Una interesante aproximación histórica al estudio del péndulo compuesto.

C. Camargo y R. Páez

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia
Santa Fe de Bogotá

Resumen

Este artículo presenta una adaptación de la versión que hace E. Mach de la solución de Huygens al problema de hallar el período de oscilación de un péndulo compuesto por varias partículas colocadas en linea, un problema de interés histórico y didáctico. Se propone también una solución intuitiva, que surge de consideraciones semejantes, al problema de hallar el periodo de oscilación de un aro.

Abstract

This paper presents a modern adaptation of Mach's version of the solution given by Huygens to the compound pendulum problem, a question of historical and didactical interest. An intuitive solution to the problem of finding the period of oscilation of a ring, is also proposed.

1. Introducción

El problema de hallar el período T de oscilación de un cuerpo cualquiera se resuelve hoy de manera estándar hallando el momento de inercia I del cuerpo alrededor del eje de oscilación y aplicando la fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \tag{1}$$

donde h es la distancia desde el centro de oscilación al centro de gravedad del cuerpo. Esta fórmula resulta de aplicar la segunda ley de Newton para la rotación:

$$T = I\alpha \tag{2}$$

Donde T es el torque sobre el cuerpo y α la aceleración angular del mismo. Y considerando que el torque que actúa sobre el cuerpo en cualquier posición es el torque ejercido por la gravedad. Para ángulos pequeños resulta la ecuación diferencial

$$-Mgh\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3}$$

La que tiene como solución oscilaciones armónicas con período igual a (1).

Esta solución, que a veces se plantea como un simple ejercicio en clase, oculta una bonita interpretación física, que descubrimos al estudiar la historia de la cuestión.

El problema de hallar el período de oscilación de un péndulo compuesto fué planteado originalmente por Mersenne (1588-1648) en términos del centro de oscilación, es decir, se preguntó cómo hallar el punto situado a una distancia del eje igual a la longitud de un péndulo simple que oscilara con período igual al del cuerpo compuesto. Dicha cuestión ocupó a muchos importantes científicos de la época y dió origen al concepto de momento de inercia. Quien primero resolvió el problema correctamente fué Huygens (1629-1695).

Huygens partió de considerar el cuerpo oscilante como un conjunto de péndulos simples obligados a oscilar juntos por la unión entre sus partes. Ya que los péndulos más cortos oscilan más rápido y los péndulos más largos oscilan más lentamente, es natural pensar que el conjunto oscila con un período intermedio. Pero ¿cuál sería la longitud del péndulo que oscilaría con período igual al del conjunto? Para resolver este problema Huygens utilizó un postulado equivalente al principio de conservación de la energía mecánica, o principìo de la vis-viva, como se denominaba entonces. Este postulado es el siguiente:

Por efecto sólo de la gravedad un cuerpo pesado no puede subir.

En consecuencia, el centro de gravedad de un conjunto de cuerpos no puede subir a una altura mayor de la inicial, cuando se mueven sólo por efecto de su peso. Entonces, cuando los péndulos oscilan unidos, alcanzan una velocidad en la parte inferior tal que, ya sea que continúen unidos, o que su unión se disuelva de alguna manera y suban separadamente, el centro de gravedad del conjunto sube al mismo nivel del que partió. Utilizando este principio Huygens resolvió el problema para el caso de una varilla colgada de un extremo.

Adaptando la presentación que hace Mach del desarrollo de Huygens, la solución fué la siguiente:

2. Solución de Huygens

La siguiente es la solución que descubrió Huygens, presentada en lenguaje moderno:

Consideremos un péndulo compuesto constituido por una serie de cuerpos pequeños de masas m_i unidos y dispuestos en línea recta, como se muestra en la figura. (Fig 1).

Si no hay rozamiento, y se deja libre el conjunto desde la posición OA, llega a su posición vertical con alguna velocidad angular ω y asciende nuevamente hasta OA' a la derecha, de modo que el centro de gravedad del conjunto alcanza la altura original. Sin embargo, si en el punto más bajo se disuelven las ligaduras, los cuerpos individuales no continúan alineados y, ya que los péndulos más cortos están siendo artificialmente frenados por la ligadura con los más largos, y viceversa, ahora los más cortos alcanzan una altura menor que los más largos, encontrándose los unos por debajo y los otros por encima de la linea OA' (Fig. 1). Como consecuencia de la conservación de la energía, que en este caso se traduce, como lo hemos explicado más arriba, en que un cuerpo por acción solo de la gravedad no podría subir, si se detienen los cuerpos en su punto más alto, el centro de gravedad de todos ellos debe encontrarse nuevamente a la misma altura desde la que partió.

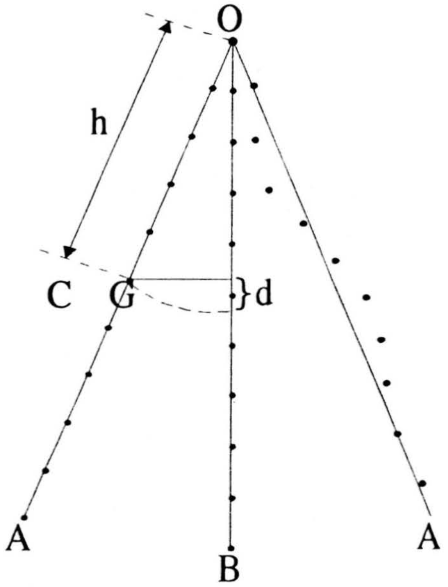

Fig. 1
Péndulo compuesto de Huygens.

Llamemos:
d: distancia que baja el centro de gravedad en el movimiento desde OA hasta OB.
r_i:distancia del i-ésimo cuerpo a O
ω: velocidad angular del conjunto en la posición OB
a: lo que asciende el centro de gravedad después que se disuelven las ligaduras en OB y los cuerpos de masas m_i suben hasta su altura máxima
a_i : lo que asciende cada cuerpo desde su posi-

ción más baja, una vez disueltas las ligaduras
h : distancia del centro de gravedad a O.

De la figura (Fig 1), vemos que :

$$d = h(1 - \cos\theta) = hk$$

donde

$$k = 1 - \cos\theta \tag{4}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad con que llega cada partícula a su posición más baja en el movimiento del conjunto desde OA hasta OB, es $\omega\, r_i$, y, si la partícula se va a mover libremente de ahí en adelante, la energía cinética en la parte más baja debe ser igual a la energía potencial en su punto más alto, tenemos que:

$$\frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = m_i g a_i$$

$$a_i = \frac{r_i^2 \omega^2}{2g} \tag{5}$$

Lo que sube entonces el centro de gravedad en caso de que cada partícula, después de haber llegado a OB con el conjunto, se deje subir sola hasta su punto más alto (y se quede ahí), es:

$$a = \frac{\sum m_i a_i}{\sum m_i} = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2Mg} = \omega^2 \frac{\sum m_i r_i^2}{2Mg}$$

$$a = \frac{\omega^2 I}{2Mg}$$

donde:

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{6}$$

Así apareció, por primera vez en la historia, esta cantidad a la que Huygens no dió ningún nombre. Euler, un poco más tarde, la llamó momento de

inercia.
Ahora, lo que baja el centro de gravedad desde OA hasta OB es :

$$d = hk \tag{7}$$

y, como el centro de gravedad debe subir lo mismo que bajó, entonces:

$$d = a$$
$$hk = \frac{\omega^2 I}{2gM} \tag{8}$$

entonces:

$$\frac{k}{\omega^2} = \frac{I}{2Mgh} \tag{9}$$

Por otra parte, un péndulo simple cuyo período fuera igual al del péndulo compuesto debe, dejado caer desde la linea OA, llegar a OB con la misma velocidad que éste y ascender con él hasta OA'. Si la longitud de tal péndulo es y, y llamamos a' lo que asciende desde su punto más bajo, entonces:

$$a' = ky \tag{10}$$

Por la conservación de la energía mecánica, aplicada a este péndulo simple:

$$\frac{y^2\omega^2}{2} = gky \tag{11}$$

Entonces:

$$y = \frac{2gk}{\omega^2} \tag{12}$$

Por lo tanto:

$$y = \frac{I}{Mh} \tag{13}$$

Y se concluye que el período de este péndulo y, por lo tanto, el del péndulo compuesto es:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{y}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \qquad (14)$$

Esta es la solución del problema propuesto.

3. El aro como un conjunto de péndulos simples con el mismo período

Pensando en este problema, nos sorprendimos al encontrar que la longitud del péndulo simple que oscila como un aro colgado de un eje perpendicular al plano del aro, es igual al diámetro del mismo. Esto parecía contradecir la interpretación intuitiva de Huygens de que el péndulo "compuesto", precisamente consiste en la unión de muchos péndulos "simples" de longitudes diferentes, lo cual llevaría a concluir que necesariamente el péndulo simple que oscilara con período igual debería tener una longitud intermedia y por lo tanto no, como en este caso, la máxima. Sin embargo, el encontrar en el laboratorio un equipo que permite el estudio del péndulo simple "cambiando la gravedad" con la inclinación, hallamos la clave para una interpretación justa de este problema, y es la siguiente:

El aro se puede considerar como un cuerpo compuesto de muchos péndulos simples que no oscilan alrededor del eje vertical, sino alrededor de ejes oblicuos. Estos péndulos tienen todos una longitud igual a la de la cuerda de la circunferencia que une el elemento del aro con el eje de oscilación. (Fig 2)

La "g" para un péndulo simple formado por la cuerda que forma un ángulo θ con el diámetro del aro, y un pequeño elemento del mismo, es $g\cos\theta$.

Llamemos L la longitud del diámetro del aro. Como la longitud de la cuerda es también $L\cos\theta$, el período de dicho péndulo simple, que es un elemento del aro, es:

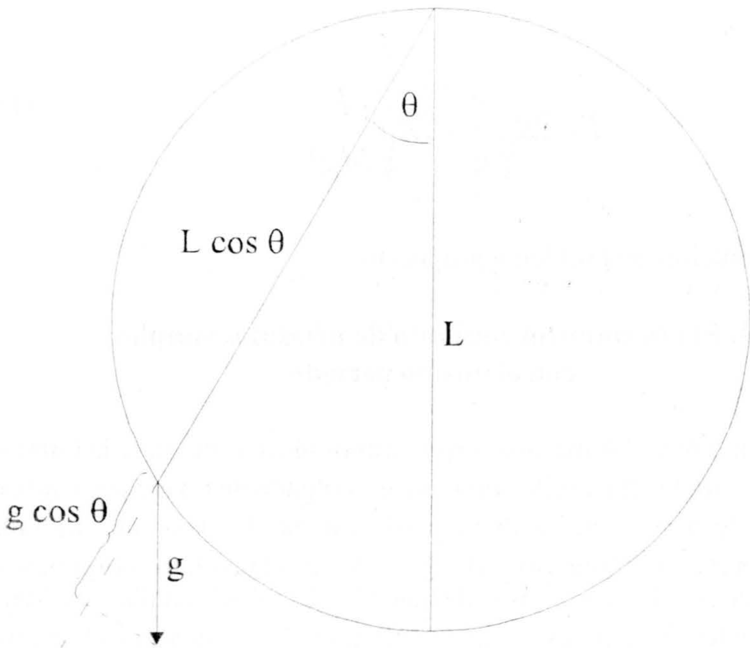

Fig. 2
El aro, visto como un conjunto de péndulos simples de longitu
y con "g" diferente.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (15)$$

y resulta igual para todos.

Luego nos dimos cuenta de que si esto era así, entonces un péndulo consistente de un segmento de circunferencia, simétrico alrededor del eje vertical también tendría el mismo período, comprobación que dejamos al lector interesado.

Bibliografía

(1) Mach, E. The Science of Mechanics: A Critical and Historical Account of its Development. The Open Court Publishing Company. La Salle Illinois, 1960

(2) Tipler P. Física Editorial Reverté, Barcelona, 1995