

RADIACION DE CARGAS ACELERADAS Y EL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA ¹

Daniel Sudarsky

*Instituto de Ciencias Nucleares
Universidad Nacional Autónoma de México
A. Postal 70-543 México D. F. 04510, México*

Resumen

En este artículo revisaremos, desde el punto de vista cuántico, el problema conceptual que aparece al analizar la radiación electromagnética de cargas aceleradas desde el punto de vista de observadores co-acelerados con las cargas.

1. Introducción

Durante mucho tiempo ha habido sobre el tema del análisis de la radiación, según observadores acelerados, un cierto grado de confusión. Esto se debe a que, por un lado, las leyes de la electrodinámica indican claramente que una carga acelerada debe radiar, mientras que, por otro lado, sabemos que, según el principio de equivalencia, para el observador que se acelera (uniformemente) con la carga, sólo existe un campo gravitacional uniforme y no se esperaría que este indujera radiación.

Tal vez el punto más importante para la clarificación de esta confusión fue él enfatizado por Boulware [2] al notar que, para

¹Este es un artículo de divulgación basado en un trabajo realizado por A. Higuchi (University of Chicago), G. Matsas (Universidade do São Paulo) y el autor [7, 8]. La introducción al tema está basada en el libro "Quantum Fields in Curved Space" de Birrell y Davies [1] y en el artículo "What happens when an accelerated observer detects a Rindler particle" de Unruh y Wald [6].

los observadores acelerados, existe un horizonte detrás del cual se encuentra toda la radiación. Para estos observadores, la radiación es entonces inobservable, ya no así para los observadores inerciales. Esto clarifica totalmente la situación en el contexto clásico. Nuestro objetivo es el de clarificar la situación en el contexto cuántico.

2. Invarianza Temporal y la Construcción de la Teoría Cuántica de Campos

Consideremos el problema de cuantizar un campo escalar ϕ en un espacio-tiempo cualquiera. El procedimiento es esencialmente el siguiente:

1. Se busca un conjunto completo $\{\phi_i(x), \phi_i^*(x)\}$ de soluciones a la ecuación de movimiento

$$(D^2 + m^2) \phi_i(x) = 0, \quad (1)$$

donde

$$D^2 = \frac{1}{g^{1/2}} \partial_\mu (g^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$$

es el D'Alambertiano correspondiente a la métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo dado.

2. Se expande el operador de campo $\hat{\phi}$ según

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i [C_i \phi_i(x) + C_i^\dagger \phi_i^*(x)], \quad (2)$$

donde los C_i y los C_i^\dagger son operadores en el espacio de Hilbert.

3. Los conmutadores

$$[C_i, C_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad (3)$$

permiten interpretar a los C_i y a los C_i^\dagger como operadores de creación y de destrucción de partículas.

Sin embargo, existe una infinitud de conjuntos de soluciones de las ecuaciones de movimiento, la expansión de $\hat{\phi}$ no es única y de hecho es, en general, arbitraria. Por ejemplo: dado uno de estos conjuntos, $\{\phi_i(x), \phi_i^*(x)\}$, podemos tomar como un nuevo conjunto las soluciones:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x)_i &= \alpha \phi_i(x) + i\beta \phi_i^*(x), \\ \hat{\phi}_i^*(x) &= \alpha \phi_i^*(x) - i\beta \phi_i(x). \end{aligned} \quad (4)$$

La interpretación de partículas es entonces ambigua:

¿Cuáles son los operadores de creación?

$$\text{los } C_i^\dagger \text{ o los } \hat{C}_i^\dagger = \alpha C_i^\dagger - i\beta C_i$$

Dado que el concepto de partícula es ambiguo, el “vacío” (el estado sin partículas) es también ambiguo. Recordemos que el vacío está definido por:

$$C_i |0\rangle, \quad \forall i. \quad (5)$$

Normalmente, es decir, en el caso del espacio-tiempo de Minkowski, identificamos como operadores de creación a los coeficientes de soluciones con energía positiva, es decir, aquellos cuya dependencia temporal esta dada por $e^{-i\omega t}$, con ω positiva. Pero, para que esto funcione, es necesario que el espacio-tiempo tenga una invarianza de translación temporal, puesto que este es un requisito para que existan soluciones con frecuencia definida, es decir, para que el operador $\partial/\partial t$ conmute con la evolución de las soluciones.

En el espacio de Minkowski (el espacio-tiempo de la relatividad especial) los distintos sentidos del tiempo, correspondientes a distintos observadores inerciales, dan lugar al mismo sentido de vacío puesto que una solución con energía positiva respecto a un observador inercial, es necesariamente de energía positiva respecto a otro observador inercial.

3. El Espacio de Rindler

Hemos visto que los sentidos del tiempo correspondientes a diversos observadores inerciales en el espacio-tiempo de Minkowski dan lugar al mismo sentido de vacío. Sin embargo, incluso en el espacio de Minkowski (realmente en una porción de éste) existe otro sentido de invarianza temporal, este es el sentido de tiempo asociado con observadores acelerados.

Un observador con: aceleración propia constante a , que pasa por el punto $x = y = 0$, $z = 1/a$, en $t = 0$, tiene la siguiente trayectoria:

$$\begin{aligned} x &= y = 0, \\ z &= \sqrt{\frac{1}{a^2} + t^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde (x, y, z, t) son las coordenadas usuales en el espacio-tiempo de Minkowski.

El conjunto de todos los puntos cubiertos por todos los observadores de este tipo (parametrizados por ξ , de tal modo que $z_0 = e^{a\xi}/a$ indique la posición del observador ξ en $t = 0$) se denomina espacio de Rindler.

La métrica del espacio-tiempo de Minkowski:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (7)$$

en la región cubierta por estos observadores, se puede escribir usando las coordenadas ξ y τ . Estas están relacionadas con las coordenadas z y t por:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\tau), \\ t &= \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\tau). \end{aligned} \quad (8)$$

De este modo se obtiene la expresión de la métrica en coordenadas de Rindler:

$$ds^2 = e^{a\xi} (d\tau^2 - d\xi^2) - dx^2 - dy^2. \quad (9)$$

Vemos que esta métrica tiene la invarianza $\tau \rightarrow \tau + \text{constante}$. Entonces, vemos que tenemos otro sentido de invarianza temporal en la región $z^2 - t^2 = (e^{a\xi}/a)^2 \geq 0$.

Notamos también que el observador con ξ , x , e y constantes, tiene aceleración propia $ae^{-a\xi}$, y que el tiempo propio entre dos eventos en su trayectoria es $e^{a\xi}\Delta\tau$.

4. El Efecto Unruh²

Como hemos visto, los dos sentidos de invarianza temporal dan dos sentidos distintos a la noción de partícula y por tanto a la noción de vacío. No es sorprendente que $|0\rangle_M$, el vacío de Minkowski, no sea un estado vacío para los observadores acelerados. Cabe preguntarnos entonces:

¿Qué estado es exactamente?

La primera observación es que la región de Rindler no cubre todo el espacio-tiempo de Minkowski (el borde se conoce como el horizonte asociado con la invarianza “bajo τ ”).

Resulta que es suficiente introducir otra región similar puesto que el estado del campo en ambas regiones es suficiente para determinar el estado en todo el espacio-tiempo de Minkowski.

²Esta parte del artículo está basada en la discusión de Wald y Unruh en [6].

El operador de destrucción de partículas de Minkowski C_{i_M} está relacionado con los operadores de creación $C_{j_R}^\dagger$ y de destrucción C_{j_R} de partículas de Rindler mediante:

$$C_{i_M} = c_{ij}^I C_{j_R}^I + c_{ij}^{I*} C_{j_R}^{I\dagger} + c_{ij}^{II} C_{j_R}^{II} + c_{ij}^{II*} C_{j_R}^{II\dagger}, \quad (10)$$

donde los índices I y II indican la región de Rindler correspondiente y los c_{ij} son coeficientes numéricos. El vacío de Minkowski es entonces:

$$|0\rangle_M = \Pi_j \left[\sum_{n_j} A |n_j\rangle_{I_R} |n_j\rangle_{II_R} \right], \quad (11)$$

donde los $|n_j\rangle_{I_R}$ y los $|n_j\rangle_{II_R}$ son estados con n_j partículas en el estado j , en la región de Rindler correspondiente, y los A son coeficientes numéricos.

Claramente, éste es un estado con correlaciones entre la región I y la región II. Para describir dicho estado aludiendo sólo a mediciones en la región I tenemos que recurrir a una matriz de densidad (tomando la traza con respecto a II). Obtenemos así que el estado en la región I está descrito por:

$$\rho = \Pi_j \left[\sum_{n_j} \left(\frac{e^{-(2\pi/a)n_j\omega_j}}{1 - e^{-(2\pi/a)\omega_j}} \right) |n_j\rangle \langle n_j| \right], \quad (12)$$

donde ω_j es la frecuencia del modo j , es decir, la dependencia del modo j de τ es $e^{-i\omega_j\tau}$.

Es decir, para los observadores de Rindler en la región I, el estado del sistema es una superposición incoherente de estados de n_j partículas con probabilidad:

$$\begin{aligned} P_n &= Z e^{-(2\pi/a)E_T}, \\ E_T &= \sum_j n_j \omega_j. \end{aligned} \quad (13)$$

Esto quiere decir que para el observador en $\xi = 0$, para el que τ es el tiempo propio y E_T la energía, este es un estado térmico con temperatura $T = a/(2\pi k)$ donde k es la constante de Boltzman.

Para observadores con aceleración propia constante, el vacío es un “estado térmico”; este es el denominado efecto Unruh [3, 4, 5].

5. Análisis de Bremsstrahlung por Observadores Acelerados³

Consideramos una carga puntual q con aceleración propia a . En coordenadas de Rindler, la trayectoria de la carga es $\xi = x = y = 0$ y la 4-corriente es:

$$\begin{aligned} j^\tau &= q \delta(\xi) \delta(x) \delta(y), \\ j^x &= j^y = j^\xi = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Dado que j^τ es independiente de τ , los modos con $E \neq 0$ no serán excitados, entonces, ingenuamente, esperaríamos una “tasa de emisión” igual a cero, pero hay que tener cuidado, puesto que existen infinitos fotones con energía igual a cero en un baño térmico. Entonces, hallamos expresiones de tipo $0 \times \infty$ que no tienen sentido. Para darles sentido a estas expresiones hay que “regularizarlas.” Procedemos así: consideraremos la corriente como el límite cuando $E \rightarrow 0$ de

$$j^\tau = \sqrt{2} q \cos(E \tau) \delta(\xi) \delta(x) \delta(y). \quad (15)$$

También hay que añadir una componente j^ξ para mantener la conservación de la corriente “ $\partial_\mu j^\mu = 0$,” pero esto se puede hacer sin que se afecten los resultados.

Para estudiar el Bremsstrahlung en la electrodinámica cuántica (QED) es necesario cuantizar el campo de fotones.

³Esta parte del artículo se basa en los trabajos de Higuchi, Matsas y el autor [7, 8].

5.1. Cuantización del campo de Maxwell en coordenadas de Rindler

Tomamos el Lagrangiano para el campo de Maxwell A^μ en el "gauge" de Feynman:

$$\mathcal{L} = - \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu A^\mu \right] g^{1/2}. \quad (16)$$

La ecuación de movimiento es:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu = 0. \quad (17)$$

Los modos físicos son aquéllos que, aparte de la ecuación de movimiento, satisfacen la condición de Lorentz, $\nabla_\mu A^\mu = 0$, y que además no son puro "gauge" (es decir, no son de la forma $A^\mu = \nabla^\mu \Lambda$, con Λ una función cualquiera).

Dado que la métrica tiene invarianzas bajo τ , x , e y buscamos soluciones del tipo:

$$A_\mu = f_\mu(\xi) e^{i(k_x x + k_y y - \omega \tau)}. \quad (18)$$

Encontramos el siguiente conjunto completo de soluciones de las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} A_\mu^I &= c^I (0, 0, \partial_y \varphi, -\partial_x \varphi), \\ A_\mu^{Ii} &= c^{Ii} (\partial_\xi \varphi, -\partial_\tau \varphi, 0, 0), \\ A_\mu^G &= c^G \partial_\mu \varphi, \\ A_\mu^N &= c^N (0, 0, \partial_x \varphi, \partial_y \varphi), \end{aligned} \quad (19)$$

con

$$\varphi = K_{(i\omega/a)} \left(\frac{k_\perp}{a} e^{a\xi} \right) e^{i(k_x x + k_y y - \omega \tau)}, \quad (20)$$

donde K es la función de Bessel de índice imaginario, y $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

Los modos I y II son los modos físicos, el modo G es puro “gauge” y el modo N es el modo que viola la condición de Lorentz. Los modos físicos son ortogonales entre sí y a los otros dos. Entonces, expandimos el campo de Maxwell en términos de estos modos como sigue:

$$\hat{A}_\mu = \sum_{\lambda=I,II,G,N} \int [a^{(\lambda,\omega,k_x,k_y)} A_\mu^{(\lambda,\omega,k_x,k_y)} + CH] d\omega dk_x dk_y, \quad (21)$$

donde CH representa el conjugado Hermítico. Las relaciones canónicas de conmutación de \hat{A}_μ y de su momento conjugado $\hat{\Pi}^\mu = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\tau A_\mu)$ nos dan, para los modos físicos ($\lambda = I, II$) la interpretación de los a^λ y de los $a^{\lambda\dagger}$ como operadores de creación y de destrucción de fotones de Rindler (siempre que se escogan correctamente las constantes de normalización c^I y c^{II}). En particular:

$$c^{(II,\omega,k_x,k_y)} = \frac{\sqrt{\sinh(\pi\omega/a)}}{2\pi^2 k_\perp \sqrt{a}}. \quad (22)$$

Notamos que, en contraste con lo que pasa normalmente en el espacio-tiempo de Minkowski, donde ω está definida por k_x , k_y , y k_z , en este caso ω es una variable independiente. Esto se debe a que en la esquina de Rindler el momentum k_ξ no tiene sentido (la métrica no es invariante bajo $\xi \rightarrow \xi + \text{constante}$). Por lo tanto, la cantidad ω es independiente de k_x y de k_y (incluso si $\omega = 0$, los k_x y los k_y pueden tener cualquier valor).

Ahora podemos usar la teoría de perturbaciones usual para calcular la tasa de emisión de fotones de Rindler por nuestra corriente de la ec. (14b). La amplitud de emisión de un fotón de Rindler en el vacío es:

$$\mathcal{A}^{em}(\lambda, \omega, k_x, k_y) = i_R \langle \lambda, \omega, k_x, k_y | \int j_\mu A^\mu d^4x | 0 \rangle_R. \quad (23)$$

Entonces, sólo el modo II estará excitado y la probabilidad de emisión por unidad de tiempo es:

$$dW^{em}(\omega, k_x, k_y) = \left[\frac{q^2 E}{4\pi^2 a^2} K'_{(iE/a)} \left(\frac{k_{\perp}}{a} \right) + \mathcal{O}(E^3) \right] \delta(\omega - E) d\omega. \quad (24)$$

Si tomáramos el límite $E \rightarrow 0$ obtendríamos cero de acuerdo a lo anticipado al comienzo de este análisis. Recordemos, sin embargo, que el estado del campo de Maxwell no es el vacío de Rindler sino un “estado térmico” con temperatura $\beta = a/2\pi$. Es decir, una superposición incoherente donde la probabilidad de hallar N fotones de energía ω es:

$$P_N = Z^{-1} e^{-\beta N\omega}. \quad (25)$$

Entonces, la probabilidad de emisión de un fotón extra hacia un estado donde hay N fotones es:

$$dW_N = (N + 1) dW_0, \quad (26)$$

debido básicamente a que $a^\dagger|N\rangle = \sqrt{N+1}|N+1\rangle$. Por lo tanto, tendremos que la tasa total de emisión de fotones con momentum transversal (k_x, k_y) dado, hacia el estado térmico es:

$$P^{em}(k_x, k_y) = \sum_N \int P_N dW_N(\omega, k_x, k_y). \quad (27)$$

Sustituyendo las expresiones (23) y (24) obtenemos

$$\begin{aligned} P^{em}(k_x, k_y) &= \int \left[\sum_N Z^{-1} (N + 1) e^{-\beta N\omega} \right] dW_0(\omega, k_x, k_y) \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \right) dW_0(\omega, k_x, k_y). \end{aligned} \quad (28)$$

Notamos que el último término en el integrando diverge en el límite $\omega \rightarrow 0$ y esta expresión multiplica a dW que, como vimos, tiende a cero en el límite. Este corresponde al producto $0 \times \infty$ del que

hablamos al comienzo. Las expresiones están “regularizadas” así que podemos proceder tomando el límite $E \rightarrow 0$ después de evaluar la integral, y así obtenemos:

$$P^{em}(k_x, k_y) = \frac{q^2}{8\pi^3 a} \left| K_1 \left(\frac{k_\perp}{a} \right) \right|^2. \quad (29)$$

Análogamente, la tasa de absorción (por la carga) de fotones del estado térmico es:

$$\begin{aligned} P^{abs}(k_x, k_y) &= \int \left(\frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \right) dW_0(\omega, k_x, k_y) \\ &= P^{em}(k_x, k_y). \end{aligned} \quad (30)$$

La última igualdad es válida sólo en el límite $E \rightarrow 0$ puesto que en ese caso el factor 1 en el último integrando de la ec. (25a) no contribuye a la integral debido a que $dW_0 \rightarrow 0$.

La tasa total de respuesta, o sea la probabilidad por unidad de tiempo de emisión o absorción de fotones de Rindler con energía cero y (k_x, k_y) dados es:

$$\begin{aligned} P^{Total}(k_x, k_y) &= P^{em}(k_x, k_y) + P^{abs}(k_x, k_y) \\ &= \frac{q^2}{4\pi^3 a} \left| K_1 \left(\frac{k_\perp}{a} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Esta tasa la podemos comparar con la tasa de emisión de fotones de Minkowski, con el mismo momentum transversal, puesto que (k_x, k_y) es invariante bajo transformaciones de Lorentz en dirección z . Este cálculo lo hacemos usando QED usual: la amplitud de emisión de un fotón de Minkowski al vacío es

$$\mathcal{A}^{em}(\lambda, \vec{k}) = i_M \langle \lambda, \vec{k} | \int j_\mu A^\mu d^4x | 0 \rangle_M. \quad (32)$$

La tasa de emisión de fotones con (k_x, k_y) fijo por unidad de tiempo propio (de la carga) es:

y este diverge en el límite $E \rightarrow 0$. Es decir, se vuelve imposible distinguir el fotón extra al “pasar el límite.” La respuesta parece ser NO.

La pregunta **B** es más difícil. El problema es ¿en qué sentido se toma el límite $E \rightarrow 0$? Es necesario lidiar con este límite puesto que las “partículas reales” son descritas por paquetes de ondas normalizadas, y como $E = 0$ es el punto mínimo del espectro no hay paquetes de onda con $\langle E \rangle = 0$. Pero hay paquetes de onda con $\langle E \rangle$ tan pequeño como se quiera.

En el espíritu de “completación de Cauchy” representamos un “fotón de Rindler de energía cero” por una secuencia $\{\psi_i\}$ de paquetes de ondas normalizadas con $\langle E \rangle = E_i$ y con $E_i \rightarrow 0$. Se necesita definir el concepto de detectabilidad de una secuencia de paquetes de ondas.

Querimos que el concepto sea tal que:

1. Los fotones ordinarios de Minkowski sean detectables.
2. Los fotones de Minkowski de energía cero no sean detectables.
3. Los fotones ordinarios de Rindler sean detectables.

No podemos tomar, por ejemplo, una definición como:

$\{\psi_i\}$ es detectable si existe un detector D y una secuencia de trayectorias $\{\mu_i\}$ para D tal que la probabilidad $P_{\mu_i}(\psi_i)$, de que D detecte a ψ_i durante la trayectoria μ_i satisfaga:

$$P_{\mu_i} > 0, \quad \forall i, \quad (36)$$

porque con esta definición se violaría el requerimiento 2. Tomamos como definición de detectabilidad la siguiente:

$\{\psi_i\}$ es detectable, si existe un detector D , un mecanismo físico R (un cohete con cantidad dada y fija de combustible) y un estado inicial de movimiento μ_0 y una secuencia de movimientos $\{\mu_i\}$

(compatibles con la invarianza apropiada para el tipo de partículas involucradas), con cada μ_i accequible a D partiendo de μ_0 y usando R , tal que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{\mu_i} > 0. \quad (37)$$

Esta última definición satisface los criterios 1, 2 y 3, por lo tanto la podemos usar para estudiar los fotones de Rindler de energía cero.

Notamos que los paquetes de onda ψ_i con $E_i \rightarrow 0$ están concentrados en el horizonte. Esto se puede ver puesto que:

$$A_{\mu}^{(\omega, k_x, k_y)} \sim \sqrt{\sinh(\omega\pi/a)} K_{(i\omega/a)} \left(\frac{k_{\perp}}{a} e^{a\xi} \right), \quad (38)$$

con $\omega \sim E_i$. Para $\xi \neq -\infty$, K es finita y el paquete de onda se anulará en el límite $E_i \rightarrow 0$. Sólo en $\xi = -\infty$, donde K diverge, habrá un límite finito. Recordemos que $\xi = -\infty$ corresponde al horizonte.

Pero si queremos considerar una serie de trayectorias de observadores de Rindler que se acercan al horizonte hallamos el siguiente problema: Como la aceleración propia diverge (está dada por $ae^{-a\xi}$) y tenemos limitado el combustible, el tiempo propio que podemos pasar en cada órbita tenderá a cero. Por lo tanto, la probabilidad de detección del paquete durante ese intervalo de movimiento tenderá a cero.

Los fotones de Rindler de energía cero no son detectables y esto se concluyó sin que fuera necesario lidiar con el hecho de que $(k_x, k_y) \neq 0$.

6. Conclusión

El Bremstrahlung ordinario de QED es interpretado por el observador co-acelerado con la carga como la emisión/absorción (de/en el baño térmico que, según él, caracteriza el campo de Maxwell) de fotones de Rindler de energía cero. Estos no son detectables por dicho observador.

Este es el análogo cuántico al resultado de Boulware según el cual la carga emite radiación, pero hacia puntos ubicados detrás del horizonte, por lo que ésta no es detectable por dichos observadores.

Este estudio ha dado lugar a algunas ramificaciones [9, 10] entre las que cabe destacar el descubrimiento de un nuevo efecto: *Bremstrahlung* por cargas estáticas en el exterior de agujeros negros estacionarios [10].

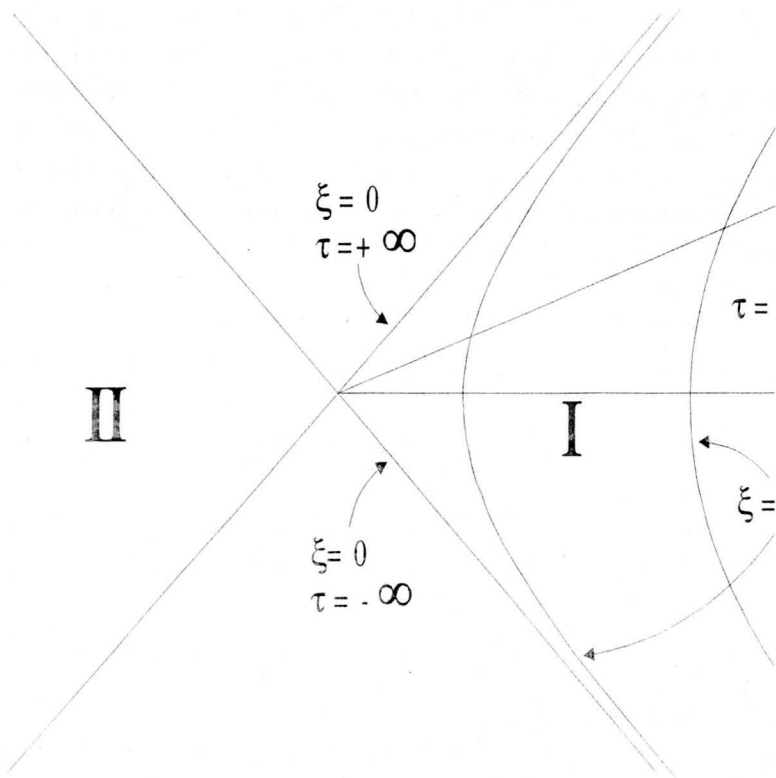


Figura . Espacio de Rindler

Referencias

1. N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
2. D. G. Boulware, *Ann. Phys. (N.Y)* **124**, 169 (1980).
3. S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).
4. P. C. W. Davies, *J. Phys. A: Math. Gen.* **8**, 609 (1975).
5. W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
6. W. G. Unruh and R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **29**, 1047 (1984).
7. A. Higuchi, G. E. A. Matsas and D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **45**, R3308 (1992).
8. A. Higuchi, G. E. A. Matsas and D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **46**, 3450 (1992).
9. G. E. A. Matsas and D. Sudarsky, *Mod. Phys. Lett. A* **9**, 3325 (1994).
10. A. Higuchi, G. E. A. Matsas and D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **56**, R6071 (1997).