

## DIBUJO A MANO DE LAS FIGURAS DE LISSAJOUS

C. Camargo y H. Leal

*Departamento de Física  
Universidad Nacional de Colombia  
Bogotá, Colombia*

### Resumen

La lectura de la *Memoria sobre la composición óptica de movimientos vibratorios*, de J. Lissajous, escrita en 1857 [1], nos sugiere una interesante experiencia didáctica, y nos hace reflexionar sobre la importancia de los métodos visuales y los ejercicios gráficos en la enseñanza de la física. Se presenta un resumen de la memoria subrayando estos aspectos, y se describe detalladamente una cuadrícula diseñada por Lissajous para el dibujo a mano de las figuras y su análisis geométrico.

### 1. Introducción

Si hacemos corresponder la trayectoria de un movimiento armónico simple con el diámetro de una circunferencia y dividimos ésta en partes iguales, las proyecciones de éstas divisiones sobre el diámetro lo dividen en partes desiguales. El móvil que realiza el movimiento armónico simple recorre estas partes desiguales en tiempos iguales. Un segundo móvil con una frecuencia doble del primero recorrerá dos de estas partes mientras el primero recorre una. En general, si la relación entre las frecuencias de dos móviles es  $n : m$ , donde  $n$  y  $m$  son enteros, el primero avanza  $n$  pasos mientras que el segundo avanza  $m$ .

El propósito de la actividad que se sugiere es lograr que los estudiantes se apropien de esta idea mediante su aplicación en el dibujo a mano de las figuras.

Inicialmente se hace una descripción del origen de este método y de algunas experiencias que presenta Lissajous en su memoria, con el fin de contextualizar la actividad que se propone.

La idea de desarrollar esta actividad surgió de la lectura del texto original de Lissajous y se presenta como un ejemplo de cómo el estudio del desarrollo histórico de la física permite la recuperación de las preguntas y problemas que dieron origen a la teoría, lo que contribuye a un aprendizaje significativo.

## 2. Origen del Método

Lissajous relata que el motivo que le indujo a desarrollar un método para visualizar los movimientos vibratorios y analizar sus composiciones fue tratar de hacer sus clases más atractivas. Pudo haber estado influido también por el desarrollo de aparatos que buscaban crear la ilusión de movimiento, ya que comenta:

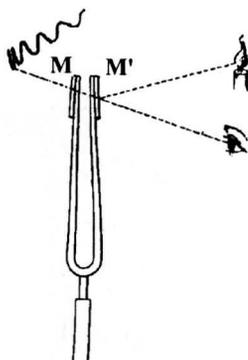
*Este método se basa en la persistencia de las sensaciones visuales, y la composición de dos o más vibraciones simultáneas permite, sin la ayuda del oído, el estudio de toda clase de movimientos vibratorios, y consecuentemente de toda clase de sonido.*

*Llegué a concebir este método por el deseo de hacer visible el movimiento vibratorio a una amplia audiencia. Emocionado por la ventaja ofrecida, para la enseñanza de la acústica, por el uso de los métodos de proyección, de los que Paul Desains ha hecho tanto uso en su curso de Física en la Facultad de Ciencias de Paris, he querido tratar de hacer visible el movimiento oscilatorio de los cuerpos vibrantes, sin recurrir al trazado mecánico de la vibración.*

## 3. Experiencias sobre Composición Óptica de Movimientos Vibratorios

En una primera experiencia Lissajous coloca un espejo en una de las ramas de un diapasón y un contrapeso en la otra rama, figura 1. Al observar en el espejo la imagen de una llama, se observa que se alarga en la dirección de la vibración, y , cuando se hace girar

el diapasón sobre su eje, se percibe una curva sinusoidal. Ya que el barrido generado por el giro del diapasón no es uniforme, la curva que se visualiza parece modulada horizontalmente.



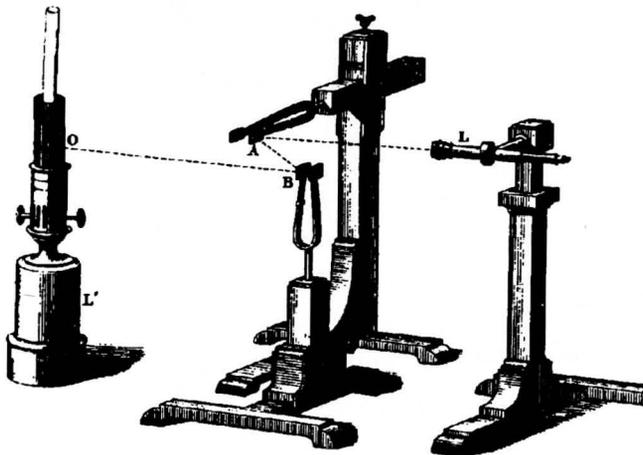
**Figura 1.** Visualización del movimiento vibratorio; figura tomada de [1].

En una segunda experiencia Lissajous logra lo que llama “composición óptica” de dos movimientos vibratorios en direcciones perpendiculares. Tal como se muestra en la figura 2, coloca dos diapasones en direcciones mutuamente perpendiculares, a cada uno de los cuales ha pegado un espejito en una de las ramas. El haz de luz, proveniente de O, es reflejado doblemente y es observado con ayuda del telescopio L.

Si se hace vibrar el diapasón A, la imagen oscila rápidamente en la dirección horizontal y aparece como una línea luminosa horizontal; si se hace vibrar solo el diapasón B, la imagen se elonga en la dirección vertical. Pero si los dos diapasones vibran al mismo tiempo, la imagen adopta un movimiento complejo, debido a la combinación de los dos movimientos; traza en el espacio una curva más o menos complicada, cuya forma depende de la relación entre el número de vibraciones ejecutadas por unidad de tiempo por cada uno de los diapasones. Si la relación de frecuencias es 1:1, la figura es una elipse.

Cuando la relación de frecuencias es 1:2, 1:3, 2:3, etc., las figuras son más complejas pero serán curvas cerradas y estáticas si

la relación de frecuencias es exacta, o girarán lentamente si hay una ligera discrepancia. Cuando ha girado una vez, uno de los diapasones ha realizado exactamente una vibración más que la que le correspondería si la relación de frecuencias fuera exactamente  $n/m$  ( $n$ , y  $m$ : números enteros pequeños).



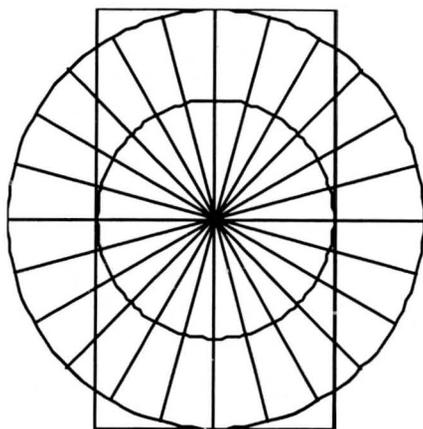
**Figura 2.** Composición óptica de movimientos vibratorios.

Es posible reconocer la relación de frecuencias en una curva cualquiera por el número de picos situados sobre los lados de un rectángulo circunscrito cuyas dimensiones sean exactamente las amplitudes de las oscilaciones vertical y horizontal, figura 7. Contando el número de picos en la parte superior o inferior,  $n$ , y el número de picos sobre uno de los lados verticales,  $m$ , estos dos números son el numerador y el denominador de la fracción que expresa la relación de las dos frecuencias. El numerador corresponde al diapason vertical, y el denominador al horizontal.

#### 4. Cuadrícula para el Dibujo a Mano de las Figuras de Lissajous

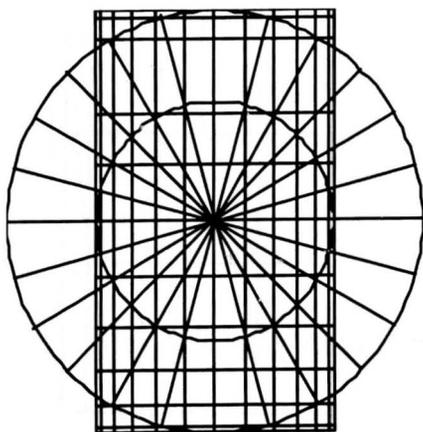
Lissajous incluyó en su artículo el diseño de un dispositivo para facilitar el dibujo de las curvas. Se trataba de una plancha metálica

que mandó hacer a un grabador profesional de la siguiente manera: Se dibujan primero dos círculos concéntricos y se divide cada cuadrante en partes iguales, por ejemplo 6. Luego se inscribe un rectángulo cuyos lados paralelos son respectivamente tangentes a uno y otro círculo, como se muestra en la figura 3.



**Figura 3.** Primer paso en la construcción de la plantilla.

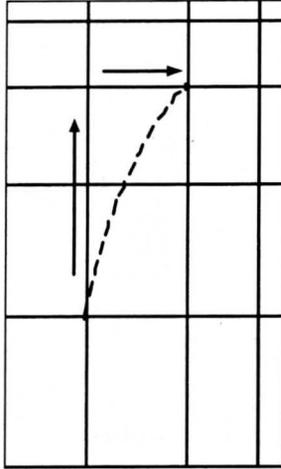
Ahora se trazan líneas paralelas que toquen las divisiones iguales de las circunferencias y se prolonguen fuera de los círculos hasta llenar el rectángulo, figura 4.



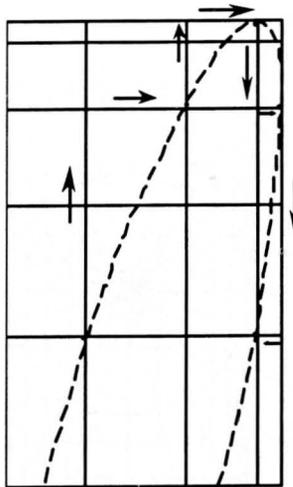
**Figura 4.** Plantilla.

Luego sacó varias copias en papel de este rectángulo cuadrículado. Hoy día podemos limitarnos a hacer un dibujo en papel y tomar fotocopias.

El procedimiento para dibujar las curvas es el siguiente:



**Figura 5.** La frecuencia de la oscilación vertical es el doble que la de la horizontal.

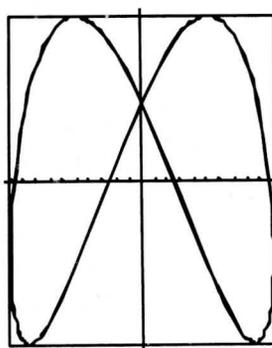


**Figura 6.** Procedimiento para dibujar las figuras.

Supongamos que la oscilación de amplitud mayor (vertical) tiene frecuencia  $f$  y la de amplitud menor (horizontal),  $f/2$ , entonces, partiendo de cualquier punto de la cuadrícula, nos movemos dos unidades en la dirección longitudinal del rectángulo y una en la dirección transversal, y marcamos un segundo punto, figura 5.

Se repite lo anterior, y, si en algún momento se alcanza el borde del rectángulo, la dirección del movimiento se invierte, figura 6.

El proceso se repite hasta alcanzar el punto inicial. Las figuras de Lissajous son curvas cerradas y tangentes a los lados del rectángulo, tal como se mencionó. En el ejemplo anterior, con una relación de frecuencias de 1 a 2, la figura que se obtiene es la que se muestra, figura 7.



**Figura 7.** Figura de Lissajous para relación de frecuencias de 1 a 2.

Para cada relación de frecuencias se tienen diferentes curvas de acuerdo con la relación de fase entre los dos movimientos vibratorios. Para movimientos con  $\phi = 0$ , o completamente fuera de fase,  $\phi = \pi$ , la curva se repliega sobre sí misma y parece una curva abierta.

## 5. Una Experiencia Didáctica

Una interesante y amena actividad en clase es la de dibujar las curvas valiéndose de la cuadrícula y confrontándola con otras experiencias relacionadas con el movimiento armónico simple.

En el curso de física básica para estudiantes de fonología, se desarrolló la siguiente secuencia de actividades relacionadas con el tema de oscilaciones y ondas:

Se comenzó con una práctica sobre cinemática del movimiento armónico simple consistente en dibujar las curvas de posición, velocidad y aceleración contra tiempo, del movimiento de un péndulo simple a partir de la información obtenida con el registrador de tiempo.

Una segunda actividad consistió en una visita al Museo de la ciencia y el juego. Allí se observaron diferentes dispositivos que funcionaban con acople mecánico de dos osciladores perpendiculares entre sí y su trayectoria resultante. Los alumnos jugaron libremente y admiraron los interesantes dibujos que ellos mismos obtuvieron.

Como actividad complementaria a las anteriores se dibujaron a mano diferentes figuras de Lissajous siguiendo el método descrito en el presente trabajo, lo que permitió a los estudiantes hacer un análisis comparativo y comprender los aspectos esenciales del movimiento armónico simple y el concepto de composición de movimientos. Finalmente se realizó la experiencia con señales sinusoidales aplicadas a las placas verticales y horizontales del osciloscopio.

Vale la pena resaltar cómo, de una manera divertida y sin recurrir a formalismos matemáticos, se logra que los estudiantes asimilen los conceptos relacionados con la composición de movimientos oscilatorios.

## Bibliografía

1. J. Lissajous, *Memoire sur l'étude optique des mouvements vibratoires* (1857), reproducido en H. B. Miller, *Acustical Measurements* (Hutchinson Ross, 1982).