

**NUEVAS SOLUCIONES CERRADAS,
EN COORDENADAS ESFERICAS,
DE LA ECUACION DE ONDAS HOMOGENEA
EN TRES DIMENSIONES**

Héctor A. Múnera

*Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia*

Abstract

The solution of the homogeneous wave equation is revisited, under two criteria: (a) No mathematical solutions are discarded a priori, and (b) The solution by separation of variables is done without decoupling time and distance. Three groups of nonconventional components are identified: (1) Two non-dispersive terms in Cartesian coordinates, (2) New directional solutions in spherical coordinates, and (3) New time-distance solutions in spherical coordinates which amount to closed three-dimensional travelling waves.

Resumen

La ecuación homogénea de ondas ha sido resuelta por el método de separación de variables, con los siguientes criterios: (a) No despreciar a priori soluciones con el argumento usual de que no tienen significado físico, y (b) Buscar separaciones en que tiempo y distancia no estén desacoplados de entrada. Se citan tres resultados generales: (1) existen dos soluciones particulares no armónicas asociadas con soluciones estáticas en tiempo y espacio; (2) en coordenadas esféricas, existen sobre la superficie de conos discretos, nuevas soluciones direccionales no armónicas, y (3) también en coordenadas esféricas, existen nuevas soluciones que dependen de la

variable $g = ct/r$. Estas últimas constituyen la primera solución cerrada y explícita conocida de la ecuación de ondas viajeras en tres dimensiones.

1. Introducción

La ecuación de ondas homogénea está dada por la ec. (1)

$$\square \Psi(\mathbf{r}, u) = \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) \Psi(\mathbf{r}, u) = 0, \quad (1)$$

donde el operador D'Alembertiano \square está definido implícitamente, las variables espaciales están genéricamente representadas por $\mathbf{r} = (x, y, z) = (r, \theta, \varphi)$, y el tiempo es la variable geométrica $u = ct$. Un procedimiento típico usado para la solución de la ecuación de ondas homogénea es separación de variables de Fourier [1, 2]. Por ejemplo, desacoplando tiempo y espacio

$$\Psi(\mathbf{r}, u) = U(\mathbf{r}) T(u), \quad (2)$$

se obtienen soluciones para distintos k_i , que genéricamente llevan a una solución en término de dos series armónicas más una parte no-armónica [1, ecs. (23)–(20)]

$$\Psi(\mathbf{r}, u) = \sum_{i=1}^{\infty} [U_i(\mathbf{r}) (a_i \cos(k_i u) + b_i \sin(k_i u)) + C_0(\mathbf{r}) + C_1(\mathbf{r}) u]. \quad (3)$$

Para un problema dado, las condiciones iniciales y de contorno determinan los posibles valores de las constantes a_i, b_i, k_i , y de las funciones C_0, C_1 .

Otro procedimiento utilizado para resolver la ecuación de ondas homogénea es el de ondas viajeras de D'Alembert [3]. Para el caso de ondas unidimensionales que se propagan en x existen soluciones cerradas en términos de las variables canónicas

$$\xi_{\pm} = x \pm u. \quad (4)$$

Para ondas tridimensionales no existen soluciones cerradas y debe recurrirse a soluciones numéricas basadas en la propagación del promedio de la onda [3, lección 24]. Observemos que la separación de variables lleva a soluciones en las cuales el tiempo y el espacio están desacoplados, mientras que en las ondas viajeras distancia y tiempo están intimamente ligados en las nuevas variables ξ_{\pm} .

Hace algunos años¹ el autor revisó en detalle la solución de la ecuación de ondas homogénea por el método de separación de variables, con los siguientes criterios [4, 5]:

- a. No despreciar a priori soluciones con el argumento usual de que *no tienen significado físico*, y
- b. Buscar separaciones en que tiempo u y distancia r no estén desacoplados de entrada.

Se citan tres resultados generales:

1. existen dos soluciones particulares no-armónicas asociadas con soluciones estáticas en tiempo y espacio;
2. en coordenadas esféricas (r, θ, φ, u) , existen sobre la superficie de conos discretos, nuevas soluciones direccionales no armónicas, y
3. también en (r, θ, φ, u) , existen nuevas soluciones que dependen de la variable $g = u/r$ [4, 5].

Estas últimas constituyen la *primera solución cerrada y explícita* conocida (hasta donde sabemos) para la propagación de ondas viajeras en tres dimensiones, donde $\xi_{\pm} = r(1 \pm g)$. Consideraremos ahora brevemente cada uno de estos resultados.

¹Esta es una memoria divulgativa basada en trabajo original del autor. Sin embargo, contiene material no publicado previamente. Por ejemplo, el primer Apéndice en lo referente a $m < 0$, las Tablas 1 y 3, y las Figuras 1 a 4 y su correspondiente interpretación.

2. Soluciones particulares no armónicas

Cualquier ecuación diferencial de segundo grado en el tiempo tiene como solución particular Ψ_{0r} que es una función espacial $U_0(\mathbf{r})$, que se propaga linealmente en el tiempo:

$$\Psi_{0r}(\mathbf{r}, u) = (a_0 + a_1 u) U_0(\mathbf{r}), \quad (5)$$

donde $U_0(\mathbf{r})$ es solución de la ecuación estática

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 0. \quad (6)$$

La validez de esta afirmación puede confirmarse por sustitución directa de Ψ_{0r} en la ecuación de ondas homogénea. La última parte de la solución de Sobolev a la ecuación de ondas (ec. 3) es precisamente Ψ_{0r} con $C_0 = a_0 U_0(\mathbf{r})$ y $C_1 = a_1 U_0(\mathbf{r})$.

Igualmente, por simetría, cualquier ecuación diferencial de segundo grado en las variables espaciales tiene como solución particular Ψ_{0u} . Esta es una función temporal $T_0(u)$ que es linealmente proporcional a la posición en el espacio: el lado izquierdo de la ec. (7) se podría interpretar como un torque desde la cuarta dimensión:

$$\Psi_{0u}(\mathbf{r}, u) = (b_0 + b_x x + b_y y + b_z z) T_0(u), \quad (7)$$

donde $T_0(u)$ es solución de la ecuación “estática en espacio”

$$\frac{\partial^2 T(u)}{\partial u^2} = 0. \quad (8)$$

De nuevo, esta afirmación puede confirmarse por sustitución directa de Ψ_{0u} en la ecuación de ondas homogénea en coordenadas cartesianas. Puesto que la solución general de una ecuación diferencial está formada por la superposición de todas sus soluciones particulares, las ecs. (5) y (7) forman parte de la solución general de la ecuación de ondas homogénea.

Observemos que Ψ_{0r} y Ψ_{0u} se usan frecuentemente como aproximaciones a la solución de la ecuación relativista de Klein–Gordon. Por ejemplo, Yukawa utilizó la ec. (6), que es estática, para predecir la masa del pión en el contexto altamente dinámico de la interacción

fuerte [6, 7]. La ec. (5) provee la justificación para este, a primera vista, insólito procedimiento. De igual manera, las oscilaciones de plasma en la propagación de paquetes electromagnéticos de onda en la ionosfera [8] están representados en forma aproximada por una expresión similar a la ec. (8); la ec. (7) provee la justificación correspondiente.

3. Soluciones direccionales no-armónicas

Pasemos ahora a la solución en coordenadas esféricas de la ecuación de ondas homogénea, ec. 1. En lugar de la ec. (2) consideremos la siguiente separación:

$$\Psi(r, \theta, \varphi, u) = D(\theta, \varphi) M(r, u). \quad (9)$$

Sustituyendo la ec. (9) en la ecuación de ondas homogénea, y siguiendo el procedimiento tradicional con la constante de separación λ , obtenemos dos ecuaciones diferenciales parciales [2]:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial D}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} - \lambda D = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \lambda M \right) = \frac{\partial^2 M}{\partial u^2}. \quad (11)$$

En esta sección nos concentraremos en D , la parte direccional, ec. (10); la solución de M (ec. 11) será analizada en la sección siguiente. Observemos que la ecuación diferencial parcial (10) es la misma expresión de la mecánica cuántica para *el caso particular* de una ecuación de Schrödinger con potencial central $V(\mathbf{r}, u) = V(r)$ [9, pag. 83]. Aquí se obtiene sin restricción alguna, lo que significa que el momento angular L^2 es una constante del movimiento, sin *ninguna restricción* desde el punto de vista de la ecuación de ondas homogénea (que es relativista).

La separación de variables usual es $D(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$, que lleva inmediatamente a dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(-\lambda \sin \theta + \frac{\lambda_1}{\sin \theta} \right) \Theta &= 0, \\ \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - \lambda_1 &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

donde λ_1 es la constante de separación entre $\Theta(\theta)$ y $\Phi(\varphi)$. En mecánica cuántica, la restricción convencional es continuidad y acomamiento de $D(\theta, \varphi)$ sobre la superficie de una esfera de radio unitario. Esto implica que:

1. Respecto a la variable θ [2, 9]:

$$\lambda = -\ell(\ell + 1), \quad (13)$$

donde $\ell = 0, 1, 2, \dots$.

2. Respecto a la variable φ , que λ_1 sea igual al cuadrado de un entero [9, pag. 78].

Esta última condición se interpreta como

$$\lambda_1 = -m^2, \quad (14)$$

donde $m = 0, 1, 2, \dots$.

Adicionalmente, en el contexto de la interpretación de m como la proyección de L en el eje z , se requiere que $\ell \geq m$ [2, pag. 337]. Con las dos condiciones anteriores, $D(\theta, \varphi)$ se reduce a los bien conocidos armónicos esféricos $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$.

Comúnmente, la otra familia de soluciones asociada con la ec. (15) no recibe ninguna atención. Aquí nos referiremos a ella. Sea

$$\lambda_1 = m^2 = -\mu^2, \quad (15)$$

o

$$\mu = i m_{\pm} = \pm i \sqrt{\lambda_1}, \quad (16)$$

donde $\lambda_1 \geq 0$. Adicionalmente, no impongamos ninguna restricción sobre el valor de m . La ec. (13) inmediatamente lleva a

$$\Phi(\varphi) = A + B \varphi, \quad (17)$$

para $\lambda_1 = 0$, y

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}(\varphi) &= A' \cosh(m_{\pm} \varphi) + B' \sinh(m_{\pm} \varphi) \\ &= A e^{-m_{\pm} \varphi} + B e^{m_{\pm} \varphi}, \end{aligned} \quad (18)$$

para $\lambda_1 > 0$.

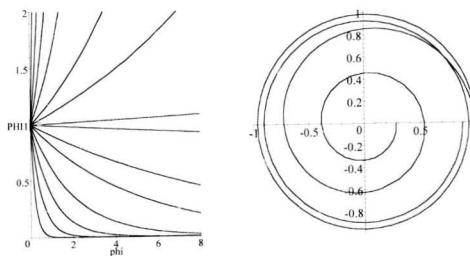


Figura 1. Función $\Phi_m(\varphi) = e^{-m\varphi}$. Sea $L_z\Phi = -\hbar\partial_{\varphi}\Phi = \hbar m\Phi$, donde L_z es la proyección de Φ en el eje z ; observemos que L_z y m son paralelos (antiparalelos) según el signo de m . La variación azimutal de $\Phi_m(\varphi)$ para las dos primeras vueltas ($0 \leq \varphi \leq 4\pi$) se muestra en las dos representaciones: **a.** Diagrama Cartesiano para $m = \pm 0.01, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$. Las curvas continuas representan a m positivo, y las punteadas a m negativo, donde $m = \pm 0.01$ corresponde a las líneas casi horizontales; **b.** Diagrama polar para $m = 0.01$ (línea continua) y $m = 0.1$ (línea punteada). Cuando $m \rightarrow 0$, $\Phi_m(\varphi) = 1$, es decir, la componente $\Phi_m(\varphi)$ no tiene variaciones azimutales. Cuando m crece la curva se approxima a medio pico con anchura de semipico $\Delta\varphi = \ln 2/m$. Un campo magnético externo define el eje x ($\varphi = 0$), y $\Phi(\varphi)$ oscila con una variación $\Delta\varphi$. Esta fluctuación clásica es análoga al *zitterbewegung* cuántico

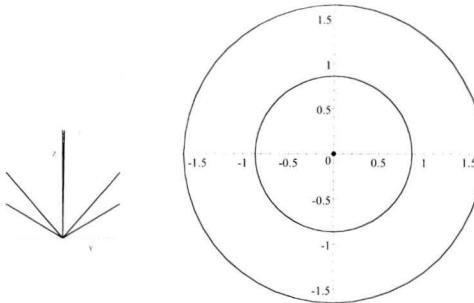


Figura 2. Conos de ángulo θ tal que $P_0^{0.1i}(\theta) = 0.862$, $P_1^{0.1i}(\theta) = 0.655$ (ver Tablas 1 a 3 para $k = 0$, $m = 0.1$, $\ell = 0, 1$). Para $k \neq 0$ y m grande aparecen otros conos claramente discernibles, tanto hacia adelante ($\theta < \pi/2$), como hacia atrás ($\theta > \pi/2$), pero cuando $m \rightarrow 0$, los conos se acumulan sobre el eje z ($\theta = 0$ y $\theta = \pi$), ver Tablas 2 y 3. La función de onda es $\Psi_{\ell=0}(r, \theta, \varphi, u) = 0.86\Phi_{0.1}(\varphi)M_{\ell=0}(r, u)$ y $\Psi_{\ell=1}(r, \theta, \varphi, u) = 0.65\Phi_{0.1}(\varphi)M_{\ell=1}(r, u)$. En el límite $m \rightarrow 0$, $\Psi_{\ell=0}(r, \theta, \varphi, u) = M_{\ell=0}(r, u)$ y $\Psi_{\ell=1}(r, \theta, \varphi, u) = 0.76M_{\ell=1}(r, u)$, es decir, Ψ no tiene dependencia angular sobre la superficie de conos con semiángulo $\theta = 58.624^\circ$ y $\theta = 40.594^\circ$ (ver Tablas 2 y 3). **a.** Sección longitudinal en el plano $y - z$. **b.** Sección transversal en el plano perpendicular al eje z en $z = 1$.

En general, las ecs. (17) y (18) no son acotadas; obviamente, cuando φ varía en un intervalo finito (por ejemplo en $[0, 4\pi]$) sí lo son. Más aun, las funciones $\Phi(\varphi)$ y $\Phi'(\varphi)$ son continuas en este intervalo, que es precisamente el requerimiento que subyace la condición 2 [9, pag. 78]. En esta familia de soluciones, el parámetro m toma valores continuos en el intervalo $-\infty < m < \infty$ (lo que es más general que los valores discretos y limitados por ℓ de la mecánica cuántica). Ver Figura 1.

Pasando ahora a las nuevas soluciones de la ec. (12), reemplazando en ella las ecs. (14) y (16), y efectuando la sustitución $z = \cos \theta$ se obtiene una ecuación de Legendre asociada [2, sec. 9.8] que se resuelve en términos de funciones de Legendre asociadas de primera y de segunda clase, $P_\ell^\mu(\cos \theta)$ y $Q_\ell^\mu(\cos \theta)$, respectivamente. Para la definición de estas últimas ver, por ejemplo, [10,

cap. 8]. Las nuevas soluciones dependen del parámetro complejo μ , mientras que la solución tradicional depende del parámetro real m .

Las funciones $P_\ell^\mu(\cos \theta)$ y $Q_\ell^\mu(\cos \theta)$ son típicamente complejas. Soluciones con significado físico se obtienen cuando el ángulo θ es tal que $P_\ell^\mu(\cos \theta)$ o $Q_\ell^\mu(\cos \theta)$ son reales. Es decir, si

$$\operatorname{Im}(P_\ell^\mu(\cos \theta)) = 0,$$

o

$$\operatorname{Im}(Q_\ell^\mu(\cos \theta)) = 0. \quad (19)$$

El procedimiento para obtener los valores de θ donde $P_\ell^\mu(\cos \theta)$ es real se explica en la primera parte del Apéndice. Cada valor de θ así encontrado define un cono (Figura 2.a). Los resultados numéricos se muestran en las Tablas 1 a 3, y se resumen en la Figura 3.

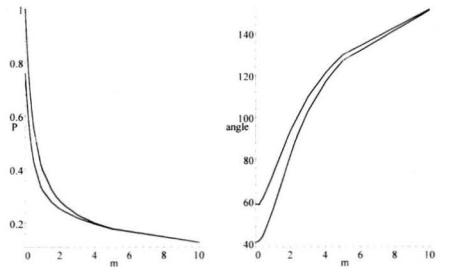


Figura 3. P_ℓ^{im} y $\theta(m\ell)$ sobre la rama principal ($k = 0$). Observemos que la variable continua e independiente es m , mientras que θ es discreto. En la solución convencional la variable continua e independiente es θ , mientras que m es discreto. **a.** Valores de la función $P_\ell^{im}(\theta)$. La curva continua corresponde a $\ell = 0$, la punteada a $\ell = 1$. Para $k \neq 0$, los valores de $P_1^{im}(\theta)$ son prácticamente idénticos a los de $P_0^{im}(\theta)$. Solamente hay diferencias entre los distintos k cuando m crece. **b.** Valores del semiángulo θ sobre la rama principal como función de m . Para un k dado, hay un único $\theta(m, \ell)$. La multiplicidad está asociada con k .

Como un ejemplo, consideremos un cristal donde, en el origen, se emiten pulsos $\Psi(\mathbf{r}, u)$ descritos por las ecs. (9), (18) y (19). En planos perpendiculares al eje z , a una distancia z del origen, tales pulsos generan una señal $\Psi(r, \theta, \varphi, u)$ sobre un círculo de radio $z \tan(\theta)$, tal que $\Psi(r, \theta, \varphi, u) = \Phi_m(\varphi) P_\ell^{im}(\theta) M(z \sec(\theta), u)$ (ver Figura 2.b). Adicionalmente, observemos que la ec. (21), implica que Ψ tiene una componente que es independiente del tiempo.

4. Soluciones acopladas distancia–tiempo

Pasemos ahora al término $M(r, u)$ en la ec. (9), que es solución de la ecuación diferencial parcial (11). La separación convencional es $M(r, u) = R(r)T(u)$, que inmediatamente lleva a [2, cap. 9]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \ell(\ell+1) R &= -k^2 r^2 R, \\ \frac{d^2 T}{du^2} &= -k^2 T, \end{aligned} \quad (20)$$

donde la constante de separación es $-k^2$, tal que $k = \omega/c$ es el número de onda o, lo que es lo mismo, la energía. Para efectos de comparación, observemos que la separación de la ecuación de Schrödinger lleva a [9]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_S}{dr} \right) - \ell(\ell+1) R_S &= -\frac{2\mu(V(r) - E)}{\hbar^2} r^2 R_S, \\ \frac{dT_S}{du} &= -i \frac{E}{\hbar c} T_S. \end{aligned} \quad (21)$$

En lugar de la separación de variables tradicional, consideremos la siguiente

$$M(r, u) = I(r) + G(g) \quad (22)$$

donde $g \equiv u/r$. Sustituyendo en la ec. (11) obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dI}{dr} \right) - \ell(\ell+1) I = \eta, \quad (23)$$

$$(1-g^2) \frac{d^2G}{dg^2} + \ell(\ell+1) G = \eta, \quad (24)$$

donde aparece la nueva constante de separación η (en lugar de la energía en la separación convencional). Observemos que η tiene las mismas dimensiones de las funciones M , I y G . Como es obvio, las soluciones de I y G dependen de los valores de los parámetros individuales ℓ y η , que serán usados como subíndices cuando sea necesario.

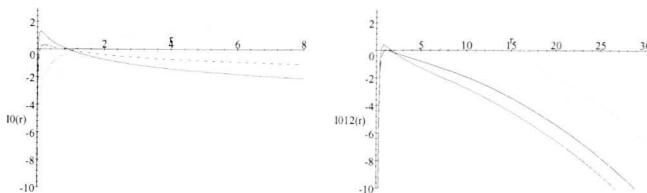


Figura 4. a. Función estática para $\ell = 0$: $I_\eta^0(r) = A + B/r + \eta \ln(r)$, para $A = -0.01$, $B = -0.1$, $\eta = 1.0, -0.5, -1.0$. Curva superior (discontinua): $\eta = 1.0$; curva media (punteada): $\eta = -0.5$; curva inferior (continua): $\eta = -1.0$. **b.** Suma de potenciales para $\ell = 0, 1, 2$: $I_\eta^0(r) + I_\eta^1(r) + I_\eta^2(r)$. Mismos parámetros de a. Observemos la similitud cualitativa al potencial nuclear (ver nota 2).

Observemos que el lado izquierdo en las ecs. (20a), (21a) y (23) es el mismo, mientras que el lado derecho contiene una constante de separación diferente (k , E y η).² La ecuación de Schrödinger (21a)

²El análisis del rango de las fuerzas nucleares se basa en la ec. (21a) cuando $\ell = 0$ [9, 19], por lo que se conjectura que el nuevo potencial permanente $I(r)$ puede estar asociado a tales fuerzas. Así, los términos con coeficiente A en la ec. (25) exhiben algunas características del confinamiento asintótico (ver Figura 4). Este tema está bajo investigación por el autor.

se puede resolver en forma explícita solamente en algunos casos, mientras que nuestra nueva ec. (23) se puede resolver en forma general como

$$I_\eta^\ell(r) = A r^\ell + B r^{-(\ell+1)} + f(\eta), \quad (25)$$

$$f(\eta) = \begin{cases} \eta \ln(r) & \text{para } \ell = 0 \\ -\frac{\eta}{\ell(\ell+1)} & \text{para } \ell = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (26)$$

donde A y B son constantes reales. La Figura 4 muestra ejemplos de la ec. (25), que, cualitativamente, se asemejan al potencial nuclear.

Pasando ahora a la solución de la ecuación diferencial ordinaria (24), se pueden distinguir tres casos:

- A. $g = 1$, ℓ arbitrario. Este es el caso de propagación del frente de onda. La solución es

$$G_\eta^\ell(1) = \frac{\eta}{\ell(\ell+1)}, \quad (27)$$

donde $\ell = 1, 2, 3, \dots$, y $G(1)$ está indefinido para $\ell = 0$. De la ec. (22), $M_\eta^\ell(r) = Ar^\ell + Br^{-(\ell+1)}$, que es independiente del tiempo.

- B. $g \neq 1$, $\ell = 0$. La solución de la ecuación diferencial ordinaria es directa

$$\begin{aligned} G_\eta^0(g) = & \frac{\eta}{2} [(1+g) \ln|1+g| + (1-g) \ln|1-g| - 2] \\ & + Cg + D, \end{aligned} \quad (28)$$

donde C y D son constantes reales. La conexión con las ondas viajeras se ve inmediatamente sustituyendo las variables canónicas de D'Alembert, ec. (4):

$$\begin{aligned} G_\eta^0(\xi_\pm, r) = & \frac{\eta}{2r} (\xi_+ \ln|\xi_+| + \xi_- \ln|\xi_-|) \\ & - \eta(1 + \ln(r)) + \frac{C(\xi_+ - \xi_-)}{2r} + D. \end{aligned} \quad (29)$$

Sustituyendo las ecs. (25), (26) y (29) en la ec. (22) se obtiene la solución final en términos de ondas viajeras

$$\begin{aligned} M_\eta^0(\xi_\pm, r) = & \frac{\eta}{2r} (\xi_+ \ln |\xi_+| + \xi_- \ln |\xi_-|) \\ & + A + \frac{B}{r} + \frac{C(\xi_+ - \xi_-)}{2r} + D. \end{aligned} \quad (30)$$

La forma general de $M = F(\xi_\pm)/r$ es la estructura bien conocida de las ondas esféricas [1, pag. 191].

C. $g \neq 1, \ell \neq 0$. Para este caso general no existen en la literatura soluciones cerradas de la ecuación diferencial ordinaria (24). Nosotros hemos desarrollado un método de solución [5] que se explica en la segunda sección del Apéndice. La solución general es

$$G_\eta^\ell(g) = C s_\ell(g) + D t_\ell(g) + \eta u_\ell(g), \quad (31)$$

donde $s_\ell(g), t_\ell(g)$, y $u_\ell(g)$ son funciones no armónicas de la primera, segunda y tercera clases respectivamente, que satisfacen una ecuación de Legendre asociada no-homogénea. Los valores explícitos para los primeros valores de ℓ se muestran en las Tablas 4 a 6. La Figura 5 muestra los gráficos correspondientes.

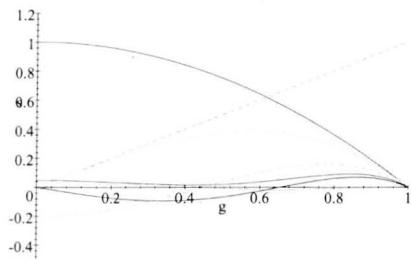
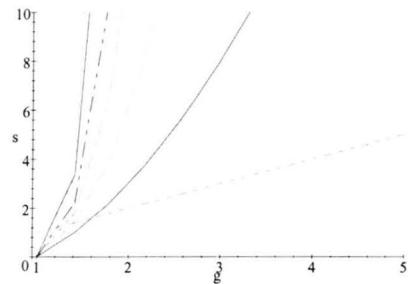
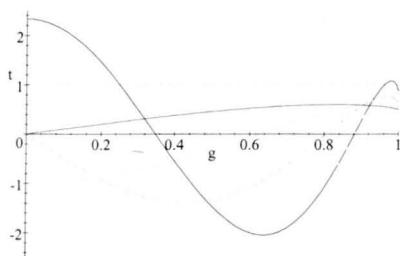
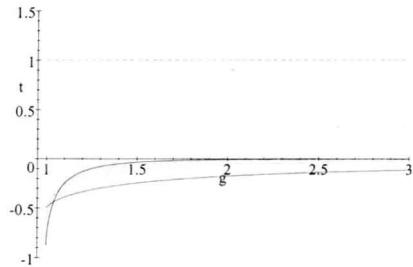
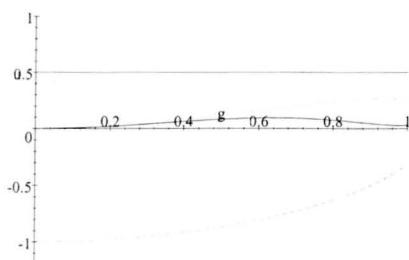
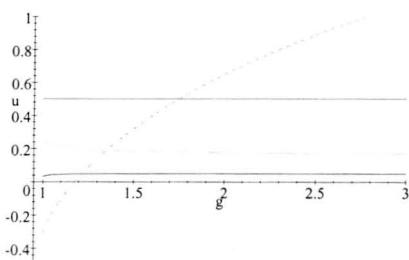
Fig. 5. Soluciones acopladas no armónicas(a) $s_l(g)$, $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (b) $s_l(g)$, $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (c) $t_l(g)$, $l = 0, 1, 2, 3, 4$ (d) $t_l(g)$, $l = 0, 1, 2, 3, 4$ (e) $u_l(g)$, $l = 0, 1, 2, 4$, $u_3(g) = \frac{1}{12}$ (f) $u_l(g)$, $l = 0, 1, 2, 4$, $u_3(g) = \frac{1}{12}$

Figura 5. Nuevas soluciones acopladas no armónicas. Lado izquierdo: variación en $0 < g < 1$. Para tiempo fijo, si $r \rightarrow \infty$ entonces $g \rightarrow 0$. Lado derecho: variación en $1 < g < \infty$. Para tiempo fijo, si $r \rightarrow 0$ entonces $g \rightarrow \infty$. **a.** y **b.** Funciones no armónicas de primera clase, $s_\ell(g)$. En **a.** las curvas corresponden a $\ell = 0, 1, \dots, 6$, de arriba a abajo, arrancando de la esquina superior derecha. En **b.**, lo mismo en sentido opuesto a las agujas del reloj, partiendo desde la esquina inferior derecha. En $g = 1$, $s_\ell(g) = 0$ para $\ell = 1, 2, 3, \dots$. **c.** y **d.** Funciones no armónicas de la segunda clase, $t_\ell(g)$. En $g = 1$, $t_\ell(g)$ es discontinua para $\ell = 1, 2, 3, \dots$. **e.** y **f.** Funciones no armónicas de la tercera clase, $u_\ell(g)$. Convención general: $\ell = 0$: puntos; $\ell = 1$: continua; $\ell = 2$: rayas; $\ell = 3$: punto-rayas; $\ell = 4$: punto-punto-rayas; $\ell = 5$: continua; $\ell = 6$: puntos (en a y b).

5. Posibles implicaciones físicas

Las nuevas soluciones pueden tener implicaciones en todos aquellos problemas microscópicos y macroscópicos que pueden ser descritos por la ecuación de ondas homogénea. Se mencionan tres áreas generales de investigación.

5.1. Electromagnetismo

Es bien sabido que las ecuaciones de Maxwell, en ausencia de cargas, llevan a ondas electromagnéticas planas descritas por [11]: $\square \mathbf{E} = 0$, $\square \mathbf{B} = 0$. La existencia de nuevas soluciones de la ecuación de ondas homogénea implica que podrían existir ondas no-planas descritas también por las ecuaciones de Maxwell. Para resolver este problema se ha comenzado por analizar las suposiciones implícitas en la soluciones convencionales de las ecuaciones de Maxwell [12, 13, 14].

Otras posibles líneas de investigación son:

1. Conexión entre las soluciones sobre superficies de conos y el efecto Cherenkov, y

2. Conexión entre superconductividad y la componente independiente del tiempo.

5.2. Ecuaciones relativistas

Es bien sabido que las ecuaciones de Dirac para el electrón son equivalentes a una ecuación matricial de Klein–Gordon [15], o, equivalentemente, a una ecuación de Klein–Gordon sobre cada una de las dimensiones internas. Para el caso particular de partículas sin masa, las ecuaciones se reducen a la ecuación de ondas homogénea. Las nuevas soluciones de la ecuación de ondas homogénea podrían implicar nuevos comportamientos de las partículas no–masivas, el neutrino y el fotón por ejemplo. Como comienzo de esta línea de investigación, el autor ha empezado por determinar qué condiciones son suficientes y/o necesarias para obtener la ecuación de Klein–Gordon a partir de las ecuaciones de Dirac [16, 17, 18].

5.3. Mecánica cuántica

Tal como se observó en la tercera sección, la parte direccional de la ecuación de ondas homogénea dada por $D(\theta, \varphi)$ es la misma componente direccional de la ecuación de Schrödinger cuando el potencial es central. La solución de la ecuación de Schrödinger es $\Psi_S = D(\theta, \varphi)S(r, u)$, mientras que la solución de la ecuación de ondas homogénea es $\Psi = D(\theta, \varphi)M(r, u)$. Esto lleva a varias líneas de investigación:

1. Cuáles son las implicaciones para mecánica cuántica de las nuevas soluciones de $D(\theta, \varphi)$, en que m no está cuantizado.
2. Una comparación detallada entre $M(r, u)$ y $S(r, u)$ permite identificar todos los efectos relativísticos, no contenidos en la solución convencional de la ecuación de Schrödinger.
3. En particular, cual es el significado cuántico de la nueva constante de separación η que aparece en lugar de la energía.

Conclusiones

En esta memoria se describe el proceso de solución de la ecuación de ondas homogénea en tres dimensiones. Adicionalmente a la solución convencional, que no se analizó, se describieron tres grupos de familias de soluciones adicionales:

- a. Soluciones no-dispersivas en coordenadas cartesianas.
- b. Soluciones direccionales en coordenadas esféricas asociadas con la rama imaginaria del número cuántico magnético.
- c. Soluciones en coordenadas esféricas con tiempo y distancia sin desacoplar a la manera tradicional; estas constituyen una solución cerrada y explícita al problema de ondas viajeras en tres dimensiones que, hasta ahora, solamente podía ser resuelto de forma aproximada.

Todas las soluciones descritas son reales.

Se mencionaron algunas posibles conexiones con electromagnetismo, y con las ecuaciones de Schrödinger y de Dirac. Son todos temas abiertos que posibilitan la identificación teórica de nuevos fenómenos, o la explicación de fenómenos ya conocidos, pero con explicación endeble dentro del ámbito tradicional.

Agradecimientos

El autor agradece a los colegas Diego Buriticá, Octavio Guzmán y Jorge I. Vallejo, todos profesores del Departamento de Física de la Universidad Nacional en la época de este estudio, por haberlo acompañado en la investigación que culminó en el estudio aquí resumido. Igualmente agradece al editor de MOMENTO y a un árbitro anónimo por sugerencias de forma.

A. Apéndices

A.1. Valores reales de $P_\ell^\mu(\cos \theta)$

Aquí se detalla el procedimiento seguido para obtener valores del ángulo θ que hacen que $P_\ell^\mu(\cos \theta)$ sea real, y se calculan los valores correspondientes. Sea [10, pag. 332],

$$\begin{aligned} P_\ell^\mu(\cos \theta) &= \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta - 1} \right)^{\mu/2} \\ &\quad \times F \left(-\ell, \ell + 1; 1 - \mu; \frac{1 - \cos \theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

donde $|1 - \cos \theta| < 2$ y F es la serie hipergeométrica definida como [10, 15.1.1, pag. 556]

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= F(b, a; c; z) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}. \end{aligned} \quad (33)$$

Para usar una notación más compacta sean,

$$E_m(\theta) = \frac{1}{\Gamma(1-im)} \left(\frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta - 1} \right)^{im/2}, \quad (34)$$

$$F_m^\ell(\theta) = F \left(-\ell, \ell + 1; 1 - im; \frac{1 - \cos \theta}{2} \right), \quad (35)$$

$$P_\ell^{im}(\cos \theta) = E_m(\theta) F_m^\ell(\theta). \quad (36)$$

Calculemos ahora cada uno de las dos funciones, así:

$$\begin{aligned} E_m(\theta) &= \frac{1}{\Gamma(1-im)} \left(-\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^{im/2} \\ &= \frac{\Gamma(1+im)}{\Gamma(1-im)} \frac{\left(i \cot \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^{im}}{\Gamma(1-im)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Sustituyamos las siguientes identidades:³

$$i^{im} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{im} = e^{-\pi m/2}, \quad (38)$$

el denominador por [10, 6.1.31, pag. 256]

$$\Gamma(1 + i m) \Gamma(1 - i m) = \frac{\pi m}{\sinh(\pi m)}, \quad (39)$$

la función gamma por

$$\Gamma(1 + i m) = \exp(a(m) + i b(m)), \quad (40)$$

donde $a(m) = \operatorname{Re}(\ln \Gamma(1 + im))$ y $b(m) = \operatorname{Im}(\ln \Gamma(1 + im))$ se leen de la Tabla 6.7 en [10, pag. 277]. Obtenemos así:

$$\begin{aligned} E_m(\theta) &= \frac{\sinh(\pi m)}{\pi m} \exp\left(-\frac{\pi m}{2} + a(m)\right) \\ &\times \exp\left[i \left(b(m) - m \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right)\right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Para evaluar $F_m^\ell(\theta)$ observemos que $a = -\ell$ es un entero negativo, por lo que la suma se corta en ℓ [10, 15.4.1, pag 561]. Los tres primeros términos son:

$$F_m^0(\theta) = 1, \quad (42)$$

$$F_m^1(\theta) = 1 - \frac{2(1 + im)}{1 + m^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} F_m^2(\theta) &= 1 - \frac{6(1 + im)}{1 + m^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &+ \frac{24(2 - m^2 + 3im)}{(1 + m^2)(4 + m^2)} \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (44)$$

³En la solución tradicional en que $\mu = m$, éste es el único término que puede ser complejo. i^m es real si $m = 2n$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Observemos que las soluciones con m impar son imaginarias puros. Este tema amerita investigación adicional.

Esto es, las funciones $F_m^\ell(\theta)$ son típicamente complejas, expresables como

$$F_m^\ell(\theta) = R_m^\ell(\theta) \exp(i \alpha_m^\ell(\theta)). \quad (45)$$

Sustituyendo en la función de Legendre asociada

$$\begin{aligned} P_\ell^{im}(\theta) &= \frac{R_m^\ell(\theta) \sin(\pi m)}{\pi m} \exp\left(-\frac{\pi m}{2} + a(m)\right) \\ &\times \exp\left[i \left(b(m) - m \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \alpha_m^\ell(\theta)\right)\right]. \end{aligned} \quad (46)$$

La condición para que $P_\ell^{im}(\theta)$ sea real es entonces que

$$b(m) - m \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \alpha_m^\ell(\theta) = 2\pi k \quad (47)$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Los valores del ángulo θ que resuelven la ecuación trascendental anterior se obtiene por métodos numéricos. Algunos ejemplos se muestran en las Tablas 2 y 3 para $\ell = 0, 1$. El valor de $P_\ell^{im}(\theta)$ es

$$P_\ell^{im}(\theta) = \frac{R_m^\ell(\theta) \sin(\pi m)}{\pi m} \exp\left(-\frac{\pi m}{2} + a(m)\right), \quad (48)$$

que también se da en la Tabla 1 para m positivo. Para m negativo se cumple que

$$E_{+m}(\theta) E_{-m}(\theta) = \frac{\sinh(\pi m)}{\pi m}. \quad (49)$$

Además, para $\ell = 0$ se cumple que $R_m^0(\theta) = 1$ por lo que

$$P_0^{-im}(\theta) P_0^{im}(\theta) = \frac{\sinh(\pi m)}{\pi m}. \quad (50)$$

Entonces, $P_0^{-im}(\theta)$ se puede calcular inmediatamente a partir de la Tabla 1.

6.2. Solución de la ecuación de Legendre asociada no-homogénea

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria (23) para el caso $g \neq 1$. Introduzcamos la variable auxiliar

$$U(g) = \frac{G(g)}{h(g)} = \frac{G(g)}{|1 - g^2|^{1/2}}. \quad (51)$$

Sustituyendo en la ec. (23) se obtiene una ecuación de Legendre asociada no-homogénea

$$(1 - g^2) \frac{d^2U}{dg^2} - 2g \frac{dU}{dg} + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{1}{1 - g^2} \right) U = \frac{\eta}{h(g)}. \quad (52)$$

Para $\eta = 0$ esta expresión se reduce a la ecuación de Legendre asociada con $m^2 = 1$, cuya solución se obtiene inmediatamente en términos de $P_\ell^1(g)$ y $Q_\ell^1(g)$, que son funciones de Legendre asociadas de primera y de segunda clases [2, 10]:

$$U_0^\ell(g) = C P_\ell^1(g) + D Q_\ell^1(g), \quad (53)$$

lo que lleva a

$$G_0^\ell(g) = h(g) \left(C P_\ell^1(g) + D Q_\ell^1(g) \right), \quad (54)$$

donde $\ell = 1, 2, 3, \dots$.

El caso $\ell = 0$, η arbitrario, se resolvió en la sección IV. Para el caso $\eta \neq 0, \ell > 0$ no se encontraron soluciones en la literatura [1, 2, 10], por lo que se procedió a su solución directa, así: la ecuación diferencial ordinaria (23) se multiplica por un polinomio $f(g)$ definido como

$$f(g) = a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + a_3 g^3 + \dots, \quad (55)$$

obteniendo la siguiente ODE

$$(1 - g^2) f(g) \frac{d^2G}{dg^2} + \ell(\ell + 1) f(g) G = \eta f(g). \quad (56)$$

Definamos las siguientes variables auxiliares:

$$Z(g) = h^2(g) f(g) = |1 - g^2| f(g), \quad (57)$$

y

$$X = Z G', \quad (58)$$

$$Y = Z' G, \quad (59)$$

donde las primas significan derivadas respecto a g . Tomando derivadas de X y Y respecto a g , y sustituyendo en la ec. (55) se obtiene

$$X' - Y' + (Z'' + \ell(\ell + 1) f(g)) G = \eta f(g), \quad (60)$$

$$X' - Y' + (Z'' - \ell(\ell + 1) f(g)) G = -\eta f(g), \quad (61)$$

para $g^2 < 1$ y $g^2 > 1$, respectivamente.

Las ecuaciones anteriores se pueden integrar fácilmente para obtener X y Y , siempre y cuando el término en paréntesis, esto es el coeficiente de la variable G , sea nulo. Una vez calculado Y , el valor de G se puede obtener a partir de la definición de Y . El problema se reduce entonces a identificar las condiciones bajo las cuales los coeficientes de G son cero, esto es

$$Z'' + \ell(\ell + 1) f(g) = 0, \quad (62)$$

$$Z'' - \ell(\ell + 1) f(g) = 0, \quad (63)$$

para $g^2 < 1$ y $g^2 > 1$, respectivamente.

Sustituyendo la definición de Z , e igualando a cero el coeficiente de cada potencia de g , se obtiene un ecuación de recurrencia para los índices de los coeficientes a_i que definen la función $f(g)$, así

$$(i + 2)(i + 1) a_{i+2} = ((i + 2)(i + 1) - \ell(\ell + 1)) a_i, \quad (64)$$

donde $i = 0, 1, 2, \dots$

Esta ecuación produce entonces dos series de coeficientes (par e impar) cuyos valores dependen del valor que se asigne arbitrariamente a uno de los términos de cada serie (por ejemplo al primero, o sea a a_0 y a_1). Se observa también que una serie termina cuando uno de sus términos es cero; por ejemplo, si $a_{i+2} = 0$, entonces, $a_{i+4} = a_{i+6} = \dots = 0$. En particular, si el primer miembro de la serie par $a_0 = 0$, entonces toda la serie es nula. Consideremos ahora un término cualquiera $a_{i+2} \neq 0$. El término siguiente $a_{i+4} = 0$, si y sólo si

$$(i+2)(i+1) - \ell(\ell+1) = 0. \quad (65)$$

Evidentemente, la solución es $\ell = i+1$, o sea $i = \ell - 1$. Esto es, el último término de la serie para ℓ es $a_{\ell-1}$. Por conveniencia, sean $a_{\ell-1} = 1$ y el primer término de la otra serie cero. Los términos hacia abajo, $a_{\ell-3}$ y así sucesivamente, se calculan recursivamente. La Tabla 7 muestra los coeficientes para los primeros valores de ℓ .

Habiendo asegurado entonces que el coeficiente de G es cero en las ecs. (59) y (60), éstas se pueden integrar para obtener

$$G(g) = Z(g) (\eta I_2(g) + D I_3(g) + C), \quad (66)$$

$$G(g) = Z(g) (-\eta I_2(g) + D I_3(g) + C), \quad (67)$$

para $g^2 < 1$ y $g^2 > 1$, respectivamente, donde C y D son constantes reales, y la integral $I_i(g)$ se definen como

$$\begin{aligned} I_1(g) &= \int f(g) dg, \\ I_2(g) &= \int \frac{I_1(g)}{Z^2} dg, \\ I_3(g) &= \int \frac{1}{Z^2} dg, \end{aligned} \quad (68)$$

Puesto que tanto $f(g)$ como Z son polinomios con un número finito de términos, es claro que las integrales anteriores pueden ser

todas evaluados utilizando los coeficientes de la Tabla 7, o calculándolos a partir de la fórmula de recurrencia, ec. (63), conforme se explicó antes.

Finalmente, definamos

$$\begin{aligned} s_\ell(g) &\equiv Z(g), \\ t_\ell(g) &\equiv Z(g) I_3(g), \end{aligned} \quad (69)$$

donde $g^2 \neq 1$, y

$$u_\ell(g) \equiv Z(g) I_2(g), \quad (70)$$

$$u_\ell(g) \equiv -Z(g) I_2(g), \quad (71)$$

para $g^2 < 1$ y $g^2 > 1$, respectivamente, y sustituymos en las ecs. (65) y (66) para obtener así la expresión para $G(g)$ dada por la ec. (31), y los valores para las funciones $s_\ell(g)$, $t_\ell(g)$ y $u_\ell(g)$, que aparecen en las Tablas 4 a 6.

m	$P_0^{im}(\theta)^a$	$P_1^{im}(\theta)^a$				
	Todo k	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = -1$	$k = -2$
1×10^{-8}	$1-\epsilon_8$	0.759	$1-\epsilon_8$	$1-\epsilon_8$	$1-\epsilon_8$	$1-\epsilon_8$
1×10^{-7}	$1-\epsilon_7$	0.759	$1-\epsilon_7$	$1-\epsilon_7$	$1-\epsilon_7$	$1-\epsilon_7$
1×10^{-6}	$1-\epsilon_6$	0.759	$1-\epsilon_6$	$1-\epsilon_6$	$1-\epsilon_6$	$1-\epsilon_6$
1×10^{-5}	$1-\epsilon_5$	0.759	$1-\epsilon_5$	$1-\epsilon_5$	$1-\epsilon_5$	$1-\epsilon_5$
1×10^{-4}	$1-\epsilon_{40}$	0.759	$1-\epsilon_{41}$	$1-\epsilon_{41}$	$1-\epsilon_{41}$	$1-\epsilon_{41}$
0.001	0.998	0.758	0.998	0.998	0.998	0.998
0.01	0.984	0.747	0.984	0.984	0.984	0.984
0.1	0.861	0.654	0.861	0.861	0.861	0.861
0.2	0.754	0.574	0.754	0.754	0.754	0.754
0.3	0.670	0.512	0.670	0.670	0.670	0.670
0.4	0.604	0.464	0.604	0.604	0.604	0.604
0.5	0.551	0.426	0.551	0.551	0.551	0.551
1.0	0.398	0.322	0.398	0.398	0.398	0.398
1.5	0.325	0.278	0.325	0.325	0.325	0.325
1.80^b	0.296					
2.0	0.282	0.252	0.281	0.282	0.281	0.282
2.3		0.241	0.262	0.263	0.262	0.263
2.34^c	0.260	0.239	0.260	0.260	0.260	0.260
2.4		0.237	0.256	0.257	0.257	0.257
3.0	0.230	0.219	0.229	0.230	0.229	0.230
4.0	0.199	0.194	0.197		0.199	
5.0	0.178	0.176	0.175	0.178	0.178	
10.0	0.126	0.126	0.125	0.125	0.126	0.126

- a) $\epsilon_8 = 1.57 \times 10^{-8}$, $\epsilon_7 = 1.571 \times 10^{-7}$, $\epsilon_6 = 1.570 \times 10^{-6}$, $\epsilon_5 = 1.570 \times 10^{-5}$, $\epsilon_{40} = 1.570 \times 10^{-4}$, $\epsilon_{41} = 1.570 \times 10^{-4}$.
- b) Para $m = 1.805$, $\theta = \pi/2$, lo cual implica que $P_0^{im}(\theta)$ es real en el plano $x - y$ ($k = 0$).
- c) Para $m = 2.344$, $\theta = \pi/2$, lo cual implica que $P_1^{im}(\theta)$ es real en el plano $x - y$ ($k = 0$).

Tabla 1. Valores reales de funciones de Legendre asociadas $P_0^{im}(\theta)$ y $P_1^{im}(\theta)$.

m	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = -1$	$k = -2$
$1x10^{-8}$	^b 58.62	ϵ	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.001	58.62	ϵ	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.01	58.62	ϵ	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.1	58.82	ϵ	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.2	59.39	ϵ	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.3	60.33	$5x10^{-8}$	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.4	61.57	$1x10^{-5}$	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.5	63.08	$2x10^{-4}$	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.9	70.82	$7x10^{-2}$	ϵ	ϵ	179.85	$180-\epsilon$
1.0	72.97	0.15	ϵ	ϵ	179.71	$180-\epsilon$
1.5	83.79	1.55	0.02	ϵ	178.06	179.97
1.8	89.89	3.48	0.10	ϵ	176.50	179.89
1.80 ^c	90.00	3.52	0.10	0.00	176.47	179.89
1.9	91.83	4.33	0.15		175.94	179.85
2.0	93.71	5.28	0.22	0.01	175.36	179.80
3.0	109.72	19.85	2.47	0.30	170.09	178.78
4.0	121.38	40.64	8.80	1.83	166.69	177.22
5.0	130.01	62.81	19.71	5.66	164.88	175.67
10.0	151.76	129.52	97.07	62.24	164.72	171.81
20.0	98.55	80.63	63.57	48.71	115.68	130.67
2000	90.05	89.87			90.23	
10000	90.01	89.97			90.05	

a) $\epsilon < 1x10^{-4}$.

b) Si $m \rightarrow 0$, $\theta = 58.624^\circ$. Para $m = 0.001$, $\theta = 58.624^\circ$.

c) Para $m = 1.805$, $\theta = \pi/2 \Rightarrow P_0^{im}(\theta)$ es real en el plano $x - y$.

Tabla 2. Conos de semiángulo θ tal que $P_0^{im}(\theta)$ es real; θ es el semiángulo del cono con vértice en el origen, en grados.^a

m	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = -1$	$k = -2$
0.001	40.6	ϵ	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.01	40.6	ϵ	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.1	40.8	ϵ	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.2	41.4	ϵ	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.3	42.3	5×10^{-8}	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.4	43.6	1×10^{-5}	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
0.5	45.1	2×10^{-4}	ϵ	ϵ	$180-\epsilon$	$180-\epsilon$
1.0	56.2	0.158	3×10^{-4}	6×10^{-7}	179.4	179.9
1.5	69.4	1.558	0.023	4×10^{-4}	176.8	179.9
2.0	82.1	5.27	0.22		175.5	179.7
2.3	89.0	8.71	0.56		171.6	179.5
2.34 ^c	90.0	9.31	0.64	0.043	171.4	179.4
2.4	91.2	10.04	0.73		171.1	179.3
3.0	102.7	19.73	2.468		168.2	178.5
4.0	117.1	40.12			165.2	
5.0	127.3	61.75	19.67		163.8	
10.0	151.3	128.80	96.43	61.97	164.4	171.6

- a) $\epsilon < 1 \times 10^{-4}$.
- b) Para $m \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 40.595^\circ$. Para $m = 0.001$, $\theta = 40.595^\circ$.
- c) Para $m = 2.345$, $\theta = \pi/2 \Rightarrow P_1^{im}(\theta) = \text{real en plano } x - y$ ($k = 0$).

Tabla 3. Conos de semiángulo θ tal que $P_1^{im}(\theta)$ es real; θ es el semiángulo del cono con vértice en el origen, en grados.^a

$s_0(g) = g$
$s_1(g) = 1 - g^2 $
$s_2(g) = 1 - g^2 g$
$s_3(g) = 1 - g^2 [g^2 - (1/5)]$
$s_4(g) = 1 - g^2 [g[g^2 - (3/7)]$
$s_5(g) = 1 - g^2 [g^4 - (2/3)g^2 + (1/2)]$
$s_6(g) = 1 - g^2 [g^4 - (10/11)g^2 + (5/33)]$

Tabla 4. Funciones no armónicas de la primera clase, $s_\ell(g)$ para $g^2 \neq 1$.

$T_0(g) = 1$
$T_1(g) = (1/2)[g + (1 - g^2)Q_0]$
$T_2(g) = (3/2)g[g + (1 - g^2)Q_0] - 1$
$T_3(g) = (15/16)[g(5g^2 - (13/3) + (5g^2 - 1)(1 - g^2)Q_0]$
$T_4(g) = (35/16)g[g(7g^2 - (23/3)) + (7g^2 - 3)(1 - g^2)Q_0] + (7/3)$

Tabla 5. Funciones no armónicas de la segunda clase.
 $t_\ell(g) = +T_\ell(g)$ para $g^2 < 1$, $t_\ell(g) = -T_\ell(g)$ para $g^2 > 1$.
 $Q_0 = \frac{1}{2} \ln[(1 + g)/|1 - g|]$.

$u_0(g) = (1/2) \ln 1 - g^2 + gQ_0 - 1$
$u_1(g) = (1/2)$
$u_2(g) = (1/4)g[g + (1 - g^2)Q_0]$
$u_3(g) = (1/12)$
$u_4(g) = -(3/64)g[g(7g^2 - (23/3)) + (7g^2 - 3)(1 - g^2)Q_0]$
$u_\ell(g) = 1/\ell(\ell + 1)$

Tabla 6. Funciones no armónicas de la tercera clase, $u_\ell(g)$ para $g^2 \neq 1$. $Q_0 = \frac{1}{2} \ln[(1 + g)/|1 - g|]$.

ℓ	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	-1/5	0	1	0	0	0
4	0	-3/7	0	1	0	0
5	+1/21	0	-2/3	0	1	0
6	0	+5/33	0	-10/11	0	1

Tabla 7. Coeficientes del polinomio $f(g)$.

Referencias

1. S. L. Sobolev, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* (Dover, New York, 1989).
2. E. Butkov, *Mathematical Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1968).
3. S. J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers* (Dover, New York, 1993).
4. H. Múnera, D. Buriticá, O. Guzmán y J. Vallejo, *Soluciones no convencionales de la ecuación de ondas viajeras*, Rev. Col. Fís. **27**, 215 (1995).
5. H. A. Múnera y O. Guzmán, *New explicit nonperiodic solutions of the homogeneous wave equation*, Found. Phys. Lett. **10**, 31 (1997).
6. L. De Broglie, *De la Mécanique Ondulatoire a la Théorie du Noyau*, tomo II (Hermann and Cie., Paris, 1945), p. 60.
7. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1 (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), p. 30.
8. F. S. Crawford, *Waves*, Berkeley Physics Course, vol. 3 (McGraw-Hill, New York, 1968), pp. 87-89.

9. L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw–Hill, New York, 1955).
10. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965).
11. J. D. Jackson, *Electrodinámica Clásica* (Editorial Alhambra S. A., Madrid, 1966).
12. H. A. Múnera y O. Guzmán, *Magnetic potentials, longitudinal currents, and magnetic properties of vacuum: All implicit in Maxwell's equations*, *Apéiron* **4**, 63 (1997).
13. H. A. Múnera y O. Guzmán, *Explicit examples of free-space non-planar electromagnetic waves containing magnetic scalar potentials*, presentado en la Conferencia Vigier II, Toronto, 1997.
14. A. E. Chubykalo, H. A. Múnera y R. Smirnov–Rueda, *Is the free electromagnetic field a consequence of Maxwell's equations or a postulate?*, *Found. Phys. Lett.* **11**, 573 (1998).
15. P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, Oxford, 1958).
16. H. A. Múnera, *Explicit Schrödinger–Klein–Gordon equations for $j > 1/2$ derived as an extension of Dirac's $j=1/2$ relativistic equations*, enviada a publicación (1999).
17. H. A. Múnera, *Equivalence between Maxwell equations and Dirac-like equations for $j = 1$ bosons*, *Memorias del International Workshop Lorentz Group, CPT, and Neutrinos*, Universidad de Zacatecas (1999).
18. H. A. Múnera, *Two new Dirac-like representations for massive $j = 1$ bosons*, HIP (2000).
19. E. Segrè, *Nuclei and Particles* (Benjamin, London, 1977).