METODOLOGIA DE LA FISICA. II[1]

Alberto Cortés O.

Departamento de Física
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia

IV. Etapa de Matematización

Hay dos razones por las cuales la física ha tenido un éxito incomparable en la descripción y explicación del mundo físico. La primera es que, con respecto a muchísimos procesos u objetos que ha querido investigar, el físico ha podido escoger inicialmente sistemas relativamente simples. Por ejemplo: en las investigaciones conceptuales –y en lo posible, también en las experimentales– sobre el movimiento de cuerpos físicos en el espacio, se consideró primero el movimiento en una sola dimensión de un cuerpo lo más simple posible (se le llamó *partícula*), sobre el que actúa una sola fuerza (de magnitud –que puede hasta ser cero– y dirección constante). Cuando este movimiento, que es aproximadamente el de una esferita cayendo verticalmente bajo la acción de la gravedad, se logró entender, se fueron considerando movimientos más complejos. Otro ejemplo: cuando se empezaron a estudiar los átomos, el primero que se estudió profundamente fue el más simple, el de hidrógeno. Luego, los sucesivamente más complejos. Y la segunda, y tal vez principal razón de su éxito, ha sido el hecho de que ha podido usar matemáticas en la descripción y solución de sus problemas. Aquí, naturalmente, surgen varias preguntas: por un lado, ¿Qué características de las matemáticas le dan a la física tanto poder? Por

[1]La primera parte de este artículo apareció en MOMENTO **17**, 1 (1998). Esta es la 2^{da} edición del artículo que con el mismo título apareció en *Texto y Contexto*, Universidad de los Andes, 1987.

otro, ¿qué relación tiene el mundo con las matemáticas para que sea posible describirlo por medio de ellas? Principiemos con las características de las matemáticas responsables de ese poder tan increible que aportan a la física. Hay dos de ellas. La primera tiene que ver con sus características descriptivas; la segunda con sus características deductivas. De las características deductivas hablaremos en la etapa de deduccción de la concepción clásica del método en la física. De las descriptivas hablaremos ahora.

Características descriptivas de las matemáticas

Las matemáticas, por medio de las cuales se pueden describir ciertas relaciones físicas, pueden ser consideradas como una extensión de nuestro lenguaje común y corriente: Por un lado las *oraciones* matemáticas son siempre oraciones declarativas y por lo tanto pueden ser o verdaderas o falsas. Se forman de la misma manera que las oraciones declarativas en nuestra lengua excepto que las primeras usan términos matemáticos donde las segundas usan palabras descriptivas común y corrientes; las palabras no–descriptivas, las lógicas, son comunes a los dos lenguajes. En las oraciones matemáticas, la copula o verbo fundamental parece ser siempre el verbo **ser** sin tiempo gramatical. Así que en ese sentido son un subconjunto muy restringido del lenguaje, pero un conjunto riquísimo en contenido conceptual, como veremos más adelante. El gran filósofo griego Aristóteles distinguió toda una rama de la filosofía, la metafísica, como el estudio del **ser**, de lo que **es**, que dicho en esa forma, produce algún desconcierto. Tanto que, filósofos de la talla de David Hume, han considerado dicho estudio algo así como basura intelectual. La palabra "ser" es increiblemente ambigua. Vale la pena mirar esquemáticamente lo que las matemáticas y la lógica han aportado a la clarificación de este término. Se da uno cuenta que "el estudio del ser" es una multiplicidad de estudios diferentes si sólo se consideran los sentidos en que se usa "ser" en matemáticas, en lógica y en física. (Otros significados, otros usos, se pueden encontrar en un buen diccionario.) Las consideraciones que quiero mostrar en el uso de "ser" en matemática, lógica y física, nos dejan ver que una parte fundamental de estas disciplinas es puramente filosófica: analizar muy cuidadosamente los significados de los conceptos que utilizan, antes o simultáneamente con su utilización. Estos análisis los pueden haber hecho matemáticos, filósofos o lógicos, no importa. Lo que me interesa es mostrar que muchas de las relaciones más importantes de las matemáticas, la física y la lógica, son simplemente precisiones de los varios significados del verbo "ser."

Extensión o Referente versus Intención o Sentido

Principio primero con una distinción que inicialmente captó Gottlob Frege, posiblemente el más grande filósofo de las matemáticas y de la lógica, y que luego amplió Rudolf Carnap. Yo voy a utilizar los términos utilizados por Carnap. Estos dos lógicos sugirieron, para aclarar cierto tipo de confusiones, que, cuando hablamos del significado de una expresión que <u>nombra</u> <u>algo</u>, *e.g.* "la estrella matutina," o que <u>describe</u> algo, por ejemplo "caballo," debemos poner atención a dos diferentes aspectos de ese significado. Uno es la **extensión** (Frege lo llamó **referente**) de la expresión, o sea el ente al que la palabra se <u>refiere</u>, que en el caso de la expresión "la estrella matutina" sería el planeta Venus, y en el caso de "caballo" sería algo así como "los caballos que existen en el espacio y el tiempo."

El otro aspecto es la **intención** (para Frege, **sentido**) de la palabra, o sea las características fundamentales asociadas a la palabra o expresión. En el caso de "la estrella matutina," el sentido o intención se refiere a la <u>manera</u> cómo se está describiendo esa estrella y sus propiedades. En el caso de "caballo," la **intención** sería todas las características que algo tendría que poseer para ser considerado un caballo; lo que se ha llamado también la **esencia** de lo que constituye ser caballo. Debo mencionar que muchos filósofos que conocen a Frege, hoy día usan la palabra "significado" como sinónimo de lo que Frege llamó "sentido." Es útil, para obtener una más clara idea de esta distinción entre intención y extensión, dar ejemplos de palabras común y corrientes que sólo tienen **extensión**, para determinado oyente, y de palabras no tan comunes, pero muy conocidas, que sólo tienen **intención**. Las primeras son los **nombres propios** para personas que no conocen particularmente al individuo, como por ejemplo, Iliana Acero, nombre sacado al azar de la lista telefónica, o José Rodríguez. Esos nombres propios podemos suponer que, en el contexto en que se usan, se refieren a un único ser humano. El nombre "Iliana Acero" se debe considerar, en castellano, como una sola expresión con un solo referente: la persona Iliana Acero. Hablar de la intención de una parte del nombre propio, digamos "acero," es no entender lo que es un nombre propio; aquí no hay la más mínima referencia al metal.

Palabras como "centauro," "unicornio," "sirena," "dragón," "duende," "fantasma," que indudablemente tienen sentido, pues uno sabría aproximadamente qué características algo tendría que tener para ser, por ejemplo, un centauro, o una sirena, es casi universalmente sabido (o creído) que tales seres no existen en el espacio y en el tiempo, y por lo tanto esas palabras, y muchas otras similares no tienen **extensión**, ¡no se refieren a nada! Volviendo entonces al significado de los términos matemáticos, la situación parece ser idéntica a la de los términos del lenguaje ordinario. Con respecto a su función de referencia, que es normalmente la fundamental en matemáticas, sus términos operan lo mismo que los términos del lenguaje común. La expresión "$\sqrt[3]{125}$" tiene como expresión o referente el número 5, en la misma forma como la expresión "el nieto menor de Pedro" se refiere a Pedrito, digamos.

En el caso de la oración matemática $2 + 2 = 4$, la intención del término "$2 + 2$," cuya extensión es el número cuatro, es específicamente las propiedades del número cuatro junto con la *presentación* de ese número cuatro como *la suma del número dos con el número dos*. Mientras que la intención del término "4" son las mismas propiedades anteriores, pero con una presentación lo más directa posible: por medio de su nombre propio, que como tal no tiene intención.

Significado de "SER" en Matemáticas, Física y Lógica

Por otro lado, muchos conceptos matemáticos se pueden considerar como precisiones de los del lenguaje común, con un mayor o menor grado de creatividad. Las oraciones siguientes son todas ejemplos del uso del verbo **ser**. Las escribo primero en lenguaje cotidiano usando la palabra "ser," oraciones que en algunos casos parecerán ligeramente forzadas, o poco naturales, y luego las hago más precisas usando el lenguaje matemático o lógico y, en un caso, físico. Podremos ver claramente cómo *en* **diferentes** *usos del verbo* **ser** *en nuestro lenguaje común y corriente estamos usando conceptos realmente diferentes.* Son tan diferentes que en matemáticas y lógica, ¡necesitamos usar símbolos totalmente diferentes para cada caso! Es decir, que para poder progresar en lógica, matemáticas y filosofía ha sido absolutamente esencial precisar el concepto **ser**, y *distinguir sus muchos diferentes significados.* El gran lógico Bertrand Russell dijo en una ocasión, refiriéndose al mismo verbo, que: ¡··· "es una vergüenza para la raza humana" usar la misma palabra con tan diferentes sentidos! Comentaré de paso aquellos significados de "ser" que dan lugar a problemas filosóficos a veces muy profundos que todavía se estudian. [El lector podría, si le parece interesante, leer en cada caso sólo la oración que tomo como ejemplo, y explicarse a sí mismo el significado de "ser;" Luego compararla con la explicación del autor.]

1. En la oración 'dos más dos <u>es</u> cuatro,' donde la palabra 'es' significa '**es igual a**,' y que matemáticamente se escribe '$2 + 2 = 4$,' puede pensarse -recordando lo que dijimos arriba- como, "la extensión de la expresión '$2 + 2$' es la misma que la extensión de nombre '4.'

2. Consideremos la oración "chiflarse <u>es</u> trastornarse o perder la sensatez." Desde el punto de vista en el cual hablamos de nuestro lenguaje, es decir, nos referimos a nuestras oraciones y decimos de ellas que son verdaderas o falsas, o que están escritas en determinado idioma, o que tienen sujeto y predicado; o nos referimos a las palabras mismas que estamos usando, o las nombramos, decimos técnicamente que estamos usando un metalenguaje. En el estudio de la **gramática**, por ejemplo, estamos continuamente usando un metalenguaje pues hablamos de *verbos*, *adjetivos*, *oraciones*, *párrafos*, etc. Cuando nos referimos metalingüísticamente a la oración "chiflarse es trastornarse o perder la sensatez," observamos que esa oración se puede expresar como: "la palabra 'chiflarse' significa lo mismo que, o es sinónima de, la expresión 'trastornarse o perder la sensatez.' " También decimos, " 'chiflarse' es, por definición, '$\cdots$ perder la sensatez.' " Debe ser claro para el lector que el "es" en "chiflarse es trastornarse o perder la sensatez," es claramente diferente del "es" de identidad que vimos en el primer ejemplo.

El concepto de **definición** es filosóficamente muy complejo y rico. Hoy en día no hay consenso entre filósofos de cómo definirlo, o de cuantos tipos de definición hay. Sólo menciono que la mayoría de las definiciones que se encuentran en un diccionario, simplemente presentan los usos que la gente le da a las palabras. Pero en las matemáticas y en las ciencias uno con frecuencia **estipula** un significado. Lo que se estipula generalmente es la **intención** de la "nueva" palabra, y en ese caso las **extensiones** correspondientes tienen que coincidir. Cuando se estipula un significado, los significados de la palabra definida y de su definición deben ser idénticos, y por lo tanto uno debe poder intercambiar la nueva palabra por la expresión que define. Pero eso no es siempre correcto como, por ejemplo, cuando hay autoreferencia a la palabra definida. (Ejemplo: "carro" significa "automóvil" y tiene cinco letras.)

3. En la oración "$(\sin^2\phi + \cos^2\phi)$ es 1" el 'es,' aunque normalmente se escribe en matemáticas como '$=$,' se escribe también como '$\equiv$' (tres líneas paralelas) y tiene un significado un poco diferente al 'es' del primer ejemplo. Allá significa 'es igual a,' un sentido que ya explicamos; aquí significa 'es idéntico a,' que específica adicionalmente que la igualdad es válida **para todo ángulo** ϕ.

4. La oración "este objeto es un lápiz" se entiende, en matemática y en lógica como "este objeto es un **elemento de** el conjunto de lápices." **Ser un elemento de** es la relación fundamental en la teoría de conjuntos, totalmente diferente a las otras relaciones que estamos mirando. En matemáticas se utiliza normalmente el símbolo '$\in$' como sinónimo de "**es un elemento de**."

5. La oración 'las ballenas son mamíferos' debe entenderse como 'el conjunto de ballenas **es parte de** (o es un subconjunto de) el conjunto de mamíferos,' y aquí tenemos un nuevo significado de 'ser:' '**ser un subconjunto de**,' otra relación importantísima en la teoría de conjuntos, y completamente diferente a '**ser un elemento de**.' Se usa el símbolo '$\subset$' como sinónimo de '**ser un subconjunto de**.'

6. El concepto (¿los conceptos?) de **existencia** o **realidad** también se expresa por medio del verbo 'ser,' aunque mucho menos en castellano que en inglés: en inglés existe la expresión "**there is**" que precisamente significa "hay" o "existe," como en: "*There is a tree over 100 meters high.*" (Hay un árbol, existe un árbol, de más de 100 metros de altura.) En castellano la aseveración de existencia más directa que he oído hacer por medio del verbo '**ser**' es "Dios es." Uno pensaría que se podría decir que **existir** es aquella **propiedad** del **ser** que distingue las cosas reales de las ficticias. Interesantísimamente, sin embargo, ni Emmanuel Kant, ni Gottlob Frege, ni Bertrand Russell, aceptarían dicha descripción: para Kant la existencia no es una propiedad; para Frege y para Russell es una propiedad de propiedades, significa con esto, que una oración como "Dios existe" no tiene la misma forma lógica que "Sirius brilla," en la que una propiedad se está predicando de la estrella Sirius. Según ellos, lo que lógicamente quiere decir la oración "Dios

existe" es " 'la propiedad de ser Dios' tiene una instancia." En todo caso, para estos tres profundos filósofos de la lógica, la famosa prueba ontólogica de la existencia de Dios está viciada. (Ver E. J. Lowe, en la bibliografía.).

Estos significados de 'ser,' 'existencia,' y 'realidad,' han dado para toda una rama de la filosofía, la ontología, que se considera parte de la metafísica. "Ontología" la definiría yo más simplemente en uso como: la ontología de [por ejemplo] Schopenhauer son aquellos entes que él está suponiendo que fundamentalmente existen, de tal modo que todos los otros entes que aparecen en sus escritos sean dependientes para su existencia de los primeros.

7. En física, y en la vida cotidiana, donde constantemente consideramos objetos que perduran un cierto tiempo se presenta un uso del verbo 'ser' que no se ve en matemáticas. Imagínese una serie de fotografías de Einstein (o del lector) a los tres años, a los 26 años, a los 40 años –o cualquiera otras edades diferentes. De cada una de ellas uno dice correctamente "este **es** Einstein," (o el lector). O, refiriéndose a dos de los individuos en las fotografías, puede perfectamente decir "estos dos **son** la misma persona." Esa identidad consigo mismo de un ser humano en diferentes estados, etapas, o períodos de su vida, o de cualquier objeto que perdura en el tiempo la ha llamado Hans Reichenbach, en "La Dirección del Tiempo" o en su obra clásica "La Filosofía del Espacio y el Tiempo", **genidentidad**, que es, sin duda, un sentido diferente a los que hemos visto.

8. Hay muchos tipos de **equivalencia** en matemáticas y en lógica donde perfectamente puede ocurrir que un individuo, sin precisar el tipo de equivalencia que se presenta, pueda decir correctamente "esto es aquello" donde el 'es' es un '**es**' de **equivalencia**, ¡diferente a todos los que hemos visto hasta ahora, y diferentes entre sí! Por ejemplo, en la *lógica de*

proposiciones dos oraciones pueden tener formas lógicas diferentes pero ser idénticas en su contenido conceptual; decir que *si Pedro es tacaño, el no dona diez mil pesos a la comunidad* es (lo mismo que) decir que *si Pedro dona diez mil pesos a la comunidad, el no es tacaño.* O más obvio aun, decir que *no es el caso que Marina no ayude a su comunidad*, es decir que *Marina sí ayuda a su comunidad.*

Como vemos entonces, el verbo 'ser', usado corrientemente es increíblemente ambiguo. Las matemáticas, la lógica, la filosofía, nos han ayudado, y nos seguiran ayudando a distinguir sus muchos diferentes significados, y así hacer nuestro pensamiento más preciso y, por lo tanto, menos confuso y paradójico. En cuanto a conceptos que han sido más creaciones que precisiones por parte de los matemáticos sugeriría el de tensor o el de espacios de n dimensiones ($n > 3$). Por lo tanto me parece razonable decir que las oraciones y términos matemáticos son una extensión del lenguaje común y corriente, que usamos para describir el mundo y nuestras posibles experiencias.

Hay por lo menos dos características descriptivas de las matemáticas que dan poder al que las usa. La una es lo compacto de sus símbolos; la otra es la precisión con que se han definido sus conceptos. Si un individuo es capaz de expresar alguna ley, digamos, en términos matemáticos, lo que dice, lo dirá más claramente (debido a la precisión de sus símbolos), y la estructura o forma lógica de esa ley será mucho más fácil de apreciar (debido a lo compacto de esos símbolos, tanto de los símbolos que representan objetos o cualidades, como los símbolos que representan las relaciones entre éstos).

Carnap y Matematización de Conceptos

Hay otro tema importante relacionado a la matematización de conceptos de la física que ha sido tratado en detalle por Rudolf Carnap (*Los Fundamentos Filosóficos de la Física*, 1966) y Karl Hempel

(*Fundamentos sobre la Formación de Conceptos en las Ciencias Empíricas*, 1952). Carnap, por ejemplo, recalca el hecho de que en nuestro lenguaje hay términos clasificatorios como *rojo*, términos comparativos como *más caliente que*, y términos cuantitativos como *temperatura*.

1. Los términos clasificatorios se refieren a conceptos netamente cualitativos, que son los más comunes, y presumiblemente los más antiguos. Su función es la de colocar objetos en una cierta clase. Entre más restringida la clase, más información da sobre el objeto. Por ejemplo, el decir que un objeto es un mamífero (pertenece a la clase de los mamíferos) da mucho menos información que el decir que el objeto es un caballo percherón (pertenece a la clase de los percherones).

2. Los conceptos comparativos nos informan cómo se relaciona un objeto, en términos de más o menos, con otro objeto. El tipo de información que da un concepto comparativo es diferente del tipo de información que da un concepto clasificatorio, aunque la cantidad de información que da el primero puede ser mayor o menor que la que da el segundo, dependiendo de los conceptos. Los conceptos comparativos juegan un papel intermedio entre los clasificatorios y los cuantitativos. Normalmente, antes de introducir un concepto cuantitativo en un cierto campo, lo preceden conceptos comparativos; y con frecuencia, los conceptos comparativos son la base de los cuantitativos, como en el caso de *más caliente* con el de *temperatura*.

3. Los conceptos cuantitativos son conceptos a los que se les puede asignar valores numéricos. Estos conceptos nos presentan no sólo el tipo de información que presentan los conceptos comparativos, sino más aun. Así como los conceptos clasificatorios se expresan por medio de predicados, los conceptos cuantitativos se expresan por medio de símbolos de funciones que toman valores numéricos y que Carnap llama functores.

> Implícito en el significado de un concepto cuantitativo, como longitud o temperatura, hay ciertas reglas de medición. Esas reglas no son sino instrucciones de cómo asignar un número a un proceso u objeto.

La tesis más importante que defiende Carnap, dada esta distinción que hemos hecho entre términos cuantitativos, comparativos, y clasificatorios, es que los términos cuantitativos –o comparativos– existen no porque es tal que nos presentan ciertas características que se puedan medir, o que se puedan comparar, sino que esos términos son definidos, son creados por individuos investigando ciertos campos y tratando de entenderlos. Por lo tanto, razona Carnap, conceptos cuantitativos pueden ser creados en cualquier campo; y normalmente deben ser precedidos por conceptos comparativos, que son más valiosos de lo que se cree.

Aunque existe cierta arbitrariedad en la creación de cualquier concepto, como indiqué en el caso del concepto rojo, los conceptos clasificatorios son casi totalmente arbitrarios. Claro que para que estos sean aceptados en una cierta cultura, deben tener propiedades que las hagan útiles a la gente; es decir, que satisfagan alguna necesidad ya sea práctica o teórica. Los conceptos comparativos tienen que satisfacer ciertas relaciones lógicas –que Carnap describe en detalle– por el solo hecho de ser conceptos comparativos; fuera de eso, deben ser aplicables a la descripción del mundo. Los conceptos cuantitativos tienen que satisfacer aun más requisitos lógicos por el solo hecho de ser conceptos cuantitativos. Carnap los especifica también. Fuera de eso, deben ser aplicables a la descripción del mundo físico. No entro en detalles en cuanto a los requisitos lógicos a que me referí pues harían la presentación un poco técnica.

Tal vez debo decir que la presentación detallada sobre conceptos comparativos y cuantitatvios que hace Carnap está viciada metodológicamente en un punto interesantísimo para nosotros, pues tiene que ver con la aplicación de las matemáticas a la física. Es un punto que mencionó Poincaré. Quiero primero estudiar una situación más simple y luego volver al problema de Carnap.

Regresemos a la pregunta preponderantemente filosófica que nos hicimos hace un rato: ¿Qué características de las matemáticas, o del mundo, o de nuestras descripciones del mundo, nos permiten que podamos matematizar la física? Una manera sencilla de abordar este problema –que, excepto por el problema de Carnap que acabo de mencionar, será todo lo que podremos hacer ahora– es principiar con un ejemplo simple de aritmética aplicada, pero que en mi opinión tiene profundas implicaciones para la contestación de nuestras preguntas. Principiemos con una proposición aritmética pura: $2+3=5$. ¿Esto qué significa? Que tenemos una oración en la que se afirma identidad o igualdad entre los objetos a los cuales se refieren las expresiones '2+3' y '5'; que estos objetos son números, cierto tipo de entes ideales puramente matemáticos o lógicos; que existe una operación, definida para números, que llamamos adición, que le asigna a los números '2' y '3' un número, que nuestra proposición afirma que es el '5'. Ahora, cuando aplicamos esta relación en la vida práctica a objetos físicos, por ejemplo, piedritas, decimos usualmente que si juntamos dos piedritas a tres piedritas obtenemos cinco piedritas, y que así estamos aplicando la proposición aritmética, y que no hay ningún problema, todo siendo muy simple. Y todos estamos contentos hasta que en vez de piedritas alguien mezcla 2 litros de agua con 3 litros de alcohol y NO obtiene 5 litros de fluido, porque físicamente NO los obtiene; obtiene menos, digamos 4.8 litros de fluido. ¿Qué ha sucedido? ¿Se estarán violando las leyes de la aritmética? ¿2+3 será igual a 4.8 en ciertas circunstancias? ¿O será por lo que le añadimos agua al alcohol y estos son objetos de diferente substancia? Pero podríamos haber dicho que lo que hicimos fue añadir 2 litros de líquido a 3 litros de líquido y que obtuvimos 4.8 litros de líquido. Bajo esta segunda descripción hemos mezclado líquidos y obtenido líquidos como en el caso anterior juntamos piedritas sin preocuparnos de su composición.

Cuando analizamos detenidamente este ejemplo tratando de vislumbrar dónde está el problema central, nos damos cuenta de algunos de los requisitos fundamentales, necesarios para poder aplicar la aritmética a la física. Miremos qué pasó en este ejemplo: utilizamos ciertas palabras para juntar, añadir, mezclar, como si fueran sinónimos de sumar. Juntar, añadir, mezclar, son operaciones físicas; sumar es una operación aritmética, y confundirlas nos puede producir grandes perplejidades. Más específicamente, en el caso de los fluidos nos damos cuenta que la confusión está en la operación física de mezclarlos: mezclar fluidos por volumen no tiene las mismas características formales que la operación de juntar esferitas o sumar números. En otras palabras, apreciamos aquí una propiedad importantísima en la correcta aplicación de las matemáticas a la física: Las características formales del sistema físico –objetos, propiedades y relaciones entre ellos– tienen que ser idénticas a las del sistema de objetos y relaciones matemáticas que queremos usar. Una vez ese requisito se cumple, es decir, una vez que el sistema físico de interés es precisamente un modelo lógico del sistema matemático que queremos aplicar, ese sistema matemático es cabalmente, irreprochablemente aplicable al sistema físico.

Este ejemplo que acabamos de estudiar nos permite ver algo más. Si hubieramos tomado los fluidos no por volumen sino por peso, hubieramos encontrado que –a primera y segunda aproximación– el peso de la mezcla es la suma de los pesos de los componentes. Diríamos entonces, que mezclar los fluidos por peso (masa más estrictamente) es una operación física que tiene la misma estructura lógica que sumar números en aritmética. Pero de nuevo estaríamos errados. Esta es sólo una aproximación, como lo han sido la mayoría de las leyes físicas que hemos encontrado a través de la historia. Las relaciones matemáticas escogidas no han descrito estrictamente el comportamiento de las cantidades físicas asociadas con ellas. Según la relatividad, la masa de la mezcla es diminutamente menor que la suma de las masas de los componentes. Por lo tanto no es el caso tampoco que juntar o mezclar líquidos por masa tenga exactamente las mismas propiedades que sumar números en aritmética.

Vuelvo ahora a la dificultad metodológica de la cual Carnap no se dió cuenta en la parte técnica de su desarrollo: Supongamos que usted quiere comparar el peso de varios objetos A, B, C, etc; es decir, quiere utilizar el concepto comparativo, *pesar menos que* para ordenar los objetos por peso. Hay dos relaciones físico–matemáticas asociadas con ese concepto: *igual en peso* y *X pesa menos que Y*, donde X sería uno de los objetos y Y otro. Carnap sugiere que estas relaciones las puede asignar experimentalmente por medio de una balanza; él dice que define igualdad de peso –y aquí está el problema– según los resultados que de la balanza. Al mismo tiempo estas relaciones deben satisfacer la condiciones lógicas de que hablé. En particular la relación física *igualdad de peso* tiene que satisfacer la relación lógica de cualquier igualdad, llamada transitividad, la que implicaría que si A pesa igual que B y B igual que C, entonces A debe pesar igual que C. Sin embargo, uno encuentra experimentalmente que si A, B, y C, son cuerpos suficientemente cercanos en peso, la balanza podría equilibrar a A y B; también equilibrar a B y C; pero no a A y C. O sea que los resultados experimentales pueden violar los requisitos lógicos; ¡lo que no se puede aceptar! Por lo tanto la relación entre matemáticas y física en este caso tiene que efectuarse de una manera diferente a la que Carnap sugiere. Las reglas matemáticas tienen que imponerse en este caso en cuanto a igualdad de peso y no los resultados experimentales. ¡Esos no pueden usarse para definir igualdad de peso! Como se puede ver, este es un problema metodológicamente sutil que no necesitamos resolver en este momento. Lo importante es darse cuenta de la dificultad.

Podríamos decir mucho más:

1. Sobre problemas que surgen en la aplicación a la física en otras ramas de las matemáticas.

2. Sobre las características macroscópicas de muchos fenómenos naturales que los hace felizmente descriptibles por medio de ecuaciones diferenciales.

Y otros. Por el momento, dejemos el problema de la matematización de la física y pasemos a una breve etapa de la deducción.

V. Etapa de Deducción

El poder fenomenal que las matemáticas aportan a la física se debe principalmente a sus características deductivas. A través de los siglos, las matemáticas han ido considerando una gran variedad de sistemas de objetos abstractos. A los objetos les postula ciertas propiedades y relaciones que se expresan por medio de unas pocas oraciones que han llamado axiomas. Los objetos pueden ser números, o líneas y puntos, o conjuntos abstractos, o funciones, o cualquier otro tipo de entes matemáticos o lógicos que a los matemáticos se les ocurra estudiar. Por medio de raciocinios estrictamente deductivos se va elaborando, analizando, el contenido de los axiomas; se va extrayendo relaciones implícitas en los axiomas originales. Si las relaciones son interesantes, o psicológicamente sorprendentes, las llaman teoremas que, dada la naturaleza de las deducciones, tienen que ser tan estrictamente ciertos de los entes del sistema como los axiomas.

Hay algo en lo que acabamos de describir que merece precisarse. Miremos la penúltima oración: "Por medio de raciocinios estrictamente deductivos, SE va elaborando, analizando el contenido de los axiomas; SE van extrayendo relaciones implícitas en los axiomas originales." ¿Quiénes van elaborando, analizando, $\cdots$, y luego extrayendo relaciones implícitas en los axiomas? ¡Pues los matemáticos!

Algún matemático creativo y brillante, como por ejemplo Euclides o Eudoxo, hace 23 siglos, logró intuir y luego demostrar uno o más determinados teoremas geométricos por medio de inferencias estrictamente deductivas basándose sólo en un determinado grupo de axiomas y utilizando también leyes puramente lógicas. Más tarde otros matemáticos creativos y brillantes, ya sea haciendo uso de los logros de sus antecesores, o basándose en nuevos sistemas de axiomas, demostraron –de nuevo, a punta de enorme ingenio y mucho, mucho esfuerzo– nuevos teoremas. Luego vinieron otros y otros matemáticos que a través de los siglos han ido produciendo (y continúan haciéndolo) un maravilloso legado de sistemas de axiomas con sus respectivos teoremas. Este legado matemático es precisamente el conocimiento lógico –pues estrictamente no tiene ningún contenido empírico intrínseco– del cual hacen uso los físicos para describir sus sistemas físicos que el mundo les presenta.

Ahora, si los físicos encuentran sistemas de objetos, físicos o abstractos pero supuestamente reales cuyas leyes o teorías tienen la misma estructura lógica que algún sistema matemático como cualquiera de los que acabo de mencionar, entonces pueden utilizar todos los resultados que los matemáticos obtuvieron para el sistema matemático. Primero tienen que reemplazar las características físicas por las correspondientes características matemáticas. Entonces, todos los teoremas del sistema matemático, una vez interpretados físicamente, tienen que ser tan ciertos para el sistema físico como son los axiomas interpretados físicamente.

Supongamos ahora que un físico ha descubierto una ley o teoría H (que por el momento sólo considera una hipotesis) y que matematizada toma la forma de algún sistema ya conocido en matemáticas. El procede a deducir consecuencias lógicas buscando que estas sean comparables con experiencias observacionales. En esto consiste esta etapa de deducción. Como recordamos, si la hipótesis H es teórica, las consecuencias lógicas serán expresadas en función de términos teóricos y el físico, a punta de ingenio, tendrá que encontrar lo que llamamos antes *el diccionario* que le permita conectar los términos teóricos con términos observacionales. El buscará encontrar leyes experimentales en sus deducciones de las leyes teóricas. Y si ya tiene leyes experimentales, buscará encontrar oraciones observacionales como deducciones de éstas. Estas oraciones observacionales deducidas de las leyes experimentales serán comparadas con observaciones del mundo físico; pero esto ya pertenece a la etapa de comprobación.

Antes de dejar esta etapa me gustaría recordar que en la búsqueda de conexiones de la teoría con leyes experimentales, los modelos que se utilizaron para encontrar la teoría son, con frecuencia, una fuente importante de ideas.

VI. Etapa de Comprobación

1. Fase de comprobación experimental

Esta etapa se divide con naturalidad en dos fases o procesos en extremo diferentes. La primera, que podemos llamar la fase de comprobación experimental, consiste en confrontar alguna predicción –deducida de las hipótesis ya creadas– con observaciones del mundo físico. La segunda, que es completamente teórica, la podríamos llamar la fase de comprobación teórica pero, siguiendo la gran mayoría de filósofos que trabajan en este problema, la llamaremos la fase de comprobación de hipótesis. Intimamente involucrada con esta fase de confirmación está el problema de David Hume, que enseguida estudiaremos: El problema, ¿Es o no es posible dar alguna justificación a las inferencias inductivas?

La primera fase, la de comprobación experimental, no tiene mayores problemas metodológicos, y por lo tanto, no la estudiaremos en ningún detalle. Consiste en tratar de observar lo que se ha predicho. Habiendo deducido de nuevas hipótesis (que llamaremos H) consecuencias observables pero hasta ahora desconocidas –es decir predicciones (que llamaremos O)– el físico experimental, casi siempre necesitando enorme ingenio, busca alguna manera de observar lo que se ha predicho. En algunos casos, sus observaciones concuerdan con lo predicho: es decir, la oración O resulta verdadera; en otros no, la oración O resulta falsa. La fase de confirmación de hipótesis que le sigue consiste en juzgar las consecuencias lógicas de cualquiera de estos dos resultados experimentales: O verdadera, u O falsa.

2. La fase de confirmación

La fase de confirmación de hipótesis es la etapa metodológica que tiene mayores dificultades. Describámosla vagamente y luego consideremos los problemas fundamentales que la acompañan. Supusimos hace un momento la existencia de una o más hipótesis nuevas, que llamamos **H**, que implican lógicamente ciertas oraciones observacionales que llamamos **O**. *Si* **O** *resulta falsa, entonces* **H** *también tiene que ser falsa.* (Suponiendo, claro, que otras hipótesis que normalmente acompañan a **H** son verdaderas, como también ciertas condiciones iniciales que se usaron en la predicción de **O** a partir de **H**). Por lo tanto este aspecto de la confirmación es muy simple, y ha sido la base de la *corroboración* de hipótesis de Popper que discutiremos enseguida.

El problema difícil se presenta cuando **H** implica **O** y **O** resulta verdadera. Por ejemplo: Supongamos que de una hipótesis de la física, $\mathbf{H}_1$, se predice la existencia de una nueva partícula con determinadas características; y supongamos también, que la partícula se ha encontrado. No podemos decir que $\mathbf{H}_1$ está probada o verificada. Eso sería afirmar demasiado, pues una hipótesis falsa puede implicar oraciones verdaderas: Por ejemplo de la hipótesis que *Todos los estudiantes en la Universidad de Los Andes son hombres* se puede deducir que *Camilo X, un estudiante de Los Andes, es hombre.* Pero eso no hace la hipótesis verdadera. Lo que sí se dice es que la observación de la nueva partícula confirma a $\mathbf{H}_1$, en el sentido vago y *cualitativo* de darle alguna probabilidad a la hipótesis. La fase de confirmación se puede considerar que consiste de dos problemas. El primero es el problema de Hume de justificar la inferencia inductiva. El segundo es el problema de Goodman y Carnap de analizar la manera en que hacemos inferencias inductivas en la ciencia y en la vida común y corriente y encontrar conceptos claros de la noción de confirmación.

A. El Problema de David Hume

Consideremos la siguiente declaración, que ya vimos en la sección III.4, en un ejemplo: "Todos los seres humanos –o mamíferos– que hoy día vivimos, moriremos." Será verdadera o será falsa. Estoy casi seguro que si el lector es un adulto en buen estado de salud mental diría algo como: "Creo que es verdad; por lo menos mi cuerpo algún día morirá, y también el de cada uno de los seres humanos que vive hoy, y también el de cada mamífero. Simplemente me parece imposible lo contrario, que alguno de nosotros, individualmente viva más de cinco mil años, de cien mil años, y mucho, mucho más, millones y millones de años. No sólo creo que es verdad; lo creo con mucha seguridad. Aunque me doy cuenta que no puedo estar absolutamente seguro; pues no es lógicamente imposible que alguien viva indefinidamente." Y si al lector se le preguntase: "¿En que se fundamenta Ud. para estar tan seguro que ninguno de los seres de que hablamos y que viven hoy día en nuestro planeta va a vivir indefinidamente?" Estoy seguro que en últimas el lector va a apelar a la experiencia que ha vivido nuestra raza; diría algo como: "Todos los seres humanos que hemos podido observar –o todos los mamíferos que han vivido– y no están vivos ahora, han muerto." Tal vez añadiría algo como: "Simplemente no tenemos ninguna evidencia de mamíferos o seres humanos que hoy día tengan siquiera quinientos años, ¡mucho menos diez mil o un millón de años! Pues este, es un ejemplo de una inferencia inductiva muy fuerte. Podemos estar muy seguros de que la conclusión es cierta, y también de que la base, la evidencia que tenemos de que es cierta, es nuestra experiencia pasada que no está toda, ni mucho menos, incluída en la premisa que hemos dado. Podríamos incluir la experiencia que se utilizó como base de muchas de las "leyes de la biología," aunque NO las leyes mismas, pues estas están también ancladas epistemológicamente (es decir, en cuanto a lo ya conocido) en experiencias del pasado, y sin embargo afirman sobre el futuro y sobre lo no conocido (por ser leyes generales).

Otro ejemplo de una inferencia inductiva fuerte: Usted se encuentra en cualquier sitio sobre la superficie de la Tierra. Encuentra una piedra del tamaño de una bola de billar –digamos que pesa aproximadamente una libra. Usted la levanta, digamos un metro sobre la superficie. Y luego la suelta. Pero antes de soltarla Ud. afirma: "esta piedra va a caer." Un amigo le pregunta: "¿Ud. simplemente cree que va a caer, o está seguro que va a caer?" Supongamos que Ud. contesta: "Estoy seguro que va a caer, yo se que va a caer." Su amigo: "¿Qué justificación me puede dar para decir que

Ud. sabe que la piedra va a caer?" Ud.: "Simplemente el hecho que en situaciones similares en el pasado, ya sean mías o de otras personas, los objetos pesados que se han dejado caer, ¡han caído!" Su argumento entonces es:

Premisa: "En el pasado, todos los objetos pesados que, en circunstancias similares, se han dejado caer, han caído."

Conclusión: "Hoy voy a soltar esta piedra, por lo tanto ¡va a caer!"

Un problema filósofico fundamental que presenta *cualquier* inferencia inductiva es el problema de la "validez," [estrictamente, la noción de validez se usa sólo para argumentos deductivos. Más adelante diremos algo más sobre esto.] el problema de "lo apropiado," qué es o no es hacer una inferencia inductiva. Podemos darnos cuenta de varias características fundamentales de estas inferencias. La primera es que la conclusión contiene información, dice algo que no está incluido en las premisas: son ampliativos. En los argumentos deductivos, en contraste, lo que dice la conclusión está siempre contenido en las premisas, ya sea implícitamente. Al ser un argumento inductivo siempre ampliativo, *su conclusión siempre puede ser falsa.* Nunca podemos garantizar que sea verdadera; aun si consideramos el argumento inductivo muy fuerte, como es el ejemplo que dimos sobre la caída de una piedra en un campo gravitacional cuando la soltamos, o el de la eventual muerte de todo ser humano que hoy día vive. Es lógicamente posible que la piedra no caiga. Pero por nuestra experiencia pasada tenemos mucha confianza, podríamos apostar mucha plata –el poder apostar confidentemente que algo va a suceder es una buena medida de nuestra confianza– a que la próxima piedra que soltemos, en las condiciones estipuladas, cae. Nos parecería que la conclusión de ese argumento inductivo, sin duda va a ser correcta en el próximo ensayo. No podemos negar que algunos de estos argumentos nos parecen fortísimos; tanto que estaríamos dispuestos a decir que "la piedra tiene necesariamente que caer." Esa **necesidad** que aparece humanos que vive hoy, y también el de cada mamífero. Simplemente me parece imposible lo contrario, que alguno de nosotros, individualmente viva más de cinco mil años, de cien mil años, y mucho, mucho más, millones y millones de años. No sólo creo que es verdad; lo creo con mucha seguridad. Aunque me doy cuenta que no puedo estar absolutamente seguro; pues no es lógicamente imposible que alguien viva indefinidamente." Y si al lector se le preguntase: "¿En que se fundamenta Ud. para estar tan seguro que ninguno de los seres de que hablamos y que viven hoy día en nuestro planeta va a vivir indefinidamente?" Estoy seguro que en últimas el lector va a apelar a la experiencia que ha vivido nuestra raza; diría algo como: "Todos los seres humanos que hemos podido observar –o todos los mamíferos que han vivido– y no están vivos ahora, han muerto." Tal vez añadiría algo como: "Simplemente no tenemos ninguna evidencia de mamíferos o seres humanos que hoy día tengan siquiera quinientos años, ¡mucho menos diez mil o un millón de años! Pues este, es un ejemplo de una inferencia inductiva muy fuerte. Podemos estar muy seguros de que la conclusión es cierta, y también de que la base, la evidencia que tenemos de que es cierta, es nuestra experiencia pasada que no está toda, ni mucho menos, incluída en la premisa que hemos dado. Podríamos incluir la experiencia que se utilizó como base de muchas de las "leyes de la biología," aunque NO las leyes mismas, pues estas están también ancladas epistemológicamente (es decir, en cuanto a lo ya conocido) en experiencias del pasado, y sin embargo afirman sobre el futuro y sobre lo no conocido (por ser leyes generales).

Otro ejemplo de una inferencia inductiva fuerte: Usted se encuentra en cualquier sitio sobre la superficie de la Tierra. Encuentra una piedra del tamaño de una bola de billar –digamos que pesa aproximadamente una libra. Usted la levanta, digamos un metro sobre la superficie. Y luego la suelta. Pero antes de soltarla Ud. afirma: "esta piedra va a caer." Un amigo le pregunta: "¿Ud. simplemente cree que va a caer, o está seguro que va a caer?" Supongamos que Ud. contesta: "Estoy seguro que va a caer, yo se que va a caer." Su amigo: "¿Qué justificación me puede dar para decir que

Ud. sabe que la piedra va a caer?" Ud.: "Simplemente el hecho que en situaciones similares en el pasado, ya sean mías o de otras personas, los objetos pesados que se han dejado caer, ¡han caído!" Su argumento entonces es:

Premisa: "En el pasado, todos los objetos pesados que, en circunstancias similares, se han dejado caer, han caído."

Conclusión: "Hoy voy a soltar esta piedra, por lo tanto ¡va a caer!"

Un problema filósofico fundamental que presenta *cualquier* inferencia inductiva es el problema de la "validez," [estrictamente, la noción de validez se usa sólo para argumentos deductivos. Más adelante diremos algo más sobre esto.] el problema de "lo apropiado," qué es o no es hacer una inferencia inductiva. Podemos darnos cuenta de varias características fundamentales de estas inferencias. La primera es que la conclusión contiene información, dice algo que no está incluido en las premisas: son ampliativos. En los argumentos deductivos, en contraste, lo que dice la conclusión está siempre contenido en las premisas, ya sea implícitamente. Al ser un argumento inductivo siempre ampliativo, *su conclusión siempre puede ser falsa.* Nunca podemos garantizar que sea verdadera; aun si consideramos el argumento inductivo muy fuerte, como es el ejemplo que dimos sobre la caída de una piedra en un campo gravitacional cuando la soltamos, o el de la eventual muerte de todo ser humano que hoy día vive. Es lógicamente posible que la piedra no caiga. Pero por nuestra experiencia pasada tenemos mucha confianza, podríamos apostar mucha plata –el poder apostar confidentemente que algo va a suceder es una buena medida de nuestra confianza– a que la próxima piedra que soltemos, en las condiciones estipuladas, cae. Nos parecería que la conclusión de ese argumento inductivo, sin duda va a ser correcta en el próximo ensayo. No podemos negar que algunos de estos argumentos nos parecen fortísimos; tanto que estaríamos dispuestos a decir que "la piedra tiene necesariamente que caer." Esa **necesidad** que aparece en la última oración, fue la que Hume negó que existiera (por lo menos una *necesidad lógica*).

Otra característica de estos argumentos inductivos es que tienen que ver con eventos o procesos que ocurren en el espacio, o en el espacio y en el tiempo. Por lo tanto, con muchísima frecuencia involucran los conceptos de *causa* y *efecto*, que son conceptos absolutamente claves en cualquier consideración del comportamiento de cuerpos en el espacio y en el tiempo; o sea, en las ciencias naturales.

Sin embargo, la mayoría de las inferencias inductivas con que lidiamos en las ciencias naturales y en la vida cotidiana son causales, o probabilísticas, pero dependientes del tiempo, como son las leyes fundamentales de la mecánica cuántica. Los dos ejemplos de argumentos inductivos que presenté arriba, uno cuya conclusión es que todos los seres humanos individualmente moriremos, y el otro que cuando soltemos la próxima piedra, esta caerá al suelo, son ejemplos de argumentos causales espacio–temporales.

El "agudísimo" (así lo consideraba Kant) filósofo inglés David Hume, presentó argumentos poderosos y sencillos demostrando que las **inferencias inductivas** –¡ninguna inferencia inductiva!– NO se pueden justificar:

Por medio de <u>argumentos</u> <u>deductivos</u> sólo se pueden establecer conclusiones cuyo contenido ya está contenido en las premisas, y eso es precisamente lo que NO ocurre en argumentos inductivos. Se tendría que demostrar que para ciertos argumentos (los inductivos) la conclusión es necesariamente afirmable. Pero como ya dijimos, para estos, la conclusión siempre puede ser falsa, por lo tanto no legítimamente afirmable en ese caso.

Tampoco se puede justificar la inferencia inductiva por medio de argumentos inductivos, dijo Hume, pues esto sería utilizar como si fuera "válido" –correcto, apropiado– el tipo de argumento que precisamente se está tratando de legitimar.

Ahora, una justificación adecuada se debe poder dar siempre en forma de un argumento. No conocemos otros tipos de argumentos que los deductivos y los inductivos (ampliativos). Por lo tanto, ¡no podemos dar justificación adecuada a ningún argumento inductivo!

Según los argumentos de Hume, que acabamos de presentar, el hecho de que en el pasado algo haya sucedido no implica nada sobre el futuro. El hecho de que usted haya caminado, haya hablado, haya pensado, ayer y hoy no le da la más mínima justificación en asegurar que dentro de diez minutos usted va a poder caminar, hablar, pensar. Y que hacemos este tipo de inferencia no hay duda; y que sentimos que son justificadas, tampoco la hay. ¡Pero no se han justificado en ninguna forma, y parecen injustificables!

El argumento de Hume es, tal vez, el golpe más duro que ha recibido el método científico y la ciencia, pues hace manifiesto el hecho de que si la ciencia utiliza argumentos inductivos en la justificación de sus teorías y leyes, no tenemos derecho de llamar a la ciencia conocimiento, en el sentido de creencias justificadas. ¡Desde el punto de vista de una justificación rigurosamente adecuada, la ciencia parece estar en el mismo grupo de creencias que la astrología y otras pseudo–ciencias!

Muchos filósofos han tratado de encontrar alguna justificación racional a la inferencia inductiva, que efectuamos todos los días con extrema confianza de su validez. Pero en mi opinión y la de otros muchos, ninguno ha podido. Otros filósofos han sugerido que la inferencia inductiva no necesita justificación de ninguna clase: ¡que usar inducción es parte de ser racional! Tampoco han convencido, puesto que para inferencias deductivas sí se puede dar una justificación racional. Se puede demostrar que en una inferencia deductiva la verdad siempre se transmite de premisas a conclusión. Es decir, que si las premisas de un argumento deductivo fueran verdaderas (séanlo o no en la realidad), la conclusión tendría que ser verdadera también. En argumentos inductivos nada por el estilo se ha podido demostrar. Por otro lado, el filósofo Karl Popper ha mantenido que en la ciencia no se necesita inducción. El afirma, como muchos otros, que en el paso de observaciones a ley empírica (o a cualquier ley) no se hace ninguna inferencia inductiva que tenga que ser justificada por la lógica inductiva. Lo que realmente se hace es presentar conjeturas que más tarde ponemos a prueba tratando de refutarlas. Y él afirma que en ninguna otra etapa del método científico hay necesidad de usar inducción. Volveremos a este punto en la última etapa, pues allí veremos que es bastante aparente que sí se necesita la inducción en la etapa de confirmación, y por lo tanto en la justificación de cualquier ley.

Antes de considerar una paradoja inductiva ideada por Nelson Goodman en el siglo XX, y que tiene mucho en común con las inquietudes que presentó David Hume en cuanto a la causalidad y la inducción, me gustaría mencionar un tipo de confusión conceptual que fue común entre algunos filósofos anteriores a Frege, y que se sigue presentando ocasionalmente todavía. Es un tipo de confusión tan serio como el que está atacando Hume. Lo que está diciendo Hume, a mi entender, es: nunca confunda una relación de *Causa y Efecto* con una relación puramente *Lógica*; las relaciones puramente lógicas son necesariamente ciertas o necesariamente falsas. Las relaciones de causa y efecto son claramente contingentes; si se habla de una *necesidad* en estas relaciones causales, es una necesidad completamente ajena a la necesidad lógica. La confusión de que voy a hablar es también muy seria.

Una de las más importantes enseñanzas del genio de la lógica, Gottlob Frege, es que uno nunca debe confundir problemas psicológicos con problemas lógicos. A. W. Moore en su artículo *Philosophy of Logic* principia diciendo: "la lógica concierne el razonamiento." Esta es una oración importantemente ambigua, pues uno legítimamente se puede preguntar: ¿estará hablando Moore de ciertos procesos de nuestra mente, es decir, de procesos psicológicos? Muy pronto uno se da cuenta que está hablando de algo completamente diferente, porque el tiene muy claro lo que es la lógica. La lógica es fundamentalmente diferente a la psicología. La lógica tiene que ver con ciertas relaciones entre *proposiciones*. Una proposición es *el contenido*, *el mensaje* que lleva una oración **verdadera** o **falsa**. La lógica trata primordialmente de analizar **argumentos**. (Un **argumento** [excusen que repita esto] consiste de unas proposiciones que llamamos **premisas** y una proposición que llamamos **conclusión**.) El análisis de argumentos consiste en ver si ciertas relaciones de verdad y falsedad se cumplen entre las premisas y la conclusión. Si los argumentos pretenden ser (son presentados como) **deductivos**, las relaciones de que hablamos nos permiten declararlos o **válidos** o **inválidos**. Si pretenden ser argumentos **inductivos** (ampliativos) –todo argumento inductivo es inválido si se analiza como deductivo– pueden ser *compelentes* (como los llama Moore), *buenos*, *fuertes*; o pueden ser *débiles*, *malos*. Observe el lector que en toda esta descripción de la lógica no se ha dicho nada de los procesos psicológicos que un individuo ejecuta cuando mentalmente pasa de las premisas a la conclusión, o cuando analiza un argumento.

El problema de la justificación de la inferencia inductiva para argumentos inductivos fuertes –el problema de Hume, que acabamos de estudiar– es encontrar razones poderosas del ¿por qué tenemos derecho a llevar a cabo dichas inferencias? No tiene nada que ver con el hecho psicológico de que nosotros hagamos ese tipo de inferencia. El que nosotros las hagamos, según Hume, se debe a nuestras costumbres, a nuestros hábitos. Esta es una explicación psicológica; esta no pretende ser una justificación de la inducción para Hume. La justificación, si existe, es parte de la lógica, no de la psicología, como pretenden algunos filósofos.[2]

B. La paradoja de Goodman

El concepto cualitativo de confirmación se ha estudiado intensa-

[2]Cuando el autor dio una conferencia sobre una edición anterior a este artículo en la Universidad de Los Andes en 1987, el Prof. Carlos B. Gutierrez lo criticó fuertemente por no haber incluido algunos comentarios adicionales de Hume, en los que Hume afirmaba que, aun dado que en nuestras disquisiciones filosóficas no podíamos justificar la inducción, en nuestro diario proceder seguiríamos haciendo inferencias inductivas. Aunque me di cuenta que aquí había una confusión, sólo después de la conferencia me di clara cuenta en que consistía la confusión del Prof. Gutierrez: no era otra cosa que la que deploraba Frege: ¡Confundir psicología con lógica! [Ver especialmente la introducción de Frege a *Foundations of Arithmetic*.]

mente por filósofos como Carl Hempel y Nelson Goodman. Goodman ha descubierto una nueva paradoja de inducción que le hace competencia a la de Hume en profundidad e importancia. Una de las muchas consecuencias de esta paradoja es que muestra claramente que *el que una situación involucre cambio depende de nuestro sistema descriptivo.* Voy a describirla muy brevemente:

Cualquier persona consideraría como fuerte el siguiente argumento inductivo.

Evidencia: *Todas las esmeraldas hasta hoy observadas han sido verdes.*

Hipótesis: *La próxima esmeralda que observemos será verde.*

En la descripción de la paradoja de Goodman se definen los siguientes colores: Un objeto X es verul si es verde antes de enero 1, 2050, y azul después. (Obviamente, la fecha particular no importa). Un objeto X es azurde si es azul antes de enero 1, 2050, y verde después.

Es *intuitivamente* obvio que el siguiente argumento inductivo es débil.

Evidencia: *Todas las esmeraldas hasta hoy observadas han sido verul.*

Hipótesis: *La próxima esmeralda que observemos será verul.*

Por el momento, vemos que la "*validez*" o "fuerza inductiva" de un argumento inductivo depende de la característica que se está proyectando del pasado al futuro (o más generalmente, de situaciones conocidas a situaciones desconocidas). El lector seguramente diría que las características que se están definiendo dependen de una fecha particular y que por lo tanto son incomparables con las que normalmente usamos. Sin embargo, si una persona hablara un lenguaje en el cual no existieran los conceptos verde y azul, sino más bien verul y azurde, él podría definir verde como: Un objeto X es verde si es verul antes de enero 1, 2050, y azurde después; y un objeto X es azul si es azurde antes de enero 1, 2050, y verul después. Como vemos, las definiciones son recíprocamente iguales en cuanto a forma en los dos idiomas, por lo tanto no se puede argüir que los colores del individuo dependen para su definición del tiempo mientras que los nuestros no, puesto que ese hecho depende del idioma en que se describan.

¿Cuáles son los puntos fundamentales que está presentando Goodman? Que ciertas regularidades son proyectables (o inductibles) mientras que otras no; que las palabras que usamos todos los días en nuestras lenguas naturales ya tienen esa característica de proyectabilidad que ni siquiera cuestionamos; que antes de poder establecer un sistema de lógica inductiva tenemos que entender claramente esta característica inductiva supremamente básica.

C. Popper y Otros

Con respecto al problema de Hume quiero hacer dos comentarios adicionales a los que hice anteriormente. Uno, sobre el intento de Karl Popper de evitar el problema; y el otro, sobre el optimismo que han expresado algunos filósofos relativo a la posible solución de este problema.

Podemos principiar con Popper, quien no cree que en la ciencia haya necesidad de hacer inferencias inductivas. El ve la situación que presentamos arriba de una hipótesis **H** que implica la observación **O** de una manera lógicamente muy sencilla: Si NO observamos **O**, entonces simplemente **H** es falsa. Pero si observamos **O**, sólo podemos decir que **H** no ha sido falsificada. No hay manera, para Popper, de concluir que **H** sea cierta o probable. El usa una palabra técnica para clasificar teorías o leyes que no han sido falsificadas; las llama corroboradas. Según Popper, en la ciencia nunca se necesita inducción: en la etapa de descubrimiento lo que se hace siempre son conjeturas –nunca inducciones–. Y en la etapa de comprobación lo único que se hace es falsificar teorías. Las teorías sólo son corroboradas o falsificadas; no hay más posibilidades.

La razón por la cual me parece evidente que Popper no ha evitado la inducción en su interpretación de la fase de confirmación, es que sin la inducción no se puede justificar el uso de una teoría que no ha sido falsificada. ¿Qué justificación podría dar un físico popperiano en preferir usar una ley que no ha sido falsificada hasta ahora en vez de múltiples hipótesis que jamás han sido probadas, excepto el hecho de que al no haber sido falsificada hasta el momento la ley debe tener mayor probabilidad que las otras de no ser falsificada? Si no creyera tener la más mínima justificación en preferir la ley corroborada a las otras, sería gratuito escogerla en vez de cualquier otra. En su preferencia de la ley corroborada él revela su confianza en la inducción; pues la inferencia, que si la ley ha tenido la citada característica en el pasado, entonces tiene mayor probabilidad que las hipótesis nunca probadas de tenerla en el futuro es una inferencia inductiva pura y simple. Por lo tanto, la inferencia inductiva es también utilizada en la concepción popperiana del método científico. Más aun, la inferencia inductiva es siempre utilizada en la ciencia en el proceso de establecer una ley o una teoría; y el hecho indudable que no la entendemos bien es la más grande debilidad del método científico.

Como sugerí arriba, existe un grupo muy importante de filósofos, que tiene alguna esperanza en que el problema de Hume se pueda aclarar, y un grupo más grande aun, del cual Rudolf Carnap es el filósofo más sobresaliente, con mucho optimismo de poder aclarar el concepto de confirmación. Otros filósofos trabajando en estos problemas son, Hilary Putnam, Wesley Salmon, Richard Jeffrey, Brian Skyrms, John G. Kemeny (matemático) y muchos más.

¿Cómo justifican algunos de estos filósofos su optimismo de que se va a poder hacer algo con el problema de Hume, que para otros es un problema totalmente insoluble? Digamos que, por analogía con otras situaciones similares: Salmon, por ejemplo, cita el caso del cálculo infinitesimal que se creó en el siglo XVII –lleno de problemas en cuanto a sus bases lógicas– y que sólo hasta en el siglo XIX Cauchy, Dedekin y Weierstrass pudieron establecer esas bases fundamentales; y más tarde, en el siglo XX, Abraham Robinson, con su invención de las matemáticas no–estándar, ha logrado darle otras bases al cálculo infinitesimal. Putnam, por otro lado, toma el caso de la lógica deductiva, y recalca lo poco que se había hecho en este campo hasta el siglo pasado cuando George Boole la principió a matematizar; y luego Frege y Schröder continuaron el trabajo de Boole añadiendo relaciones y cuantificadores; y más tarde Behmann, Lowenheim y Russell desarrollaron otros aspectos; hasta que ya en la madurez de este campo Gödel logró sus importantísimos resultados que marcan una época. ¿Si fueron necesarios muchos siglos –más de veinte en el caso de la lógica deductiva– para desarrollar con precisión y claridad disciplinas como la lógica deductiva y el cálculo infinitesimal, porqué no la lógica inductiva?

D. Probabilidad y confirmación

Para abordar el problema de construir una definición explicativa y precisa de lo que es el contexto de confirmación ha sido necesario tratar de aclarar el concepto de probabilidad, íntimamente ligado al concepto de confirmación. La noción de probabilidad es tal vez la más ambigua de cuantas se usan con supuesta precisión en las ciencias y en la vida común, y un concepto que ha sido estudiado intensamente en el siglo XX desde 1920 más o menos. El concepto tiene usos formales –es decir que satisfacen los axiomas del cálculo de la probabilidad- y usos informales. En la física y en la metodología de ésta estamos primordialmente interesados en los usos formales del concepto. Henry Kyburg, en *Probability and Inductive Logic*, distingue cinco diferentes *grupos* de interpretaciones del concepto formal de probabilidad. Como no hay espacio para tratar éstas en detalle, me limito a considerar muy superficialmente tres conceptos de probabilidad, dos de los cuales Carnap mantiene que son los fundamentales de uso en la ciencia, y el otro es útil como introducción al problema. Este último es el concepto clásico, la base de la primera teoría de probabilidad fundada por los matemátios Pierre Fermat, Jacob Bernoulli, y más tarde Pierre Simon de LaPlace. Ellos propusieron la definición siguiente: *la probabilidad es el co-*

ciente del número de casos favorables al número de casos posibles. Por ejemplo, si en el caso de un dado simétrico y homogéneo nos preguntamos por la probabilidad de echar un 2 o un 3 –estos son los casos favorables– contestamos que es 1/3, pues los casos posibles son 6, y los favorables son dos. Pero para utilizar esta definición, se estipuló que los casos posibles fueran equiposibles, que en últimas resulta equivalente a estipular que sean equiprobables. O sea que tenemos una definición en la cual existe un círculo vicioso. (Estoy simplificando el argumento, que fue largo y complicado).

Habiendo demostrado, por ahí en 1920, que las bases de la teoría de probabilidad clásica estaban viciadas, Richard von Mises y Hans Reichenbach propusieron lo que se ha llamado la concepción estadística. En ésta, probabilidad *es una medida de frecuencia relativa.* Por ejemplo, la probabilidad de echar un seis con cierto dado —que supongamos no es simétrico ni homogéneo y que por lo tanto haría muy difícil especificar sus casos equiposibles– es el número de veces que sale un seis dividido por el número de veces que se echa el dado. Más estrictamente, es el límite de ese cociente en una serie sin fin. Este concepto estadístico es la base del concepto empírico; la base detrás de proposiciones como: Un muchacho sano de 20 años en Colombia tiene una probabilidad P de vivir hasta los 80.

Para Reichenbach, von Mises, y muchos otros, el concepto de probabilidad estadística es el único que se necesita, aún para hablar de la probabilidad de una hipótesis en la física. Pero para otro grupo de pensadores, principiando con John Maynard Keynes y Harold Jeffreys, la probabilidad es una relación lógica entre proposiciones (que ya describiremos en más detalle). Para ellos, la concepción estadística está toda errada. Carnap ha tomado la posición, y con él muchos otros, que ambos conceptos de probabilidad, el estadístico (que es empírico) y el lógico (que no lo es), son necesarios en la ciencia en diferentes tipos de situación.

El concepto que más nos interesa en el estudio de la confirmación es el de probabilidad lógica, que es similar al de implicación lógica en lógica deductiva, y completamente diferente al de probabilidad estadística que acabamos de mencionar. El que Sócrates sea un hombre, y todos los hombres mortales, implica lógicamente que Sócrates es mortal. Las premisas en este argumento tienen una cierta relación con la conclusión. Si las premisas son ciertas, entonces necesariamente la conclusión es cierta. Esa es la relación de implicación lógica, deductiva. Y la razón por la cual en esta relación de implicación existe una conexión necesaria entre las premisas y la conclusión es que lo que dice la conclusión ya está contenido implícitamente en las premisas. Suponer la conclusión falsa cuando las premisas son verídicas, es suponer una contradicción lógica.

Pasemos ahora a la relación de probabilidad lógica de Keynes y Jeffreys, que nos interesa aclarar. Recordemos primero que la característica fundamental de un argumento inductivo es que la conclusión contiene información que no está contenida, ni siquiera implícitamente, en las premisas: el argumento es ampliativo, la conclusión contiene información extra. Pero el contenido de la conclusión, lo que dice ésta, en un argumento inductivo fuerte, está indudablemente relacionado con el contenido de las premisas. Carnap lo considera una implicación parcial. Tomemos dos ejemplos (inspirados por Skyrms) de argumentos inductivos fuertes, y notemos en ellos algunas de las características de que hablo, y otras adicionales. El primero es el siguiente:

Premisas o evidencia:

1. *Otro sistema planetario (lo llamamos α) en nuestra galaxia tiene nueve planetas a los que llamamos α–Mercurio, α–Venus, α–Tierra, etc.*

2. *Se han investigado todos los planetas, menos α–Marte, y se encontró vida inteligente en cada uno de ellos.*

Conclusión o hipótesis: *Hay vida inteligente en α–Marte.*

Como se puede ver, en las premisas nada se dijo sobre vida en α–Marte, pero la conclusión afirma que hay vida en α–Marte. El argumento es ampliativo y por lo tanto inductivo. El lector juzgará si es el tipo de argumento en que apostaría algo a que la conclusión sería verdadera si las premisas fueran verdaderas. Las premisas son inventadas, así que en toda probabilidad son falsas. Sin embargo, desde el punto de vista de la lógica, ya sea deductiva o inductiva, lo que nos interesa es la relación que existe entre premisas y conclusión; no las premisas, y no la conclusión independientemente. Según Carnap y su grupo, y esto es muy importante, la relación que existe entre evidencia e hipótesis en cualquier inferencia inductiva, como lo es ésta, es una relación lógica, ¡no empírica!

Esta relación lógica entre premisas y conclusión se debe a su estructura y a su significado y debe poderse encontrar analizando esa estructura y ese significado, no investigando alguna relación externa. Las premisas, que como hemos sugerido, en este contexto inductivo se llaman la evidencia, confieren una cierta probabilidad (inductiva) a la conclusión, que en el mismo contexto se llama la hipótesis. El valor numérico de esa probabilidad inductiva es lo que Carnap llama grado de confirmación. En otras palabras, el grado de confirmación para Carnap es la probabilidad inductiva definida con suficiente precisión para poderle dar valores numéricos, pues lo que quiso hacer Rudolf Carnap, y en lo que tuvo bastante éxito, fue empezar a definir un concepto *cuantitativo* de confirmación.

Debo aclarar que por el momento no se ha logrado definir probabilidad inductiva con suficiente precisión para darle valores numéricos, excepto en situaciones muy simples utilizando lenguajes artificiales.

Otro ejemplo de un argumento inductivo:

Evidencia:

1. *Jorge es hombre, tiene 100 años, y tiene artritis.*

2. *Jorge va a competir mañana en una carrera de atletismo corriendo una milla.*

Hipótesis: *Jorge no va a lograr correr la milla en menos de cuatro minutos mañana.*

Este es un argumento inductivo muy fuerte, especialmente si especificamos adicionalmente toda evidencia relevante conocida. Este requisito de añadir toda evidencia relevante conocida a la evidencia estipulada explícitamente en argumentos inductivos es un requisito fundamental según Carnap. Por ejemplo, en el argumento citado habría que añadir que poquísimos seres humanos han podido correr la milla en menos de cuatro minutos.

Muchísimos apostaríamos, quizás uno a cien (o más), a que Jorge no corre la milla en menos de cuatro minutos en circunstancias normales. Este hecho, el que seríamos capaces de apostar en desigualdad -pequeña o grande- que la conclusión de un argumento inductivo es verídica dado que las premisas son verídicas, lo ha utilizado Carnap brillantemente para mostrar un método de asignar grados de confirmación a argumentos inductivos. Normalmente, cuando un individuo apuesta que algo (digamos H) va a ocurrir basado en los conocimientos o evidencia E que posee, él refleja su confianza en H en el tipo de apuesta que está dispuesto a contratar; en el riesgo que está dispuesto a tomar. Lo que hace Carnap es que idealiza la apuesta a la de un individuo completamente racional; y esa apuesta, que se le llama apuesta justa en la literatura, es la que define el grado de confirmación o de probabilidad inductiva. En los ejemplos de argumentos inductivos que dimos, podríamos sustituir una hipótesis científica H por la conclusión del argumento, y la evidencia observacional E por las premisas, y tendríamos el caso de la confirmación de una teoría científica basados en la evidencia que tenemos sobre ella.

Termino este simple esquema de la etapa de comprobación, que aunque muy condensado, espero haya dado alguna idea de lo que es el problema de la confirmación, con unas palabras de Hilary Putnam sobre el esfuerzo de Carnap:

El trabajo de Carnap tiene hoy el tipo de importancia para todo el campo de la lógica inductiva que tuvo el trabajo de Frege para la lógica deductiva en los primeros años de este siglo: obviamente no es satisfactorio como se encuentra, pero no hay una alternativa *real de confrontar el problema. O las dificultades con el método de Carnap se superan, o todo el proyecto tiene que abandonarse.*

Bibliografía

En esta bibliografía menciono algunos textos y artículos que fueron útiles para mí y que pueden serlo para el lector.

1. Albert, David L., *Quantum Mechanics and Experience* (Harvard University Press, Harvard, 1992).

2. Bohm, david, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables*, I and II, in John A. Wheeler and Wojciech H. Zurek, *Quantum Theory and Measurement* (Princeton University Press, Princeton, 1983).

3. Bohm, David, *Quantum Theory* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1951, 1958).

4. Braithwaite, R. B., *Scientific Explanation* (Harper Torchbooks, 1953, 1960).

5. Brody, Boruch A. Ed., *Science: Men, Methods, Goals. (a Reader)* (Benjamin, New York, 1968).

6. Campbell, Norman R., *Foundations of Science* (Dover, New York, 1920, 1957).

7. Carnap, Rudolf, *Foundations of Logic and Mathematics, International Encyclopedia of Unified Science* (University of Chicago Press, Chicago, 1939).

8. Carnap, Rudolf, *Logical Foundations of Probability* (University of Chicago Press, Chicago, 1950, 1962).

9. Carnap, Rudolf, *Meaning and Necessity* (University of Chicago Press, Chicago, 1956, 1964).

10. Carnap, Rudolf, *Philosophical Foundations of Physics* (Basic Books, New York, 1966).

11. Foster, M. H. & Martin M. L., *Probability, Confirmation and Simplicity: Readings in the Philosophy of Inductive Logic* (Odissey Press, New York, 1966).

12. Frege, Gottlob, *Foundations of Arithmetic* (North Western University Press, Evanston, Ill., 1968).

13. Frege, Gottlob, *Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Ed. by Peter Geach and Max Black (Blackwell, Oxford, 1960–66).

14. Goodman, Nelson, *Fact, Fiction, and Forecast* (Bobbs–Merrill, Indianapolis, 1965).

15. Guerlac, Henry, *Newton and the Method of Analysis, Dictionary of the History of Ideas, Vol. 3.* (Scribner's Sons, New York, 1973).

16. Hanson, N. R., *Patterns of Discovery* (Cambridge University Press, Cambridge, 1965).

17. Hanson, N. R., *Observation and Explanation* (Harper Torchbooks, New York, 1971).

18. Hanson, N. R. *The Copenhagen Interpretation of Quantum Theory*, in Stephen Toulmin (editor) *Physical Reality* (Harper and Row, New York, 1970).[3]

19. Harré, R., *The Philosophies of Science* (Oxford University Press, London, 1972).

20. Hempel, Carl C., *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science, International Encyclopedia of Unified Science* (University of Chicago Press, Chicago, 1952).

[3]En este libro se encuentra una crítica muy aguda de David Bohm a Physics & Philosophy de W. Heisenberg.

21. Hempel, Carl C., *Aspects of Scientific Explanation* (Free Press, New York, 1965).

22. Hempel, Carl C., *Philosophy of Natural Science* (Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1966).

23. Hempel, Carl C., *Confirmation: Qualitative Aspects, The Encyclopedia of Philosophy*, Paul Edwards, Ed. Vol. 2 (MacMillan & Free Press, New York, 1967).

24. Hesse, Mary B., *Forces and Fields* (Littlefield, Adams, Totowa, N. J., 1965).

25. Hesse, Mary B., *Models and Analogies in Science* (University of Notre Dame Press, 1966).

26. Hesse, Mary B., *Models and Analogy in Science, The Encyclopedia of Philosophy*, Paul Edwards, Ed. Vol. 5, (MacMillan & Free Press, New York, 1967).

27. Hesse, Mary B., *The Structure of Scientific Inference* (University of California Press, Berkeley, 1974).

28. Honderich, Ted, (editor) *The Oxford Companion to Philosophy* (Oxford University Press, Oxford, 1995).[4]

29. Hume, David, *An Inquiry Concerning Human Understanding*, 1748 (Bobbs–Merrill Co., Indianapolis, 1955).

30. Kaplan, Abraham, *The Conduct of Inquiry* (Chandler, Scranton, PA, 1964).

31. Kemeny, John G., *Carnap's Theory of Probability and Induction, The Philosophy of Rudolf Carnap, The Library of Living Philosophers, Vol. XI*, Ed. by P. A. Schilpp (Open Court, La Salle, Illinois, 1963).

[4]Excelentes definiciones de términos filósoficos con artículos firmados por filósofos de primera categoría.

32. Kuhn, Thomas S., *The Structure of Scientific Revolutions, International Encyclopedia of Unified Science*, Vol. 2, No. 2 (University of Chicago Press, Chicago, 1962, 1970).

33. Kyburg, Henry E., Jr., *Probability and Inductive Logic* (MacMillan, London, 1970).

34. Lakatos, Imre, Ed., *Criticism and the Growth of Knowledge* (Cambridge University Press, 1970).

35. Lloyd, G. E. R., *Analogy in Early Greek Though, Dictionary of the History of Ideas*, Vol. 1 (Scribner's Sons, New York, 1968, 1973).

36. Lowe, E. J., *Existence*, in Honderich, Ted, *op. cit.*

37. Madden, Edward E., *Theories of Scientific Method: The Renaissance through the Nineteenth Century* (University of Washington Press, Seattle, 1960).

38. Maurer, Armand, *Analogy in Patristic and Medieval Thought, Dictionary of the History of Ideas*, Vol. 1 (Scribner's Sons, New York, 1968, 1973).

39. Moore, A. W., *Philosophy of Logic*, in Nicholas Bunnin and E. P. Tsui-James, *The Blackwell Companion to Philosophy* (Blackwell, Oxford, 1996).

40. Nagel, Ernest, *The Structure of Science* (Harcourt, Brace and World, New York, 1961).

41. Poincaré, Henri, *Science and Hypothesis* (Dover, New York, 1905, 1952).

42. Popper, Karl R., *The Logic of Scientific Discovery* (Harper Torchbooks, New York, 1959, 1965).

43. Popper, Karl, *Objective Knowledge* (Oxford University Press, Oxford, 1972).

44. Popper, Karl, *Quantum Physics and the Schism in Physics* (Rowan and Littlefield, 1982).

45. Putnam, Hilary, *Probability and Confirmation, Philosophy of Science Today*, Ed. by Morgenbesser, Sidney (Basic Books, New York, 1967).

46. Reichenbach, Hans, *The Philosophy of Space and Time* (Dover, New York, 1957).

47. Reichenbach, Hans, *The Direction of Time* (University of California Press, Berkeley, 1971).

48. Rudner, Richard S., *Nelson Goodman, The Encyclopedia of Philosophy*, Paul Edwards, Ed. Vol. 3 (MacMillan & Free Press, New York, 1967).

49. Russell, Bertrand, *Introduction to Mathematical Philosophy* (Allen and Unwin, London, 1919.

50. Salmon, Wesley C., *Logic* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973, 1963).

51. Salmon, Wesley C., *The Foundations of Scientific Inference* (University of Pittsburgh Press, 1966).

52. Scheffler, Israel, *The Anatomy of Inquiry* (Knopf, New York, 1963).

53. Schick, Frederic, *Confirmation: Quantitative Aspects. The Encyclopedia of Philosophy*, Paul Edwards, Ed. Vol. 2 (MacMillan & Free Press, New York, 1967).

54. Skyrms, Brian, *Choice and Chance: An Introduction to Inductive Logic*, 2nd Edition (Dickenson, Enciso, California, 1975).

55. Wilder, Raymond L., *Introduction to the Foundations of Mathematics* (Wiley, New York, 1952, 1965).