO}^{\hat{r}} = \text{finito} \\ B_{\perp} &\equiv B^{\hat{r}} = B_{FFO}^{\hat{r}} = \text{finito} \end{aligned} \quad (12)$$

para los campos perpendiculares al horizonte, y

$$\begin{aligned} E^{\hat{\theta}} &= \gamma (E_{FFO}^{\hat{\theta}} - v B_{FFO}^{\hat{\varphi}}) = \frac{1}{\alpha} (E_{FFO}^{\hat{\theta}} - (r_s/r)^{1/2} B_{FFO}^{\hat{\varphi}}) \\ E^{\hat{\varphi}} &= \gamma (E_{FFO}^{\hat{\varphi}} + v B_{FFO}^{\hat{\theta}}) = \frac{1}{\alpha} (E_{FFO}^{\hat{\varphi}} + (r_s/r)^{1/2} B_{FFO}^{\hat{\theta}}) \\ B^{\hat{\theta}} &= \gamma (B_{FFO}^{\hat{\theta}} + v E_{FFO}^{\hat{\varphi}}) = \frac{1}{\alpha} (B_{FFO}^{\hat{\theta}} + (r_s/r)^{1/2} E_{FFO}^{\hat{\varphi}}) \\ B^{\hat{\varphi}} &= \gamma (B_{FFO}^{\hat{\varphi}} - v E_{FFO}^{\hat{\theta}}) = \frac{1}{\alpha} (B_{FFO}^{\hat{\varphi}} - (r_s/r)^{1/2} E_{FFO}^{\hat{\theta}}) \end{aligned} \quad (13)$$

para los campos tangentes al mismo. Observamos que las magnitudes de los campos tangentes son de orden $O(\alpha^{-1})$, y que por lo tanto todos ellos divergen sobre el horizonte ($\alpha = 0$). Pero ciertas combinaciones de estos campos tangentes sí se mantienen finitas. Por ejemplo:

$$E^{\hat{\theta}} + B^{\hat{\varphi}} = \frac{(1 - r_s/r)^{1/2}}{1 + (r_s/r)^{1/2}} (E_{FFO}^{\hat{\theta}} + B_{FFO}^{\hat{\varphi}}) = O(\alpha) \quad (14)$$

$$E^{\hat{\varphi}} - B^{\hat{\theta}} = \frac{(1 - r_s/r)^{1/2}}{1 + (r_s/r)^{1/2}} (E_{FFO}^{\hat{\varphi}} - B_{FFO}^{\hat{\theta}}) = O(\alpha) \quad (15)$$

Así, sobre el horizonte ($\alpha \rightarrow 0$), las condiciones de frontera que deben cumplir los campos son

$$E^{\hat{\theta}} = -B^{\hat{\varphi}} \quad ; \quad E^{\hat{\varphi}} = B^{\hat{\theta}} \quad \iff \quad \vec{B}_{||} = \vec{E}_{||} \times \hat{n} \quad (16)$$

con \vec{E}_{\parallel} y \vec{B}_{\parallel} los campos eléctricos y magnéticos paralelos al horizonte. En otras palabras, sobre el horizonte los campos electromagnéticos se comportan como ondas transversales incidentes, y por lo tanto el horizonte se puede considerar como una superficie conductora.

5 Horizonte Dilatado y Atraso Temporal

Consideremos una partícula con carga q cerca de una superficie conductora, a una distancia $z = z_0$; entonces las líneas de campo toman la forma de la Figura 2(a)

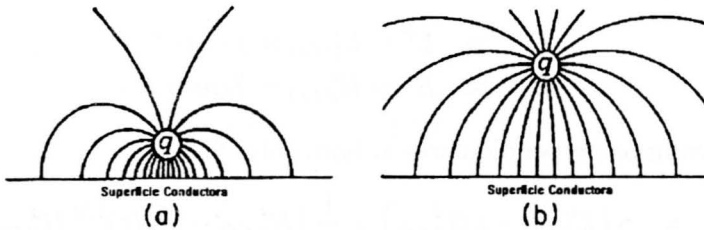


Figura 2. Líneas de campo eléctrico para dos posiciones sucesivas de una carga q que se aleja de una superficie conductora.

Si alejamos la carga hasta una distancia $z = z_0 + \Delta z$, pasado un tiempo del orden de z_0/c , las líneas de campo toman la forma de la Figura 2(b). De acuerdo a la sección anterior, dado que el horizonte se comporta como una superficie conductora, esperaríamos que una situación similar a la descrita se presentara para las líneas de campo de una carga q cerca del horizonte. Sin embargo esto no es lo que sucede; pues todos los fenómenos sufren un retraso temporal proporcional a α^{-1} medido por observadores FIDO que utilizan la coordenada temporal t . De esta forma, cuando nos acercamos al horizonte ($\alpha \rightarrow 0$), el retraso temporal tiende a infinito, y por lo tanto la región cercana al horizonte guarda toda la historia anterior de los campos de materia. En consecuencia, lo que se observa es el comportamiento que muestra la Figura 3.

La Figura 3(a) corresponde a los campos eléctricos de la carga q que ha estado siempre a una distancia z_0 del horizonte. La Figura 3(b) muestra el campo cuando la carga llega a una distancia $z_0 + \Delta z$ en un tiempo Δt , y la Figura 3(c) muestra la configuración de campos para un tiempo

posterior del orden de $2\Delta t$. En esta última, observamos tres regiones separadas por las líneas puntuadas: la región inferior corresponde al campo original, la intermedia a un campo de transición, y la superior al nuevo campo. Observemos, además, que este último corresponde al campo de una partícula cargada en presencia de una superficie conductora cuyo corte corresponde a la línea puntuada superior.

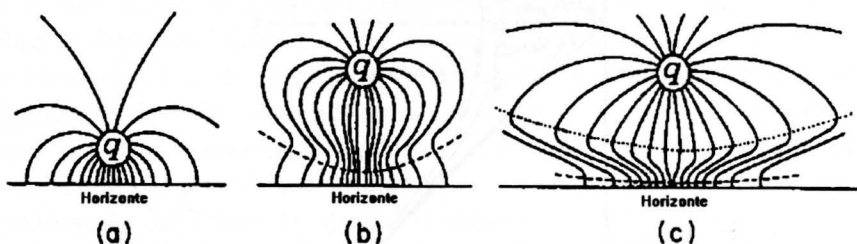


Figura 3. Configuración de las líneas de campo eléctrico para tres posiciones sucesivas de una carga q que se aleja de un agujero negro. Se observa el retardo temporal.

Esto se puede ver igualmente analizando los conos de luz en la cercanía del horizonte. Para este fin, es conveniente utilizar el hecho de que la métrica de Swarzschild (1) se puede aproximar, en las vecindades de un punto del horizonte (v.gr. $r = r_s$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$), por una métrica de Rindler

$$ds^2 = (g_H z)^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad ; \quad g_H = 1/(2r_s) \quad (17)$$

hasta ordenes de $(x/r_s)^2$ y $(z/2r_s)^2$, por medio del cambio de coordenadas,

$$x = r_s \left[\theta - \frac{\pi}{2} \right] \quad ; \quad y = r_s \varphi \quad ; \quad z = 2r_s \alpha \quad (18)$$

De otra parte, la métrica de Rindler corresponde a un cuadrante de la variedad de Minkowski, en las coordenadas de un conjunto de observadores con aceleración propia constante g_H . En efecto, a partir de la métrica de Minkowski

$$ds^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \quad (19)$$

se obtiene la métrica de Rindler (17) por medio de la transformación de coordenadas

$$T = z \sinh(g_H t) \quad ; \quad Z = z \cosh(g_H t) \quad ; \quad X = x \quad ; \quad Y = y \quad (20)$$

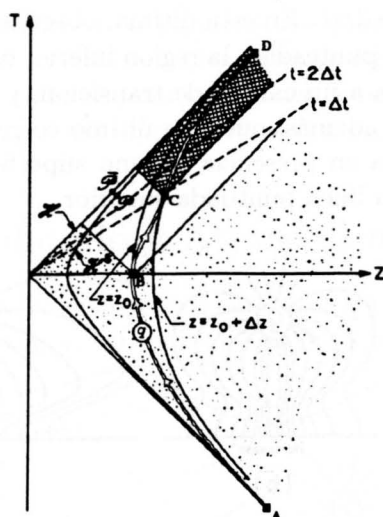


Figura 4. Diagrama de la línea de universo de la carga q de la Figura 3, y de los campos EM en coordenadas (T, Z) .

La Figura 4 es una gráfica espacio-temporal, en coordenadas (T, Z) del proceso mostrado en la Figura 3. Las líneas de $z = cte$ corresponden a hipérbolas en las coordenadas Minkowskianas (T, Z) ; estas hipérbolas representan precisamente las líneas de universo de los observadores FIDO en estas coordenadas. De la misma forma, las líneas de $t = cte$ corresponden a rectas que parten radialmente del origen; y constituyen las hipersuperficies tridimensionales como de espacio para cada instante t . En las coordenadas (T, Z) los conos de luz están delimitados por líneas rectas $Z \pm T = cte$. El horizonte \mathcal{H} corresponde a las rectas $Z = \pm T$. La curva con flechas en la Figura 4 representa la línea de universo de la carga q . Para todo $t < 0$, La partícula cargada se mantiene sobre la hipérbola $z = z_0$ (porción A-B de la curva); en $t = 0$ (punto B) comienza a alejarse hasta alcanzar en $t = \Delta t$ la hipérbola $z = z_0 + \Delta z$ (porción B-C de la curva), sobre la cual finalmente permanece (porción C-D). La región punteada coresponde a todos los eventos en los que el campo electromagnético es el producido por la carga q que, para $t < 0$, se encontraba en reposo en la posición $z = z_0$. Igualmente, la región cuadrículada corresponde a los eventos en los que el campo electromagnético es el producido por la carga q situada en reposo en la posición $z = z_0 + \Delta z$. La región blanca entre las dos coresponde a la zona de transición. Notemos que cualquier sección espacial de $t = cte > \Delta t$ intersecta siempre las

tres regiones; como por ejemplo, la recta $t = 2\Delta t$, que corresponde a la Figura 3(c).

Con el fin de no tener que considerar el efecto del retraso temporal muy cerca del horizonte, se toma una superficie bidimensional de radio un poco mayor al del horizonte del agujero negro, para hacer las veces de éste; a esta superficie se le denomina *horizonte dilatado* (\mathcal{H}^S en la Figura 4). A cada evento sobre el horizonte le hacemos corresponder un evento sobre el horizonte dilatado, por medio de líneas como de luz (p. ej. los eventos $\bar{\varphi}$ y φ de la Figura 4). Escoger un radio para el horizonte dilatado es equivalente a escoger un valor de α , al que llamaremos α_H . Su escogencia queda determinada por la precisión deseada en la medida de los campos, puesto que utilizar el horizonte dilatado implica una aproximación del orden de α_H^2 en los campos.

Debido a que utilizaremos el horizonte dilatado en vez del verdadero horizonte, se hace necesario trasladar las condiciones de frontera de los campos a éste horizonte dilatado. Para este fin, notemos en primer lugar que el horizonte dilatado depende del α elegido (α_H), y que los campos de materia sobre él son también función, en general, de ese valor de α . En nuestro caso particular, los campos eléctricos y magnéticos paralelos al horizonte dilatado (ver ecuación (13)), varían como α^{-1} , mientras que los campos normales no dependen del α elegido (ver ecuación (12)). Con el fin de hacer que las condiciones de frontera sobre \mathcal{H}^S sean independientes del valor de α_H elegido, definamos los campos \vec{E}_H y \vec{B}_H sobre \mathcal{H}^S como

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel H} &\equiv \alpha_H \vec{E}_{\parallel} & \vec{B}_{\parallel H} &\equiv \alpha_H \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}_{\perp H} &\equiv E_{\perp} \hat{n} & \vec{B}_{\perp H} &\equiv B_{\perp} \hat{n} \end{aligned} \quad (21)$$

donde \hat{n} es un vector unitario normal al horizonte dilatado. Con estas definiciones, podemos reescribir la condición de frontera (16) como

$$\vec{B}_{\parallel H} = \vec{E}_{\perp H} \times \hat{n} \quad (22)$$

6 Construcción de la Membrana

El último paso para construir el paradigma de las membranas, consiste en asignar al horizonte dilatado las propiedades físicas necesarias para representar esas condiciones de frontera; el horizonte dilatado con estas propiedades físicas es lo que se conoce como la *membrana*.

En efecto, tal como propusieron Znajek y Damour ([8], [9]), asignar unas propiedades físicas al horizonte dilatado es mucho más útil, para la intuición física, que mantener presentes unas condiciones de frontera expresadas en forma puramente matemática. Para nuestro caso, la condición de frontera (ecuación 22), corresponde a suponer que la membrana es un conductor. Así, podemos definir sobre ella una densidad de carga superficial σ_H tal que, de acuerdo a la ley de Gauss, corresponda a la magnitud del campo eléctrico normal sobre la membrana

$$\sigma_H \equiv \epsilon_0 \left\| \vec{E}_{\perp H} \right\| \quad (23)$$

De la misma forma, definimos sobre la membrana una densidad de corriente superficial \vec{J}_H como la carga superficial que atraviesa la unidad de longitud por unidad de tiempo t . La Ley de Ampère nos permite definir la relación entre el campo magnético paralelo $\vec{B}_{\parallel H}$ y la densidad de corriente \vec{J}_H sobre la membrana:

$$\vec{B}_{\parallel H} \equiv \mu_0 \vec{J}_H \times \hat{n} \quad (24)$$

Definidas estas propiedades físicas, y utilizando las ecuaciones de movimiento para los campos medidos por los observadores FIDO, se construyen ecuaciones de movimiento que rigen el comportamiento de estas propiedades. Utilizando la relación $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ y la condición de frontera (22), obtenemos, a partir de la definición (24), la *Ley de Ohm* para la membrana

$$\vec{E}_{\parallel H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{J}_H \quad (25)$$

con una resistividad igual a la resistividad del vacío:

$$\rho_H = \frac{1}{\sigma_H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega \cdot m \quad (26)$$

Finalmente, para que las definiciones dadas de densidad de carga σ_H y densidad de corriente \vec{J}_H sobre la membrana tengan sentido físico, es necesario probar que ellas satisfacen una ecuación de continuidad. Tomando la componente normal a la membrana de la ecuación de Maxwell para la ley de Ampère (ecuaciones 7)

$$\frac{\partial E_{\perp}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \left[\vec{\nabla} \times (\alpha \vec{B}) \right]_{\perp} - \frac{1}{\epsilon_0} \alpha J_{\perp} \quad (27)$$

y reemplazando en ella las definiciones de σ_H y \vec{J}_H dadas por las ecuaciones (23) y (24), obtenemos

$$\frac{\partial \sigma_H}{\partial t} + {}^{(2)}\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_H + \alpha_H J_{\perp H} = 0 \quad (28)$$

donde ${}^{(2)}\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_H$ es la divergencia bidimensional de la corriente superficial sobre la membrana, y $J_{\perp H}$ es la componente normal a la membrana de la densidad de corriente \vec{J} . Como en las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones 7), \vec{J} está referida al tiempo propio τ de los observadores FIDO, entonces $\alpha_H J_{\perp H}$ representa la densidad de corriente normal por unidad de tiempo universal t que llega a la membrana.

7 Conclusiones

Como vemos, el paradigma de las membranas para agujeros negros permite simplificar considerablemente la descripción y el tratamiento matemático de fenómenos en las vecindades de agujeros negros, puesto que reensambla los efectos de la Relatividad General en formas intuitivas familiares a nuestra descripción tridimensional. Hasta el presente se han construido paradigmas de membranas para campos electromagnéticos clásicos y para perturbaciones gravitacionales (e.g. ondas gravitatorias)[5].

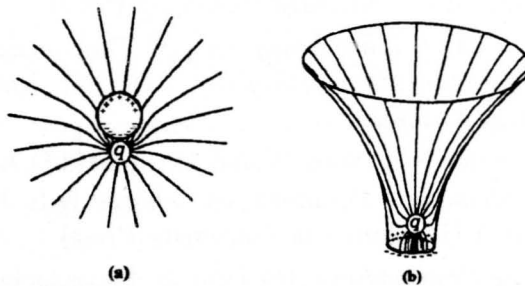


Figura 5. Líneas de campo eléctrico de una carga q cerca del agujero negro y polarización de la membrana.

Por ejemplo, en nuestro caso, la descripción de fenómenos electromagnéticos al exterior de un agujero negro se reduce al modelo de una superficie conductora de resistividad igual a la del vacío que envuelve el horizonte

del agujero, y para la cual se cumplen las mismas ecuaciones de continuidad y de condiciones de frontera que para el caso de los campos al exterior de un conductor simple en el vacío. Sin embargo, a pesar de que las ecuaciones de Maxwell (7) tienen la misma forma que para el caso del espacio de Minkowski, es importante recordar que dichas ecuaciones y los campos que ellas describen están definidos sobre un espacio curvo, definido por las componentes $g_{ij}(t)$ de la ecuación (6). Por lo tanto, una imagen más realista de los fenómenos que allí están ocurriendo se logra dibujando las líneas de campo sobre una superficie espacial curva. En la Figura 5 se ilustra las líneas de campo eléctrico producidos por una carga puntual q en las cercanías de la membrana.

En un siguiente artículo desarrollaremos el caso de un agujero negro cargado y rotante, y con él describiremos el proceso de Blandford-Znajek, que es un modelo que permite entender el funcionamiento de QUASAR's y AGN's.

Bibliografía

- [1] Znajek R L 1976 Ph.D. dissertation. University of Cambridge.
- [2] Blandford R D and Znajek R L 1977 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **179** 433.
- [3] Blandford R D 1979 in *Active Galactic Nuclei*, ed. C Hazard & S Mitton (Cambridge, Cambridge University Press)
- [4] Tejeiro J M 1989 *Renormierung der $g\varphi^3$ -Theorie auf global hyperbolischen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeiten*, Dr. Rer. Nat. Thesis, Universität Mainz, Alemania.
- [5] Thorne K S, Price R H, Suen W and Macdonald D A 1986 in *Black Holes: The Membrane Paradigm*, ed. Thorne K S, Price R H and Macdonald D A (London, Yale University Press)
- [6] Ruiz R A 1992 *Propagadores Alrededor de Trayectorias Inerciales en Tiempo-Espacio Curvos*, M. Sc. Física Tesis, Universidad Nacional de Colombia.
- [7] Misner C W, Thorne K S and Wheeler J A 1973 *Gravitation* (San Francisco: Freeman)
- [8] Znajek R L 1978 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **185** 833
- [9] Damour T 1978 *Phys. Rev. D* **18** 3598