BOSQUEJO HISTÓRICO DE LA MODERNA "ÁLGEBRA DE LAS MAGNITUDES"[1]

Carlo Federici Casa

Profesor Emérito
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia

La moderna *Álgebra de las Magnitudes*, que en principio fue axiomatizada por el autor de este trabajo durante los años 1949–50, y que se encuentra en las bases de la física, así como el álgebra moderna conjuntamente con la topología y jerarquías, en las bases de la matemática, tiene sus raíces en la ya vieja *Teoría de las Dimensiones*, que fue bosquejada por primera vez en el año 1822 por el físico y matemático francés Fourier [**A**] en su famoso tratado *Theorie Analytique de la Chaleur* [**1**], y por él mismo señalada como una teoría extremadamente general y llena de profundo significado físico.

Afirma en efecto Fourier que: *tal teoría deriva de nociones primordiales sobre magnitudes y que, por esta misma razón, equivale a los lemas fundamentales que los griegos nos dejaron sin demostrar en la geometría y en la mecánica*, e indica, entre las diferentes propiedades que una teoría tan ampliamente concebida tiene que poseer: propiedad de ser una *formal teoría reguladora de los criterios para los cambios de unidades de medida de las diversas magnitudes físicas.*

Y como tal, precisamente, en el siglo XIX, la teoría de las dimensiones proporcionó el instrumento *ad hoc* para luchar contra las gravísimas dificultades de interpretar, y sobretodo de medir con

[1] El texto original fue editado por Luz Marina Caicedo, J. Granés y V. Tapia. Las traducciones del francés fueron realizadas por J. Granés. Las traducciones del italiano fueron realizadas por V. Tapia.

unidades oportunamente definidas, las nuevas y numerosas magnitudes de la entonces naciente electrología.[2] Para tal propósito recuérdese que la ley de Coulomb lleva la fecha de 1785. Pero haber querido tener en cuenta de dicha teoría exclusivamente el mencionado carácter de reguladora de los cambios de unidades, debía resultarle fatal. En efecto, numerosos físicos fueron empujados a introducir, o a aceptar tácita o tal vez inconscientemente, en la naciente electrología, algunas pretendidas simplificaciones en las dimensiones de alguna magnitud fundamental. Hoy en día estas simplificaciones deben ser consideradas no sólo física sino más bien lógicamente como absurdas. En aquel entonces no se consideraban así, pues no turbaban formalmente aquella posibilidad de aplicación (el cambio de unidades) que sólo había sido tomada en consideración. Como consecuencia de tan errónea manera de comportarse de los físicos, no se pudo aprovechar, durante casi un siglo, ni la índole de la teoría, según el sano entendimiento de Fourier, ni tampoco sus más importantes posibilidades, tanto aplicativas como teóricas.

Fue entonces cuando muchos físicos, para aliviar talvez el malestar producido por ciertas situaciones contradictorias, aceptaron la idea de que se debía considerar la teoría de las dimensiones como *objeto de ligámenes artificiales, de puras convenciones determinantes de cierta estructura metrológica particular, y como consecuencia, una manera especial de escribir las ecuaciones de la física; convenciones teóricamente arbitrarias y prácticamente dictadas por razones de mera oportunidad y por este mismo motivo privadas de todo fundamento, de todo sentido físico*, según se expresaba desgraciadamente el físico y matemático Giorgi [**B**], fundador del sistema internacional de unidades MKS, en su artículo *Sistemi e unità di misura* (Sistemas y unidades de medida) en la *Enciclopedia delle Matematiche Elementari* (Enciclopedia de Matemáticas Elementales) [**2**].

De esta manera las conclusiones contradictorias a que se llegaba, parecían, pues, efecto no de graves errores, sino solamente de convenciones no oportunas. Todo esto después de las claras adver-

[2]Electricidad.

tencias expresadas hacia fines del siglo XIX por físicos ilustres como Rucker, Thompson [**3**], Williams [**4**], Fessenden, sobre la artificiosidad de las fórmulas dimensionales, consecuencia de la artificiosidad de las supuestas simplificaciones.

A fines del siglo XIX y a principios del XX, precisamente en aquellos campos en que los graves errores ya lamentados no habían podido influir, la teoría de las dimensiones demostró ser de gran utilidad teórica y práctica, a través de dos aplicaciones características:

1. La *semejanza física*[3] que, ya usada en 1687 por Newton [**C**] en su *Philosophiae naturalis principia mathematica* [**5**], y desarrollada por el físico inglés Froude [**D**], primer constructor de los llamados *canales de prueba* para fundar la teoría de las experiencias sobre modelos hidrodinámicos, y utilizada en 1903 por el físico francés Eiffel [**E**] para aplicarla en la teoría paralela de las experiencias sobre modelos aerodinámicos, permite iniciar la construcción de *canales navales* (canales Froude) y de *túneles de viento* (túneles Eiffel), esenciales, hoy como ayer, en los estudios preliminares de toda construcción naval o aérea.

2. La *homogeneidad física*, reconocida desde el principio por Fourier, (*el primer observador sagaz*, como de él habla Bridgman [**F**] en su tratado *Dimensional Analysis* de 1931 [**10**]), y usada con perspicacia por Bertrand [**G**] en una serie de publicaciones que van del año 1848 al año de 1890, publicaciones en las cuales Bertrand demuestra cómo algunas veces, aunque no siempre sin contradicciones (piénsese en la ley del péndulo simple independiente de la elongación angular máxima), es posible llegar hasta la determinación de las leyes físicas con base en el conocimiento único de que en ellas solamente intervienen ciertas y determinadas magnitudes.

Las aplicaciones hechas por Bertrand deberían haber sido suficientes por sí solas para que se llegara al convencimiento de que

[3]Se refiere a las relaciones numéricas que se mantienen al considerar modelos a escala.

en la teoría de las dimensiones, no obstante evidentes y chocantes contradicciones, debía existir un auténtico fundamento físico en vez de un arbitrario convencionalismo. Con respecto a tales contradicciones, piénsese tan solo en la que surge con relación a la *dimensionalidad* o *adimensionalidad* de la *amplitud* (plana o sólida) o, como suele decirse más comúnmente, aun con error, del *ángulo*.

En efecto, si se quiere obtener la fórmula que liga el periodo Pr de oscilación de un péndulo simple, con su longitud Ln, con su masa inercial M_i, con la fuerza Fr que actúa sobre M_s, y con la amplitud angular máxima A_m, se tiene que buscar la forma de φ tal que

$$\varphi(Pr,\, Ln,\, M_i,\, Fr,\, A_m) = 0\,.$$

Ahora, con esta ley se tienen dos posibilidades, a saber: si se acepta que Am es una magnitud, *dimensional* como las demás, y tal es el caso, entonces la teoría de las dimensiones no logra proporcionarnos la fórmula buscada, porque no es capaz de relacionar A_m en un monomio cero–dimensional; si, por el contrario, se acepta, como mal se acostumbra, que A_m no es una magnitud (o como alguién dice, para eludir el problema, sin lograr eludirlo, que es una *magnitud adimensional*), entonces la teoría de las dimensiones sí nos proporciona una fórmula que es la bien conocida $Pr = A_d(LnMs/Fr)^{1/2}$, pero, como sabemos, es plenamente contradictoria con la realidad, puesto que el periodo Pr depende también de A_m.

Y, ¿cuál es el precio pagado para conseguir una simple fórmula aproximada como la arriba enunciada?

Se empieza por quitarle el derecho de ciudadanía como *magnitud* al ángulo (objeto) o mejor dicho a la amplitud (magnitud definida por medio de la congruencia y agregación aditiva entre ángulos) no fundamentando ese *ostracismo*, ese *petalismo*, en ninguna explicación plausible, puesto que como tal no se puede aceptar aquella que da Straneo en su memoria titulada *Teoria generalizata delle dimensioni delle grandezze fisiche* (Teoría generalizada de las dimensiones de las magnitudes físicas) [**7**]:

··· *noi consideriamo gli angoli (piani e solidi) come definiti* *dal rapporto di due grandezze omogenee, quindi come numeri puri. Molte delle discussioni fatte sulle dimensioni degli angoli non interessano le "dimensioni" ma solo la scelta delle "unità d'angolo".*[4]

y reconfirmada por el mismo autor en el artículo *Teoría generalizatta delle dimensioni delle grandezze fisiche*, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, con las siguientes palabras:

gli angoli piani o solidi sempre definiti come il rapporto di due lunghezze o rispettivamente di due aree, si consideranno numeri puri, cioé grandezze prive di dimensioni geometriche ⋯.[5]

Tampoco se puede aceptar aquella citada por Bauer [**8**] en su tratado *La mesure des grandeurs, dimensions et unités* (La medida de las magnitudes, dimensiones y unidades):

⋯ *les angles apparaissent come des grandeurs fondamentales indépendentes mais dont il existe une unité naturelle. Profitant de ce fait, il est commode de simplifier encore leur équation de définition métrique en choissant pour leur mesure le nombre pure "a" que l'on obtenient en donnant a la équation* $A = AL_a/L_r$ *la forme* $a = A/A = L_a/L_r$. *Un angle est allors defini come le rapport de deux longueurs, ce qui revient, en le voit, a le comparer a son unité naturelle, le radian".*[6]

---

[4]⋯ nosotros consideramos los ángulos (planos y sólidos) como definidos por la relación de dos magnitudes homogéneas, por lo tanto como números puros. Muchas de las discusiones hechas sobre las dimensiones de los ángulos no involucran las "dimensiones" sino que sólo la elección de la "unidad de ángulo".

[5]los ángulos planos o sólidos siempre definidos como la relación de dos longitudes o respectivamente de dos áreas, se consideran como números puros, es decir magnitudes privadas de dimensiones geométricas ⋯.

[6]⋯ los ángulos aparecen como magnitudes fundamentales independientes pero de las cuales existe una unidad natural. Aprovechando este hecho, resulta cómodo simplificar su ecuación de definición métrica escogiendo para su medida el número puro "a" que se obtiene dándole a la ecuación $A = AL_a/L_r$, la forma $a = A/A = L_a/L_r$. Un ángulo se define entonces como la relación de dos longitudes, lo cual conduce, ya se ve, a compararlo con su unidad natural, el radián.

Se termina naturalmente, por desautorizar integralmente la teoría dimensional afirmando, como hace Giorgi [**2**] en su artículo *Sistemi e unitá di misura*:

> ⋯ *le convenzioni per definire prodotti delle grandezze concrete tra loro e i rapporti fra grandezze eterogénee deveno essere ispirate a criteri di opportunitá e di convenienza prattica.*[7]

Y, como si no bastase,

> ⋯ *due grandezze fisiche vengono valutate come omogénee quando le loro formule dimensionali sono le stesse ed è in questo caso che possono figurare addisionate o eguagliate tra di loro* ⋯.[8]

Se podría pensar que la *dimensionalidad* es la que define a la *homogeneidad*, y no ésta a aquella, como resulta en realidad; y más todavía:

> ⋯ *non deve dimenticarsi che tutte le formule dimensionali, al pari delle relazioni di dipendenza fra le unità di diversi specie, sono effetto di convenzioni, teoricamente arbitrarie, in prattica dettate da raggioni d'opportunità.*[9]

De manera que nos preguntamos perplejos: ¿cuál es el valor del criterio de homogeneidad invocado por todos los físicos, sin excluir a ninguno, si las magnitudes pueden ser consideradas sin dimensiones, y si las mismas son efecto de puras convenciones? Esta contradicción desaparece en la coherente teoría moderna del *Álgebra de*

---

[7]⋯ las convenciones para definir productos de las magnitudes concretas entre sí y las relaciones entre magnitudes heterogéneas se deben inspirar en criterios de oportunidad y de conveniencia práctica.

[8]⋯ dos magnitudes físicas se consideran homogéneas cuando sus fórmulas dimensionales son las mismas y es en este caso que pueden aparecer sumadas o igualadas entre sí.

[9]⋯ no se debe olvidar que todas las fórmulas dimensionales, al igual que las relaciones de dependencia entre las unidades de distinta naturaleza, son efectos de convenciones, teóricamente arbitrarias, dictadas, en la práctica, por razones de practicidad.

las Magnitudes, con la aceptación del obvio postulado metodológico que puede enunciarse de la manera siguiente:

Toda vez que la teoría de las dimensiones lleve a proposiciones contradictorias con la realidad, ésto significa que, además de las magnitudes físicas que se tomaron en consideración, hace falta por lo menos una que se escapó al análisis del físico.

En el caso del péndulo, la introducción de una constante universal E_c del tipo dimensional *amplitud*, elimina la contradicción denunciada, permitiendo, además, reconocer que la relación que liga las ya nombradas, P_r, L_n, M_s, F_r y A_m a la constante universal E_c (de Euclides, suma de las amplitudes de los ángulos internos de un triángulo igual a R_d), tiene que ser del tipo tal que

$$P_r = k\,(L_n\,M_s/F_r)^{1/2}\,fn(A_m/\pi\,R_d)\,,$$

siendo fn una función indeterminada (que la teoría dinámica del péndulo demuestra que es igual a $1+\cdots$, y además sugiere de qué tipo de "espacio físico" estamos hablando.

A lo ya dicho queremos añadir todavía, que la teoría de las dimensiones continúa sufriendo, fatalmente, por una parte, la arbitrariedad de las presuntas simplificaciones de que ya hemos hablado. Esto, no obstante que en 1915 el físico y matemático Ascoli puso en clara luz la necesidad de eliminar las incongruencias que habían sido introducidas en electrología, cuando absurdamente se pretendió expresar, sin previa interpretación mecánica de la electricidad y del magnetismo, las dimensiones de las magnitudes eléctricas y magnéticas por medio de las magnitudes fundamentales de la dinámica: longitud, duración, masa inercial. Por otra parte, la falta de claridad en los conceptos fundamentales de *magnitudes dependientes e independientes*, falta de claridad puesta en evidencia a través de la discusión desarrollada en *Nature* entre Lord Rayleigh [**H**] y el físico Riabouchinski, [**9**, **10**, **11**], sobre la deducción que hizo este último, precisamente por medio de la teoría de las dimensiones, de las leyes que rigen la transmisión del calor de un fluido en movimiento a un sólido sumergido en él, leyes que el físico francés

Boussinesq había obtenido con procedimientos incomparablemente más trabajosos y, tal vez, menos persuasivos.

Esta deducción la presentó Lord Rayleigh para ilustrar una invitación a los físicos a que usaran más a menudo los métodos dimensionales para establecer la estructura de las leyes físicas que pueden subsistir entre determinadas magnitudes. La discusión a la que esta deducción dió lugar fue calificada por el mismo Lord Rayleigh, y con completo acierto, como perteneciente al dominio de la lógica (o mejor dicho, a la filosofía de la física).

Las investigaciones de Bertrand, como las de Lord Rayleigh y las de Tolman [**I**], no encontraron la resonancia que tal vez sus autores esperaban, y que ciertamente merecían. La razón de todo esto debe buscarse en las oscuras limitaciones que ocurrían en determinadas aplicaciones y no en otras, porque el método, como tuvo que reconocerlo también el mismo Tolman, *lograba resultados felices sólo entre ciertos límites, de origen bastante misterioso, y no fuera de ellos.* Tampoco el aporte dado a la teoría de las dimensiones por Straneo, con sus investigaciones que se desarrollaron en una serie de publicaciones que van, por lo menos aquellas de mi conocimiento, del año 1917 al año de 1947, es suficiente para eliminar las contradicciones y debilidades que hasta hace poco gravitaban fatalmente sobre tal teoría.

En efecto, mientras el nombrado autor se da cuenta claramente de las causas a las cuales puede achacarse la *apparente limitata utilità prattica della teoria* (la aparentemente limitada utilidad práctica de la teoría), afirmando que:

> *tale limitazione considerai sempre conseguenza solo della maniera stranamente incongruente, e talvolta sensaltro illogica, con la quale la teoria delle dimensioni veniva presentata nei trattati del secolo passato, spesso tale da lasciare persino dubitare che la maggior parte degli autori non avvessero a fatto apprezzata la vera essenza della teoria stessa.*[10]

[10]tales limitaciones las consideré siempre consecuencia sólo de la manera extrañamente incongruente, y alguna vez sin duda ilógica, con la cual la teoría de las dimensiones se presentaba en los tratados del siglo pasado, a menudo

En el siguiente periodo añade:

una teoria che si propone di penetrare l'indole fondamentale di tutte le grandezze della fisica non puo venire costruita utilmente ne come capitolo preventivo ne come capitolo riassuntivo; ma deve invece spontanemente sorgere e svolgersi incorporata nello sviluppo sistematico de la fisica stessa.[11]

Esta afirmación, contraria a toda sugerencia de la moderna epistemología, y el mito de las *constantes universales*, arrastraron al nombrado autor, y maestro mío, muy lejos de lo que debía ser una sistematización lógica de la teoría de las dimensiones y, por lo tanto, al fracaso.

Sobre la necesidad de una sistematización del "análisis dimensional" como "álgebra de las magnitudes"

La importancia de una sistematización lógica del llamado *análisis dimensional* o, más bien, la necesidad de la misma sistematización, ha sido puesta en evidencia, ya desde el año 1920, por el físico Bridgman en el prólogo de su *Dimensional Analysis*:

La aplicación creciente de los métodos del "análisis dimensional" en la física técnica y su importancia para las investigaciones teóricas hacen desear que todo físico domine este método de investigación. Pero ninguna obra contiene una representación sistemática de sus fundamentos.

Quizás se piense que la tarea es tan sencilla que cualquier representación sistemática está de más. Existen, sin embargo, grandes

de manera tal de dejar incluso dudar que la mayor parte de los autores no hubieran de hecho apreciado la verdadera esencia de la teoría misma.

[11]una teoría que se propone penetrar en la índole fundamental de todas las magnitudes de la física no se puede construir en forma útil, ni como capítulo introductorio ni como capítulo resumen; sino que debe en vez aparecer espontáneamente y desarrollarse incorporada en el desarrollo sistemático de la física misma.

malentendidos con respecto al carácter fundamental del método y a los detalles de su aplicación. Estos malentendidos están tan difundidos y han influenciado tan esencialmente numerosas investigaciones -lo que se demostrará en ejemplos ilustrativos- que juzgué de gran utilidad aclararlos.

Pero el mismo autor, en el año de 1931, tenía que aclarar cuanto sigue:

A pesar de que mi representación me parecía clara y convincente, he notado con asombro que, desde la aparición de la primera edición hasta la fecha, se han producido divergencias de opiniones en cuestiones de principios que demostrarían que el tema no está todavía alejado del dominio de las controversias.

Si ahora nos preguntamos si la situación ha cambiado, parece que hay que contestar con un NO muy claramente. En efecto, si queremos darnos cuenta de la situación de hoy en día tendríamos que hojear las publicaciones que tratan de este argumento, y entonces nos encontraríamos, por ejemplo, con el tratado de Esnault–Pelterie [**J**] *L'Analyse Dimensionelle*, en donde en el *Avertissement* (Prefacio) podemos leer:

Le résultat de mes investigations fut plutot décevant; la plupart des auteurs ne présentait que des applications, ou des passages épisodiques baclés; un seul ouvrage, celui de Bridgman offrait un ensemble ordonné, tout a moins quant aux titres des châpitres, car à l'interieur de ceux–ci la pensée de l'auteur est bien difficile a suivre au long de dissertations sans sous–titres ni coupures, alors que quelques formules en diraient beacoup plus long en épargnant au lecteur bien des peine ··· à condition d'être exactes.

··· Il semblait si difficile de mettre au clair un sujet obscurci par tant d'auteurs qu'il me parut desirable d'établir une première rédaction que je présentarais en une publication restreinte et provisoire, ainsi fut fait en septembre 1945, a une centaine d'exemplaires dactylographiés. Cette idée se révéla fructueuse ···.[12]

[12]El resultado de mis investigaciones fue más bien decepcionante; la mayor

Después de haber introducido altisonantes neologismos,[13] exocosmos, como el mundo exterior o físico; fantocosmos, como el mundo interior o conciencia –reflejo del exocosmos en nosotros mismos a través del intermediario fundamental de nuestros sentidos; noocosmos, como uno de los mundos abstractos en los cuales se desarrollan las imágenes mentales por cuyo intermedio hacemos presa, analítica, sobre el fantocosmos, el autor pasa a la redacción de aquella que habría debido ser una reconstrucción del análisis dimensional –rama reconocida por todos como fundamental, el autor habla de *grandeurs de même espèce* (magnitudes de la misma naturaleza) haciendo resaltar *ce qu'on omet genéralment de preciser* (lo que generalmente se deja de precisar). Pero no nos dice si la idea citada tiene que tomarse como primitiva o derivada, y en resumen no sabemos qué significa. En la misma página se puede leer:

Addition des longueurs – Opération primitive:

a. *Nous materialisons les longueurs a additioner (par example sous la forme de calibres Johanssen) et nous en collons deux bout a bout (operation e – p – cosmique) sous l'hypothese d'indé-formabilité.*[14]

parte de los autores no presentaban sino aplicaciones, o bien pasajes episódicos descuidados; una sola obra, la de Bridgman, ofrecía un conjunto ordenado, por lo menos en cuanto a los títulos de los capítulos, pues en el interior de éstos el pensamiento del autor es bien difícil de seguir a lo largo de disertaciones sin subtítulos ni cortes, mientras que algunas fórmulas podrían decir más, ahorrándole al lector muchos sufrimientos ··· bajo la condición de que fuesen exactas.

··· parecía tan difícil poner en claro un tema oscurecido por tantos autores que me pareció deseable establecer una primera redacción que presentaría en una publicación restringida y provisional; así se hizo en septiembre de 1945, con un centenar de ejemplares dactilografiados. Esta idea probó ser fructífera ···.

[13]No soy yo quien niegue la necesidad de introducir neologismos bajo el empuje de determinadas condiciones

[14]Suma de longitudes – Operación primitiva: **a.** Materializamos las longitudes que deben ser sumadas (por ejemplo, bajo la forma de calibres de Johanssen) y pegamos dos de ellas extremo a extremo (operación e–f–cósmica) bajo la hipótesis de la indeformabilidad.

Aparte del chocante *nous materialison* (materializamos), nos preguntamos si la hipótesis de indeformabilidad hace o no indeformables a los calibres Johanssen. Y si no, ¿para qué la hipótesis? Y, qué decir de la definición de *magnitudes directamente medibles*:

> ··· *nous appellerons grandeurs directement mesurables celles pour lesquelles nous savons construire et pouvons comparer des étalons materialisés sans qu'aucune grandeur d'espece differente intervienne, ni dans la definition des étalons, ni dans l'operation e – p – cosmique de division que comporte une mesure,*[15]

definición que el autor enuncia para demostrar, ilusoriamente, que sólo la longitud, la duración y la masa son magnitudes directamente medibles.

Y qué decir de la siguiente explicación:

> *Considerons en effet deux grandeurs de même dimension et de 'nature physique' différent: par example un travail T et le moment M d'une force. Tous deux sont, dans notre système usuel de dimensions lndrmi et, pourtant, nous ne voyons nullement de quelle égalité exocosmique l'équation $T = M$ pourrait etre l'image, non plus que l'entité physique que représenterait la somme $T + M$. Ce que est physiquement égal a un travail c'est le produit d'un moment par un angle (denué de dimensions); si A est cet angle l'égalité $T = M$ revet, elle, un sens e – p – cosmique.*[16]

[15]... llamaremos magnitudes directamente medibles aquellas para las cuales sabemos construir y podemos comparar patrones materializados sin que ninguna magnitud de especie diferente intervenga, ni en la definición de los patrones ni en la operación e–f–cósmica de división que comporta una medida.

[16]Consideremos, en efecto, dos magnitudes de la misma dimensión y de "naturaleza física" diferente: por ejemplo, un trabajo T y el momento M de una fuerza. Las dos están, en nuestro sistema usual de dimensiones, ln dr mi, y, sin embargo, no vemos en modo alguno de qué entidad física exocósmica la ecuación $T = M$ podría ser imagen, no más que la entidad física $T + M$. Lo que es físicamente igual a un trabajo es el producto de un momento por un ángulo (desprovisto de dimensiones); si A es este ángulo, la igualdad $T = M$ reviste, ella sí, un sentido e–f–cósmico.

¿En dónde ha demostrado el autor que el ángulo no tiene dimensiones? Y, ¿cómo es que tan ilustre *e - p - cosmicién* (ilustre pensador e–f cósmico) acepta, sin previa discusión, considerar los ángulos como *denué de dimensions* (carentes de dimensiones)?

Sería demasiado largo y tedioso continuar en la crítica de este trabajo; como conclusión basta pensar que de 226 páginas, las primeras 176 están dedicadas, en fin de cuenta, a la enunciación y demostración de la proposición de Buckingham [**12**] (que sería tan sencillo tomar como propiedad primitiva de las *funciones físicas*), y las últimas 16 como apéndice, en donde arremete contra los *sistemas de unidades naturales* de Planck [**K**] y las investigaciones de Lewis y Campbell, en total quedan 40 páginas dedicadas al análisis dimensional. Continuando con la necesidad de una sistematización del *análisis dimensional*, no me parece fuera de lugar recordar las palabras del profesor Bingen en el prefacio de la obra de M. Landolt *Grandeur, Mesure et Unité*:

S'il est un probleme fondamental, auquel il n'a pas été attribué l'importance primordialle qu'il mérite c'est bien celui de la mesure des grandeurs et des unités de mesure de ces grandeurs.

Ce probleme comporte d'une part la nécessité de la recherche et de la definition des grandeurs, c'est a dire des existant physiques se révélant aux sens humains et susceptibles d'être exploités indirectment ou directment et d'autre part la nécessité de la science du dénombrement.[17]

Y si es verdad que en la obra nombrada se resuelve el problema de:

condenser en un theorie uniqué coherente les regles du calcul des grandeurs, (calcul) né empiriquement de la pratique de la mesure

[17]Si existe un problema fundamental al cual no se le ha atribuido la importancia primordial que merece es aquel de la medida de las magnitudes y de las unidades de medida de esas magnitudes.

Este problema comporta, de una parte, la necesidad de la investigación y de la definición de las magnitudes, es decir, de los existentes físicos que se revelan a los sentidos humanos y que son susceptibles de ser explotados indirecta o directamente y, por otra parte, la necesidad de la ciencia de la enumeración.

des grandeurs directement accesibles a une serie numérique de juxtapositions sucessives d'un étalon matériel.[18]

también es verdad que no se pone sobre bases lógicas el entero edificio de la física. En efecto, el autor en su *Avant propos* (Prólogo) escribe:

Les lois du calcul de l'aritmetique son valables pour les applications pratiques, les 'grandeurs' que l'on rencontre peuvent être des nombres purs, mais sont bien plus souvent des nombres concrets ou affectés de dimensions. Ainsi l'on trouve des longueurs exprimées en métres, des puissances mesurées en chevaux-vapeur.[19]

En la segunda proposición de este periodo hay bastante como para no dejar rastro de una posible teoría de las magnitudes, aunque en el periodo que sigue se afirma que:

On opére frequentment sur les symboles d'unités de la même maniére que sur les symboles de nombres généralises; personne ne conteste d'ailleurs qu'il ne faut additioner que des grandeurs de meme dimension. Il est vrai que de temps en temps, certains auteurs continuent a soutenir le point de vue que les symboles litteraux ne peuvent représenter que des nombres purs, puisque les opérations sont définies uniquement pour ces nombres. Mais, d'autre part, ces auteurs n'hésitent pas a controler l'exactitude d'une formule en y remplaçant les symboles littéraux par les unités correspondantes et en vérifiant ainsi l'homogénéite.[20]

---

[18]condensar en una teoría única coherente las reglas del cálculo de las magnitudes, cálculo nacido empíricamente de la práctica de la medida de las magnitudes directamente accesibles a una serie numérica de juxtaposiciones sucesivas de un patrón material,

[19]Las leyes del cálculo de la aritmética son válidas para aplicaciones prácticas; las "magnitudes" que uno encuentra pueden ser números puros, pero son mucho más frecuentemente números concretos o afectados de dimensión. Así uno encuentra longitudes expresadas en metros, potencias medidas en caballos de vapor.

[20]Se opera frecuentemente sobre los símbolos de las unidades de la misma manera que sobre los símbolos de los números generalizados; nadie discute que

En esta cita se pone en evidencia una manera, muy común entre los físicos, de pensar y de actuar verdaderamente contradictoria. Creemos interesante para tal objeto, comparar el texto anterior con el de Straneo, *Teoria generalizata delle dimensioni delle grandezze fisiche*:

$\cdots$ Quantunque le relazioni che possiamo concepire fra grandezze fisiche si riducano sempre in ultima analisi a relazioni fra le loro misure, noi ci siamo abituati a parlare, invero assai impropiamente, di funzioni di grandezze fisiche, a persino a indicare la legge generica di un fenomeno, in cui intervengono le grandezze $G, \cdots, G_n$, nella forma $f(G, \cdots, g_n) = 0$. Effettivamente noi non possiamo operare, funzionalmente, che con numeri, quindi l'equazione precedente non ha un preciso senso matematico se gli argomenti sotto il segno di funzione non sono in ultima analisi numeri puri. Formalmente, l'ostacolo si protrebbe eliminare convendo (?) di considerare le G non come le grandezze, ma come le loro misure, ma sussisterebbe sempre ancora una difficoltà di indole fisica.

L'equazione (9)(?) esprimerebbe in generale una legge no indipendente dalla scelta delle unità impiegate per la misura delle grandezze fondamentali $F, \cdots, F_+$ con le quali si esprimono le G; essa non protrebbe quindi venir considerate una corretta espressione di una eventuale legge fisica.[21]

---

se deban sumar magnitudes de misma dimensión. Es cierto que de vez en cuando ciertos autores siguen sosteniendo el punto de vista de que los símbolos literales no pueden representar sino números puros, puesto que las operaciones están definidas únicamente para estos números. Pero, por otra parte, estos autores no vacilan en controlar la exactitud de una fórmula reemplazando en ella los símbolos literales por las unidades correspondientes y verificando así la homogeneidad.

[21] $\cdots$ Aun cuando las relaciones que podemos concebir entre magnitudes físicas se reduzcan a un análisis de relaciones entre sus mediciones, nos hemos acostumbrado a hablar, realmente en forma demasiado inapropiada, de funciones de magnitudes físicas, e incluso a indicar las leyes genéricas de un fenómeno en el cual intervienen las magnitudes $G, \cdots, G_n$, en la forma $f(G, \cdots, G_n) = 0$. En efecto, podemos operar, funcionalmente, sólo con números, por lo tanto la ecuación anterior no tiene un sentido matemático preciso si los argumentos bajo el signo de la función no son números puros.

Y con el siguiente texto de Bridgman, *Dimensional Analysis*:

> *El resultado de ese análisis dimensional de ninguna manera limita la función misma mediante la cual podemos representar nuestros resultados de medida, sino que da sólo una limitación para la forma de los argumentos.*

Por complicada que sea la función, si ella cumple con los postulados fundamentales de la teoría anteriormente desarrollada, es posible ordenar los términos de tal manera que ésta se exprese como función de argumentos sin dimensión.

En la mayoría de los casos queremos representar una de las magnitudes en función de las otras. Para este fin resolvemos la función según el producto sin dimensión en el cual se presenta la variable y multiplicamos después ese producto (y naturalmente también el otro miembro de la ecuación) por las recíprocas de las demás magnitudes contenidas en él. Entonces, la variable buscada queda sólo en el primer miembro, y el segundo miembro es un producto de determinadas potencias de las otras magnitudes y de una función arbitraria de los restantes productos sin dimensión. Esa función arbitraria puede ser trascendente, a lo sumo para ella no existe ni la más mínima limitación, pero sus argumentos no tienen dimensión. Esto corresponde también a la experiencia común, se espera que el argumento de una función trascendente quede sin dimensión. Esto se expresa ordinariamente diciendo que no tendría sentido formar, por ejemplo, el seno hiperbólico de un tiempo, puesto que sólo se puede formar el seno hiperbólico de un número. Esta observación de que los argumentos de las funciones del tipo 'seno hiperbólico', que se presentan en nuestras investigaciones, ordinariamente no tienen dimensión es verdadera, la razón dada para esto, no lo es.

Formalmente, el obstáculo se podría eliminar si se está de acuerdo en considerar los G, no como las magnitudes, sino que como sus medidas, pero todavía subsistiría una dificultad de carácter físico.

La ecuación (9) expresaría en general una ley no independiente de la elección de las unidades empleadas para la medición de las magnitudes fundamentales $F, \cdots, F_{+}$ con las cuales se expresan las G; por lo tanto no se podría considerar como una expresión correcta de una eventual ley física.

No podemos comprender por qué no se puede formar el seno hiperbólico del número que mide una determinada duración de tiempo en horas como el del número que indica las manzanas en un canasto. Ambas operaciones son igualmente posibles. Pero las limitaciones impuestas por el teorema (el postulado de Vaschy–Buckingham) son tales que raras veces vemos escrito el seno hiperbólico de una magnitud dimensional, y si así fuese, podríamos combinar los términos de tal manera que en el seno hiperbólico aparezca una magnitud sin dimensión.

Así, por ejemplo, nada impide escribir la ecuación del cuerpo en caída libre en la forma siguiente: $\sinh v = \sinh(gt)$, pero nadie tendrá tal idea, porque esa forma es más complicada que la ordinaria. La ecuación también se podría escribir así:

$$\sinh v \cosh(g\,t) - \cosh v \sinh(v\,t) = 0\,,$$

y ahora no se ve tan fácilmente cómo se puede hacer desaparecer la función trascendente, máxime si nos hemos olvidado de las fórmulas trigonométricas. Pero también la última fórmula es perfectamente válida para el cálculo numérico, en cuanto ella da siempre un resultado exacto y permanece también válida si se cambian las magnitudes de las unidades fundamentales de cualquier manera.

Podemos agregar aquí algunas anotaciones sobre los exponentes de potencias. Es claro que en general un exponente no tendrá dimensión; si no fuera así, se podría combinar con otros exponentes de tal manera que no se presente dimensión. Pero no existe la más mínima limitación para el valor numérico. Este puede ser un número entero, fraccionario o irracional. Se cree a menudo que en la fórmula dimensional apropiada de una magnitud no deberían presentarse potencias fraccionarias de la magnitud fundamental.

Thompson [**3**], en su *Elementary Lessons in Electricity and Magnetism*, afirma que:

> *Parece también absurdo que las dimensiones de una unidad eléctrica deban contener potencias fraccionarias, pues magnitudes como m y l son insensatas.*

Y Williams [**4**], en un artículo del *Philosophical Magazine*, 1892:

Si debemos considerar a ln, dr, mi, como unidades fundamentales, no podemos esperar que se presenten potencias fraccionarias. Ahora, todos los conceptos dinámicos en última esencia están construídos con esas tres ideas: masa, longitud, tiempo, y siendo el procedimiento sintético, formándose lo compuesto de lo simple, de acuerdo con las reglas fundamentales del álgebra, todo se expresará por potencias enteras de ln, dr, mi.

Si masa, longitud y tiempo, deben ser conceptos últimos de la física, entonces no podemos reducir a algo más simple los conceptos correspondientes.

Por eso, según toda la teoría física, tendría que ser imposible dar significado a fórmulas con potencias fraccionarias de las unidades fundamentales.

Se suele creer que la fórmula dimensional es una expresión de operaciones efectuadas sobre objetos físicos concretos, y por eso parece difícil atribuir, por ejemplo, sentido a la potencia dos tercios de un tiempo. A mí me parece igualmente difícil atribuir, por ejemplo, sentido físico al cuadrado de un tiempo, sin embargo, la posibilidad de tales exponentes se acepta en forma general.

Como es dable ver, Bridgman está urgido por problemas. Así, cuando quiere resolver el problema de Kepler, es decir, encontrar la relación que liga Pr a Pt a $S1$ y a Ds, siendo Pt y $S1$ dos masas (planeta y sol) a la distancia (constante) Ds y Pr el periodo de revolución de Pt alrededor de $S1$ *se hace sugerir por un criterio imaginario*:

Usted no ha mencionado todo aquello de lo cual depende el resultado: ha olvidado la constante de gravitación puesto que con las variables solamente no se encuentra la fórmula (de Kepler) que ha sido ya comprobada por observaciones astronómicas.

Llegado a este punto dice Bridgman:

Por eso el resultado ha dado razón a nuestro crítico: hubieramos debido incluir de antemano la constante de gravitación en nuestra *lista primitiva (la lista de las variables Pr, Pt, $S1$, Ds). Sin embargo, no nos sentimos libres de un cierto desagrado, pues no vemos por qué nuestras objeción (de que Pr, Pt, $S1$, Ds, son todas las magnitudes de las cuales depende el fenómeno) era falsa, y además nos molesta la predicción de que se presentara quizás en el desarrollo una constante dimensional, en la cual no habíamos pensado, y que no exige tan imperiosamente que sea tenida en cuenta, como sucede con la constante de gravitación en nuestro ejemplo.*

Tenemos que conseguir, en tal caso, una respuesta falsa, lo cual no percibimos antes de que se derrumbe el castillo de naipes.

Y más allá, cuando presenta el problema de Boussinesq, es decir: *encontrar la relación que liga entre sí a Fc, Ln, $V1$, Tm, Cv, Ct, en donde Ln es el radio (para fijar las ideas) de una esfera sólida sumergida en un líquido cuya velocidad lejos de la misma es $V1$, cuya capacidad térmica volumétrica (y no másica) es Cv, cuya conductividad térmica es Ct, siendo Tm (positiva y constante) la diferencia entre la temperatura de la esfera y la del líquido (lejos de la esfera) y en donde, por fin, Fc es el flujo calórico (gradiente calorimétrico) de la esfera hacia el líquido*, resuelto a la manera de Lord Rayleigh (es decir, con el análisis dimensional), presentando al mismo tiempo la polémica surgida entre Lord Rayleigh y Riabouchinsky (Nature, 1915), cierra la misma afirmando:

Creo que esta respuesta de Lord Rayleigh (que considera el problema estudiado por Raibouchinski como perteneciente más al dominio de la lógica que al de las aplicaciones del análisis dimensional (principio de la semejanza)) nos puede dejar fríos. Naturalmente no dudamos de que Lord Rayleigh obtiene un resultado exacto si aplica los métodos del análisis dimensional; pero, ¿es menester que nosotros tengamos la experiencia física y la intuición de un Lord Rayleigh, para encontrar también algo exacto?

¿No podría habilitarnos una pequeña investigación de los fundamentos lógicos del método del análisis dimensional, para decirnos si temperatura y (cantidad de) calor son 'realmente' unidades independientes o no, y cómo se deben elegir correctamente las unidades fundamentales?

Uno de los problemas que atormenta a Bridgman, y que él mismo expresa en forma de pregunta al finalizar la introducción, es el siguiente:

¿Cuándo se presentan constantes dimensionales, y en qué forma?

Pero parece que la única contestación que él mismo encuentra es la siguiente:

··· *Ahora, en un caso concreto nos interesa sólo el problema físico y las relaciones entre las magnitudes físicamente variables. Tenemos que considerar por esto a las constantes dimensionales como un mal que únicamente puede ser tolerado en cuanto hacen posible aclaraciones más detalladas sobre las variables físicas.*

A la pregunta: ¿qué papel juegan las constantes (universales o no) en la física?, contestaremos más adelante. Ahora queremos añadir lo que sigue, en cuanto se refiere a la idea expresada, como vimos, por algunos físicos representativos, y que puede condensarse en la siguiente proposición:

Noi non possiamo operare funzionalmente che con numeri.[22]

Empezamos con recordar, sin dejarnos arrastrar demasiado lejos, la fundamental contribución aportada por la escuela inglesa a la comprensión del álgebra en tanto que álgebra, es decir, en tanto que desarrollo abstracto de las consecuencias de un sistema de postulados sin presuponer necesariamente ninguna interpretación o aplicación a los números o a cualquier otra cosa. Y continuamos recordando que dicha renovación de la concepción del álgebra comienza con los *reformadores* ingleses: Peacock, Henschel, De Morgan [**L**], Babbage [**M**], Gregory, Boole [**N**], y más precisamente con la publicación de la que entonces fue considerada como una herejía, nos referimos al *Tratado de Álgebra* [**13**], del citado Peacock, publicado en 1830, tratado en donde de una vez por todas se rompe con la

[22]Podemos operar funcionalmente sólo con números.

superstición de que x, y, z, en relaciones tales como $x+y=y+x$, $x(y+z)=(xy)+(xz)$, deben representar, necesariamente, números.

El olvido de esta renovación del álgebra, que proporcionó a Boole la posibilidad de distinguir entre los símbolos de las operaciones y los objetos sobre los cuales operan, induciéndolo de esta manera al estudio de las propiedades de las operaciones y no de los objetos; el olvido de esta reforma que permitió al álgebra, como sistema abstracto, de desligarse de la aritmética y volverse entonces capaz de progresar hasta las variantes modernas imaginadas por los Hamilton, los Grassmann [**O**], los Peano [**P**], y sobre cuya importancia esencial no hay que insistir; el olvido de este progreso hacia un tipo superior de abstracción que culmina hoy en la definición de *sistema formal* de Curry [**Q**].[23] Este olvido es tal vez lo que permitió y permite todavía a muchos físicos afirmar que *podemos operar funcionalmente sólo con números.*

Notas

A. Joseph Fourier (1768–1830). Matemático francés que ejerció una fuerte influencia en la física matemática a través de su *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822). Mostró cómo la conducción del calor en cuerpos sólidos puede ser analizada en términos de series matemáticas infinitas, ahora llamadas por su nombre Series de Fourier.

B. Giovanni Giorgi (1871–1950). Físico italiano quien propuso un sistema ampliamente usado para la definición de unidades de medida eléctricas, magnéticas y mecánicas.

C. Isaac Newton (1642–1727). Físico y matemático inglés que fue la figura culminante de la revolución científica del siglo XVII. En óptica, su descubrimiento de la composición de la luz blanca integró los fenómenos de los colores en la ciencia de la luz y dió los fundamentos de la óptica física moderna. En

[23]Véase, por ejemplo, del mismo, sus *Leçons de Logique Algebrique* [**14**].

mecánica, sus tres leyes del movimiento, los principios básicos de la física moderna, resultaron en la formulación de la ley de gravitación universal. En matemática, fue el descubridor del cálculo infinitesimal.

D. William Froude (1810–1879). Ingeniero y arquitecto naval inglés que influenció el diseño de barcos al desarrollar un método para estudiar modelos a escala impulsados a través del agua y aplicar la infomación obtenida de este modo a barcos de tamaño real. Descubrió las leyes por las cuales el rendimiento del modelo se puede extrapolar al barco cuando ambos tienen la misma forma geométrica. Posteriormente, una técnica similar fue usada por los pioneros de la termodinámica.

E. Gustave Eiffel (1832–1923). Ingeniero civil francés famoso por la torre en Paris que lleva su nombre. También se interesó en problemas de aerodinámica y usó la torre para varios experimentos.

F. Percy Williams Bridgman (1882–1961). Físico experimentalista norteamericano, famoso por sus estudios de materiales a altas temperaturas y presiones. Por su trabajo se le otorgó el Premio Nobel en 1946.

G. Joseph Bertrand (1822–1900). Matemático y educador francés recordado por sus elegantes aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a la mecánica analítica, particularmente en termodinámica, y por su trabajo en probabilidad estadística y en la teoría de curvas y superficies.

H. Lord Rayleigh (1842–1919). Científico inglés que hizo descubrimientos fundamentales en los campos de la acústica y de la óptica y que son básicos para la teoría de propagación de ondas en fluidos. Recibio el Premio Nobel en 1904 por la separación del argón, un gas atmosférico inerte.

I. Richard Tolman (1881–1948). Físico–químico norteamericano que demostró que el electrón era una partícula portadora de carga en el flujo de electricidad en metales y determinó su masa.

J. Robert Esnault–Pelterie (1881–1957). Pionero francés de la aviación que en Europa hizo importantes contribuciones en los comienzos de los vuelos de objetos más pesados que el aire.

K. Max Planck (1858–1947). Físico teórico que originó la mecánica cuántica y que ganó el Premio Nobel de Física en 1918. Planck hizo varias contribuciones a la física teórica, pero su fama reposa principalmente en su rol como originador de la mecánica cuántica.

L. Augustus De Morgan (1806–1871). Matemático y lógico inglés cuyas mayores contribuciones al estudio de la lógica incluyen la formulación de las leyes de De Morgan y el trabajo que lleva al desarrollo de la teoría de relaciones y al origen de la lógica (o matemática) simbólica moderna.

M. Charles Babbage (1791–1871). Matemático e inventor inglés a quien se le acredita el haber concebido el primer computador digital automático.

N. George Boole (1815–1864). Matemático inglés que ayudó a establecer la lógica simbólica moderna y cuya álgebra de la lógica, ahora llamada álgebra Booleana, es básica en el diseño de circuitos para computadores digitales.

O. Hermann Günther Grassmann (1809–1877). Matemático alemán recordado principalmente por su desarrollo de un cálculo general de vectores en *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (1844).

P. Giuseppe Peano (1858–1932). Matemático italiano y uno de los fundadores de la lógica simbólica cuyos intereses se centraron en los fundamentos de las matemáticas y en el desarrollo de un lenguaje lógico formal.

Q. Haskel Brooks Curry (1900–1982). Matemático y educador norteamericano cuya investigación en lógica llevó a su teoría de sistemas y procesos formales como también a la formulación de un cálculo lógico usando reglas de inferencia.

Bibliografía

1. J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, (Firmin Didot, Paris, 1822).

2. G. Giorgi, *Sistemi e unità di misura, Enciclopedia delle matematiche Elementari* (Milano, 1947).

3. S. P. Thompson, *Elementary Lessons in Electricity and Magnetism* (MacMillan, New York, 1899).

4. W. Williams, *On the relations of the dimension of physical quantities to the directions in space*, Philosophical Magazine London, Series 5 **34**, 208 (1892).

5. I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687).

6. P. W. Bridgman, *Dimensional Analysis* (Yale University Press, New Haven, 1922).

7. P. Straneo, *Teoria generalizata delle dimensioni delle grandezze fisiche, Enciclopedia delle Matematiche Elementari* (Milano, 1947).

8. F. Bauer, *La mesure des grandeurs, dimensions et unités* (Hermann, Paris).

9. Lord Rayleigh, *The Principle of Similitude*, Nature **95**, 66 (1915).

10. D. Riabouchinsky, *Letters to Editor*, Nature **95**, 591 (1915).

11. Lord Rayleigh, *Letters to Editor*, Nature **95**, 644 (1915).

12. E. Buckingham, Phys. Rev. **4**, 345 (1914); Nature **96**, 208 (1915).

13. G. Peacock, *Treatise on Algebra* (Cambridge, 1830).

14. H. B. Curry, *Leçons de Logique Algébrique* (Gauthier–Villars, Paris, 1952).