# Teoría de Campo Escalar con un Número Indeterminado de Derivadas

**J. Morales** [1 2]

[1] Departamento de Física
Universidad Universidad Nacional de Colombia
Grupo de Campos y Partículas.

[2] Centro Internacional de Física

### Resumen

En este trabajo se presenta la aplicación del método Canónico de Ostrogradski a teorías de campo relativista. Se considera una teoría de campo escalar basada en una densidad Lagrangiana con un número infinito de derivadas. Además se obtienen las corrientes y cargas conservadas provenientes de imponer variaciones arbitrarias en las coordenadas y en los campos, también se obtiene la forma más general posible de los momentos canónicamente conjugados para cualquier grado en el número de derivadas y luego se construye el Hamiltoniano y las diferentes relaciones de conmutación que deben cumplir los campos. Finalmente se muestra que los resultados son consistentes con los obtenidos en teorías sin un gran número de derivadas.

**Palabras clave:** Teoría de Campos, Cuantización Canónica y Altas Derivadas.

### Abstract

I present the application of Ostrogradski Canonical method in relativistic field theories. A scalar field theory based on a Lagrangian density with an infinite number derivatives is considered. I obtain, the currents and conserved charges, when the arbitrary variations in the coordinates and fields are imposed, as well as, the most general form of the canonical conjugated momentums for any order in the derivatives, and the different commutation relations of the fields in the

J. Morales: jmoralesa@unal.edu.co.

Hamiltonian formalins. Finally, it is shown that our results are consistent with those obtained from second order derivatives.

**Keywords:** Field Theory, Canonical Quantization, Higher Derivative.

## 1. Introducción

Las teorías físicas descritas por Lagrangianos con altas derivadas aparecen en distintos escenarios de la física, por ejemplo la Electrodinámica de Podolski [1], otras teorías con muchas derivadas son inevitables en las teorías de cuerdas [2], existen otros muchos ejemplos tales como las teorías efectivas a bajas energías, la gravedad con altas derivadas [5].

Un formalismo canónico para estas teorías fue desarrollado por Ostrogradski [4], aunque su formulación es auto-consistente difiere un poco del formalismo canónico. Es bien conocido que la generalización del principio variacional a una teoría con un número de derivadas no requiere de gran dificultad [7]. Sin embargo, cuando se trata de obtener un formalismo Hamiltoniano canónico desde un Lagrangiano con altas derivadas a partir de un principio de Hamilton y que lleve a ecuaciones de Hamilton de primer orden consistentes con las ecuaciones de Euler-Lagrange, se tiene un cierto grado de confusión [7]. La dificultad radica, en que en estas teorías es necesario tener en cuenta que las velocidades tienen el carácter de variables canónicas independientes, lo cual hace indispensable distinguir entre la coordenada de velocidad independiente y la derivada temporal de una coordenada independiente. Como un resultado de este trabajo se obtuvo una forma completamente general de los diferentes momentos conjugados de todas las coordenadas independientes que puedan aparecer a cualquier orden en las derivadas, y así poder construir el formalismo Hamiltoniano de manera inmediata.

Además, se obtuvo la corriente de Noether [8] al considerar transformaciones sobre las coordenadas y los campos. Este artículo es organizado de la siguiente forma: En la sección 2, se presenta el formalismo básico y se obtienen las ecuaciones de movimiento, la densidad de energía, momentum y momentum angular provenientes de considerar transformaciones infinitesimales bajo el grupo de Poincaré. En la sección 3, se desarrolla el formalismo Hamiltoniano, el cual depende de las derivadas parciales de altos ordenes del campos. En la sección 4, se aplican los resultados de las secciones anteriores al caso de una teoría con dos derivadas del campo, lo cual es muy simple y verifica la validez de estos resultados, por último, se prueba que las ecuaciones de Hamilton conducen a las mismas ecuaciones de movimiento obtenidas a través del formalismo Lagrangiano.

## 2. Ecuación de Movimiento y Cantidades Conservadas a Altos Ordenes en las Derivadas

Es conocido que la teoría de campo, de un campo escalar, es descrita por los campos $\phi^a(x)$, siendo $a = 1, 2, \cdots, n$ el número de campos de la teoría y $x = x_\mu$ con $\mu = 0, 1, 2, 3$ las coordenadas del espacio tiempo. En este caso la cantidad fundamental de interés físico es la acción del sistema $\mathcal{S}$, la cual es definida de la forma

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} d^4x. \tag{1}$$

Para una teoría de campo escalar $\phi(x)$ con $m$ derivadas la densidad Lagrangiana es de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu_1}\phi, \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\phi, \cdots\cdots, \partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_m}\phi). \tag{2}$$

A partir de la acción (2), se obtienen las ecuaciones de movimiento, los momentos canónicamente conjugados, la corriente y carga conservada, para cualquier orden ($m$) en las derivadas que aparecen en la densidad Lagrangiana. Estas cantidades son obtenidas, debido a que la acción debe de ser invariante bajo transformaciones de simetría internas o bajo transformaciones de simetría espacio-tiempo. En general, el concepto de invarianza bajo cierta simetría se discutirá cuando las coordenadas espacio-temporales y los campos varían de acuerdo a un cierto parámetro pequeño $\delta w^i$, como sigue

$$\begin{aligned} x_\mu \to x'_\mu &= x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi(x) \to \phi'(x') &= \phi(x) + \delta\phi(x), \end{aligned} \tag{3}$$

donde las variaciones $\delta x^\mu$ y $\delta\phi$ estan caracterizadas por un conjunto infinitesimal de parámetros $\delta w^i$, de la forma

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= X_i^\mu(x)\delta w^i \\ \delta\phi(x) &= \Phi^i(x)\delta w^i \end{aligned} \tag{4}$$

siendo $X_i^\mu(x)$ y $\Phi^i(x)$ las funciones generales que describen el tipo de transformación que se esta haciendo sobre las coordenadas y los campos, es decir, estas dependen del grupo de simetría que se este estudiando. Para aclarar esto en las siguientes subsección veremos el caso de una translación infinitesimal en el 4-espacio y una translación infinitesimal de Lorentz.

Es importante aclarar que la variación total del campo, no sólo viene de su propia variación sino además del hecho que las coordenadas también cambian, es decir:

$$\begin{aligned} \phi(x) \to \phi'(x') &= \phi'(x+\delta x) = \phi'(x) + \delta x^\mu\,(\partial_\mu\phi) \\ &= \phi(x) + \delta_0\phi(x) + \delta x^\mu\,(\partial_\mu\phi)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

donde, la variación debido a cambios únicamente en el campo se rotulo como $\delta_0\phi$. Igualando (5) con (3) y sustituyendo (4) resulta

$$\delta_0\phi(x) = \delta\phi(x) - \delta x^\mu\,(\partial_\mu\phi) = [\Phi_i(x) - (\partial_\mu\phi)\,X_i^\mu(x)]\,\delta w^i \tag{6}$$

Bajo estas variaciones arbitrarias de las coordenadas y los campos (4), la acción del sistema se transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \to \mathcal{S}' &= \mathcal{S} + \delta\mathcal{S} \\ &= \mathcal{S} + \int \delta(d^4x)\mathcal{L} + \int d^4x\,(\delta\mathcal{L})\,, \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\delta\mathcal{L}$ es la variación en la densidad Lagrangiana debido a las variaciones en $x$ y $\phi$, y $\delta(d^4x)$ es la variación en la medida de la integración, la cual es

$$\begin{aligned} d^4x \to d^4x' &= \left|\det\left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right]\right| d^4x = \left|\det\left[\frac{\partial(x^\mu+\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right]\right| d^4x \\ &= \det\left[\delta^\mu_\nu + \partial_\nu\left(X^\mu_i(x)\delta w^i\right)\right] d^4x \\ &= \left[1+\partial_\mu\left(X^\mu_i(x)\delta w^i\right)\right] d^4x \\ &= \left[1+\partial_\mu\left(\delta x^\mu\right)\right] d^4x \end{aligned} \tag{8}$$

de aquí se obtiene que $\delta\left(d^4x\right) = \partial_\mu\left(\delta x^\mu\right) d^4x$, así la acción transformada es

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} + \int d^4x\partial_\mu(\delta x^\mu)\mathcal{L} + \int d^4x\left(\delta\mathcal{L}\right), \tag{9}$$

luego de reemplazar las distintas variaciones de las coordenadas y los campos, para un Lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu_1}\phi, \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\phi, \cdots, , \partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_m}\phi)$, se obtiene que la variación en la acción es

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int d^4x \left[\sum_{i=0}^{m}(-)^i\prod_{j=0}^{i}\partial_{\mu_j}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\prod_{j=0}^{i}\partial_{\mu_j}\phi^a\right)}\right)\delta_0\phi\right. \\ &\quad +\partial_\mu\left\{(\delta x^\mu)\mathcal{L} + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-(i+1)}(-)^j\prod_{k=0}^{j}\partial_{\mu_k}\right. \\ &\quad \left.\left.\times\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\prod_{k=0}^{j}\partial_{\mu_k}\prod_{l=0}^{i}\partial_{\nu_l}\phi^a\right)}\right)\prod_{l=0}^{i}\partial_{\nu_l}(\delta_0\phi^a)\right\}\right], \end{aligned} \tag{10}$$

siendo $n$ el orden de derivadas en el Lagrangiano.

Reemplazando, las transformaciones (6), (4) y dado que la acción es invariante bajo las variaciones paramétricas de $\delta w^i$, se tiene que $\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta w^i} = 0$, lo que permite obtener las siguientes expresiones para las ecuaciones de movimiento y la corriente conservada

$$\sum_{i=0}^{m} (-)^i \prod_{j=0}^{i} \partial_{\mu_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \prod\limits_{j=0}^{i} \partial_{\mu_j} \phi^a \right)} \right) = 0 \tag{11}$$

con $\partial_{\mu_0} = 1$ y la corriente dada por

$$\begin{aligned} j_i^{\mu,a} = & \left[ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-(i+1)} (-)^j \prod_{k=0}^{j} \partial_{\mu_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_\mu \prod\limits_{k=0}^{j} \partial_{\mu_k} \prod\limits_{l=0}^{i} \partial_{\nu_l} \phi^a \right)} \right) \right. \\ & \left. \times \prod_{l=0}^{i} \partial_{\nu_l} \left( \partial_\rho \phi^a \right) - \mathcal{L}(\delta_\rho^\mu) \right] X_i^\rho \qquad (12) \\ & - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-(i+1)} (-)^j \prod_{k=0}^{j} \partial_{\mu_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_\mu \prod\limits_{k=0}^{j} \partial_{\mu_k} \prod\limits_{l=0}^{i} \partial_{\nu_l} \phi^a \right)} \right) \prod_{l=0}^{i} \partial_{\nu_l} (\Phi_i^a). \end{aligned}$$

La corriente dada en (12) es conservada, ya que $\partial_\mu j_i^{\mu,a} = 0$ como lo establece el teorema de Noether [8]. La correspondiente carga conservada es

$$Q_i(t) \equiv \int d^3x j_i^0(t, \mathbf{x}). \tag{13}$$

Para obtener $\partial_\mu j_i^\mu = 0$ se utilizo las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (11) para los campos $\phi^a$. Apliquemos estos resultados, a dos casos particulares:

## 2.1. Una translación en el 4-espacio

$x_\mu \to x_\mu + \varepsilon_\mu$ y el campo escalar permanece invariante $\phi \to \phi$, en este caso la ecuación (4) toma la forma:

$$\delta x_\mu = \delta_\mu^\nu \varepsilon_\nu, \tag{14}$$

es decir, $\delta w^i \to \varepsilon_\nu$, $X^i_\mu \to \delta^\nu_\mu$ y $\Phi^i(x) \to 0$. Con lo que la ecuación (12) ahora es el tensor $T^\mu_\nu$, momentum energía, y tiene la forma

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-(i+1)} (-)^j \prod_{k=0}^{j} \partial_{\mu_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_\mu \prod_{k=0}^{j} \partial_{\mu_k} \prod_{l=0}^{i} \partial_{\nu_l} \phi^a \right)} \right) \\ &\times \prod_{l=0}^{i} \partial_{\nu_l} \left( \partial_\nu \phi^a \right) - \mathcal{L}(\delta^\mu_\nu), \end{aligned} \tag{15}$$

y la carga conservada (13) es el cuadri-momentum

$$\begin{aligned} P_\nu &= \int d^3x T^0_\nu \\ &= \int d^3x \left[ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-(i+1)} (-)^j \prod_{k=0}^{j} \partial_{\mu_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_0 \prod_{k=0}^{j} \partial_{\mu_k} \prod_{l=0}^{i} \partial_{\nu_l} \phi^a \right)} \right) \right. \\ &\qquad \left. \times \prod_{l=0}^{i} \partial_{\nu_l} \left( \partial_\nu \phi^a \right) - \mathcal{L}(\delta^0_\nu) \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Para el caso de $m = 2$, es decir, una teoría que depende de dos derivas, se tiene el tensor *momentum-energía* $T^\mu_\nu$

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi) - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{17}$$

que satisface $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$. Las cuatro cantidades conservadas, estan dadas por el cuadri-momento $P_\nu$

$$P_\nu = \int d^3x T^0_\nu = \int d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}(\partial_\nu \phi) - \delta^0_\nu \mathcal{L} \right], \tag{18}$$

cuyas diferentes componentes son:

$$E = \int d^3x T^0_0 \qquad y \qquad P_i = \int d^3x T^0_i, \tag{19}$$

donde $E$ es la energía total de la configuración de campo, mientras que $P_i$ es el momentum total de la configuración de campo. Cantidades bien conocidas en todos los textos de teoría cuántica de campos [3].

## 2.2. Translación infinitesimal de Lorentz

$x_\mu \to x_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu$, donde el tensor $\varepsilon_{\mu\nu}$ es antisimétrico, es decir $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\mu}$, y el campo escalar nuevamente es invariante. De la ecuación (4) tenemos:

$$X^\mu_{\rho\sigma}(x) = -\delta^\mu_\rho x_\sigma + \delta^\mu_\sigma x_\rho \tag{20}$$

y dado que los campos no transforman, se tiene

$$\Phi^i_{\rho\sigma} = 0 \tag{21}$$

ahora la ecuación (12) es el tensor $M^\mu_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} M^\mu_{\alpha\beta} &= \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-(i+1)} (-)^j \prod_{k=0}^{j} \partial_{\mu_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_\mu \prod_{k=0}^{j} \partial_{\mu_k} \prod_{l=0}^{i} \partial_{\nu_l} \phi^a \right)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{l=0}^{i} \partial_{\nu_l} \left( \partial_\rho \phi^a \right) - \mathcal{L}(\delta^\mu_\rho) \right\} \left( -\delta^\rho_\alpha x_\beta + \delta^\rho_\beta x_\alpha \right) \end{aligned} \tag{22}$$

en términos del tensor momentun energía

$$M^\mu_{\alpha\beta} = T^\mu_\beta x_\alpha - T^\mu_\alpha x_\beta \tag{23}$$

el cual satisface $\partial_\mu M^\mu_{\alpha\beta} = 0$, resultando seis cargas conservadas. Para $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ la transformación de Lorentz es una rotación y las tres cargas conservadas dan en momentum angular total del campo

$$Q_{ij} = \int d^3x \left( x_i T_{0j} - x_j T_{0i} \right). \tag{24}$$

Este formalismo puede ser fácilmente aplicado al caso donde las transformaciones de simetría son internas, es decir, aquellas que no involucran las coordenadas espacio-tiempo $(x_\mu)$.

# 3. Estructura del Formalismo Hamiltoniano en Teoría de Campos

La relación entre el formalismo Lagrangiano y la teoría cuántica es vía la integral de camino. Pero aquí no se discutirá los métodos de la integral de camino, sino que nos enfocaremos en la cuantización canónica. Para esto, es necesario el formalismo Hamiltoniano para una teoría de campos. Partiendo mediante la definición del *momentum canónicamente conjugado* $\pi^a(x)$ del campo $\phi^a(x)$.

$$\pi^a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a(x)}. \tag{25}$$

Este no se debe de confundir con el momentum total $P_i$ definido en (19). La *densidad Hamiltoniana* es dada por

$$\mathcal{H} = \pi_a(x)\dot{\phi}^a(x) - \mathcal{L}, \tag{26}$$

donde como en mecánica clásica, hemos eliminado $\dot{\phi}_a(x)$ en favor de $\pi_a(x)$ en cualquier lugar en el $\mathcal{H}$. El Hamiltoniano es simplemente

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \tag{27}$$

## 3.1. Ejemplo: Campo Escalar Real

Para el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - V(\phi), \tag{28}$$

el momentum esta dado por $\pi = \dot{\phi}$, lo cual conduce al siguiente Hamiltoniano,

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - V(\phi)\right). \tag{29}$$

En el formalismo Lagrangiano, la invarianza Lorentz es clara ya que la acción es invariante bajo transformaciones de Lorentz. En contraste, el formalismo Hamiltoniano *no* es manifiestamente invariante Lorentz: hemos escogido una preferencia temporal. Por ejemplo, las ecuaciones de movimiento para $\phi(x) = \phi(\vec{x}, t)$ surjen de las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\phi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial H}{\partial \pi(\vec{x}, t)} \qquad y \qquad \dot{\pi}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial H}{\partial \phi(\vec{x}, t)}, \tag{30}$$

las cuales a diferencia de la ecuaciones de Euler-Lagrange, no lucen invariantes de Lorentz. Sin embargo, aunque en el formalismo Hamiltoniano no se vea explicitamente la invarianza Lorentz, la física debe de permanecer sin cambio alguno. Es decir, si partimos de una teoría relativista, todas las respuestas finales deben ser invariantes Lorentz aun si esta invarianza no se encuentra manifiesta en los pasos intermedios.

Ahora veamos el papel de los corchetes de Poisson en teoría de campos. Dados dos funcionales $K[\phi, \pi]$ y $Q[\phi, \pi]$ se define el corchete de Poisson de la forma

$$\{K, Q\} = \int d^3x \left( \frac{\partial K}{\partial \phi} \frac{\partial Q}{\partial \pi} - \frac{\partial K}{\partial \pi} \frac{\partial Q}{\partial \phi} \right), \tag{31}$$

tomando $Q = H$ y las ecuaciones de movimiento (30), vemos que la evolución temporal del funcional $K$ es

$$\dot{K}(t) = \int d^3x \left[ \frac{\partial K}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial K}{\partial \pi} \dot{\pi} \right] = \{K, H\}. \tag{32}$$

Así, las ecuaciones de movimiento (30) son

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x, t) &= \{\phi(x, t), H(t)\} \\ \dot{\pi}(x, t) &= \{\pi(x, t), H(t)\}. \end{aligned} \tag{33}$$

Los corchetes de Poisson son de especial interés para la teoría de campos, pues los campos cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \{\phi(x, t), \pi(x', t)\} = \int d^3y &\left[ \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial \phi(y, t)} \cdot \frac{\partial \pi(x', t)}{\partial \pi(y, t)} \right. \\ &\left. - \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial \pi(y, t)} \cdot \frac{\partial \pi(x', t)}{\partial \phi(y, t)} \right] \\ &= \int d^3y \delta^3(x - y) \delta^3(x' - y) \\ &= \delta^3(x - x'), \end{aligned} \tag{34}$$

y

$$\{\phi(x,t), \phi(x',t)\} = \{\pi(x,t), \pi(x',t)\} = 0. \tag{35}$$

Ahora la teoría de campos puede ser cuántizada de igual forma que un sistema mecánico discreto, mediante el reemplazo de los corchetes de Poisson por las relaciones de conmutación entre los operadores en el espacio de Hilbert. Es decir, en el proceso de cuantización canónica de campos, los campos clásicos $\phi(x,t)$ y $\pi(x,t)$ son reemplazados por los operadores $\hat{\phi}(x,t)$, $\hat{\pi}(x,t)$ y los corchetes de Poisson por las relaciones de conmutación

$$\{\phi(x,t), \pi(x',t)\} \to \frac{1}{i}\left[\hat{\phi}(x,t), \hat{\pi}(x',t)\right], \tag{36}$$

de tal forma que los operadores de campo $\phi(\hat{x},t)$ y $\pi(\hat{x},t)$ en tiempos iguales, satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}\left[\hat{\phi}(x,t), \hat{\pi}(x',t)\right] &= \delta^3(x-x') \\ \left[\hat{\phi}(x,t), \hat{\phi}(x',t)\right] &= [\hat{\pi}(x,t), \hat{\pi}(x',t)] = 0.\end{aligned} \tag{37}$$

## 4. Formalismo Hamiltoniano a Altos Ordenes en las Derivadas

Ahora generalizamos el formalismo Hamiltoniano para un sistema con $\phi_a$ campos escalares $(a = 1, 2, \cdots, n)$, de tal forma que el Lagrangiano es una función de los campos y sus derivadas de orden $m$. A partir de este Lagrangiano se calculan los diferentes momentos canónicamente conjugados, teniendo en cuenta que las velocidades deben de ser consideradas como coordenadas canónicas independientes diferentes a las derivadas temporales de las coordenadas.

La forma explícita del momento canónico a cualquier orden en el número de derivadas que aparecen en el Lagrangiano es de la forma:

$$
\begin{aligned}
\pi_{\phi_{(l-1)}} &= \sum_{i=0}^{m-l} (-)^i \prod_{k=0}^{i} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \prod\limits_{k=0}^{i} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \phi_l \right)} \right] \\
&+ \sum_{j=l+1}^{m} \sum_{i=l+1}^{j} (-)^{i+l+1} C_{i,j} \prod_{k=0}^{i-l-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \prod_{n=0}^{j-i+1} (\partial_{x_n}) \\
&\times \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \prod\limits_{k=0}^{i-l-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \prod\limits_{n=0}^{j-i+1} \partial_{x_n} \phi_l \right)} \right]
\end{aligned}
\qquad (38)
$$

donde $\phi_l$ significa $\frac{d^l\phi}{dt^l}$, con $l = 1, 2, ..., m$ y $\phi_0 = \phi$, además $m$ indica el orden de las derivadas que contiene el Lagrangiano, es decir, aparecen tantos momentos conjugados como derivadas tenga el Lagrangiano. Un importante punto a destacar es que los momentos obtenidos en (38), son muy distintos al conocido $\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$, esto es debido a los efectos de los términos de altas derivadas en el Lagrangiano. Los coeficientes $C_{i,j}$ que aparecen en el segundo término de (38), son obtenidos en la Tabla 1.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & \swarrow i & & & & & & & & \\
 & & & & & {}^{2}\searrow & & & & & & & \\
 & & & & {}^{3}\searrow & & & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & \leftarrow 2 & & & & & \\
 & & & & & 3 & & 3 & \leftarrow 3 & & & & \downarrow j \\
 & & & & 4 & & 6 & & 4 & & & & \\
 & & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & & \\
 & & 6 & & 15 & & 10 & & 15 & & 6 & & \\
 & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & \\
8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8
\end{array}
$$

**Tabla 1:** *Tabla de los coeficientes $C_{i,j}$, donde las $i's$ corren en forma diagonal y las $j's$ en forma vertical, por ejemplo el coeficiente $C_{3,4} = 6$.*

Conocidos los diferentes momentos canónicamente conjugados, el Hamiltoniano canónico se define de la manera estándar, es decir de la forma:

$$H = \int d^3x \left( \pi_{\phi} \dot{\phi} + \pi_{\dot{\phi}} \ddot{\phi} + \ldots + \pi_{\phi_{(l-1)}} \phi_l - \mathcal{L} \right). \tag{39}$$

De (39), se obtienen las ecuaciones de movimiento de Hamilton, las cuales en este caso toman la forma

$$\dot{\phi}_l = \frac{\partial H}{\partial \pi_{\phi_{(l-1)}}}, \qquad \dot{\pi}_{\phi_{(l-1)}} = -\frac{\partial H}{\partial \phi_{(l-1)}}. \tag{40}$$

La cuantización canónica asociada a los operadores de campo $\hat{\phi}_l$ y $\hat{\pi}_{\phi_{(l-1)}}$, obedece las siguientes relaciones de conmutación (37), donde los campos son evaluados en el mismo instante de tiempo

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\phi}_{(l-1)} (t, \vec{x}) , \hat{\pi}_{\phi_{(l-1)}} (t, \vec{y}) \right] &= \delta^3 (\vec{x} - \vec{y}) \\ \left[ \hat{\phi}_l (t, \vec{x}) , \hat{\phi}_{l'} (t, \vec{y}) \right] = \left[ \hat{\pi}_{\phi_l} (t, \vec{x}) , \hat{\pi}_{\phi_{l'}} (t, \vec{y}) \right] &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

De esta forma, si tenemos una cantidad dinámica la cual depende de los campos y de sus momentos canónicamente conjugados, por ejemplo $\hat{G} \left( \hat{\phi}, \dot{\hat{\phi}}, \ldots, \hat{\phi}_{(l-1)}, \hat{\pi}_{\phi}, \hat{\pi}_{\dot{\phi}}, \ldots, \hat{\pi}_{\phi_{(l-1)}} \right)$, su derivada temporal es

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{G}}{dt} = \int d^3x \Bigg( & \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{\phi}} \dot{\hat{\phi}} + \ldots + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{\phi}_{(l-1)}} \hat{\phi}_l + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{\pi}_{\hat{\phi}}} \dot{\hat{\pi}}_{\hat{\phi}} + \ldots \\ & + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{\pi}_{\hat{\phi}_{(l-1)}}} \dot{\hat{\pi}}_{\hat{\phi}_{(l-1)}} \Bigg), \end{aligned} \tag{42}$$

y utilizando las ecuaciones de Hamilton (40), resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{G}}{dt} &= \int d^3x \sum_{l=1}^{m} \left( \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{\phi}_{(l-1)}} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{\pi}_{\hat{\phi}_{(l-1)}}} - \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{\pi}_{\hat{\phi}_{(l-1)}}} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{\phi}_{(l-1)}} \right) \\ &= \frac{1}{i} \left[ \hat{G}, \hat{H} \right], \end{aligned} \tag{43}$$

indicando que la evolución temporal del operador $\hat{G}$, es simplemente la relación de conmutación entre los operadores $\hat{G}$ y $\hat{H}$.

## 5. Aplicaciones

Una forma de verificar estos resultados obtenidos es estudiando el caso del Lagrangiano de Klein-Gordon el cual depende de una sola derivada,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right) \tag{44}$$

se obtiene la ecuación de movimiento conocida como la ecuación de Klein-Gordon, $(\Box + m^2)\phi = 0$, y la cuantización del campo escalar [9]. Ya que este Lagrangiano (44), es equivalente a

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi\left(\Box + m^2\right)\phi = -\frac{1}{2}\phi\partial_0^2\phi + \frac{1}{2}\phi\nabla^2\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{45}$$

Lagrangiano de orden dos en las derivadas [6]. Ahora podemos aplicar todo lo obtenido en la sección anterior y hallar la ecuación de movimiento y cuantizar esta teoría con dos derivadas. En la ecuación (11) tomando $m = 2$ se tiene:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right) + \partial_\mu\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\nu\phi\right)}\right) = 0 \tag{46}$$

la cual es exactamente la ecuación de Klein-Gordon, $(\Box + m^2)\phi = 0$. Ahora con $m = 2$ en (38) se calculan de forma directa los dos momentos canónicamente conjugados de las variables $\phi$ y $\frac{d\phi}{dt}$, algo que marca la diferencia al caso convencional donde aparece solamente un momento conjugado, estos son:

$$\begin{aligned}\pi_{_\phi} = \tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} - \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ddot{\phi}}\right) + 2\partial_i\left(\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i\dot{\phi}\right)}\right) = \tfrac{1}{2}\dot{\phi} \\ \pi_{_{\dot{\phi}}} = \tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ddot{\phi}} = -\tfrac{1}{2}\phi.\end{aligned} \tag{47}$$

De la expresión (39), el Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\left(\pi_{_\phi}\dot{\phi} + \pi_{_{\dot{\phi}}}\ddot{\phi} - \mathcal{L}\right) \\ &= \int d^3x\left(\pi_{_\phi}\dot{\phi} - \frac{1}{2}\phi\nabla^2\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2\right) \\ &= \int d^3x\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\phi\nabla^2\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2\right) \end{aligned} \tag{48}$$

y las ecuaciones de movimiento (40), son

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial \pi_\phi} = 0, \qquad \dot{\pi}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = \nabla^2\phi - m^2\phi \\ \ddot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial \pi_{\dot{\phi}}} = 0, \qquad \dot{\pi}_{\dot{\phi}} = -\frac{\partial H}{\partial \dot{\phi}} = -\dot{\phi} \end{aligned} \tag{49}$$

de las cuales fácilmente resulta la ecuación de movimiento de Klein-Gordon, como era de esperar.

Ahora para el procedimiento de cuantización debemos tener en cuenta que las expresiones de los momentos conjugados (47) son ecuaciones de constricciones, y pueden ser escritas de la forma

$$\begin{aligned} Y_1 &= \pi_{\phi} - \tfrac{1}{2}\dot{\phi} \approx 0 \\ Y_2 &= \pi_{\dot{\phi}} + \tfrac{1}{2}\phi \approx 0, \end{aligned} \tag{50}$$

donde el símbolo " $\approx$ " se lee "*débilmente cero*" y significa que $Y_i$, con $i = 1, 2$, puede tener corchetes de Poisson canónicos que no son cero con algunas variables canónicas [10]. El corchete de Poisson entre $Y_1$ y $Y_2$ es

$$\begin{aligned} \{Y_1, Y_2\} &= \left\{\pi_\phi - \frac{1}{2}\dot{\phi}, \pi_{\dot{\phi}} + \frac{1}{2}\phi\right\} \\ &= \left\{\pi_\phi, \pi_{\dot{\phi}}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\pi_\phi, \phi\right\} - \frac{1}{2}\left\{\dot{\phi}, \pi_{\dot{\phi}}\right\} - \frac{1}{4}\left\{\dot{\phi}, \phi\right\} \\ &= \frac{1}{2}\int d^3y \left(\frac{\partial \pi_\phi(x,t)}{\partial \phi(y,t)} \cdot \frac{\partial \phi(x',t)}{\partial \pi_\phi(y,t)} - \frac{\partial \pi_\phi(x,t)}{\partial \pi_\phi(y,t)} \cdot \frac{\partial \phi(x',t)}{\partial \phi(y,t)}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\int d^3y \left(\frac{\partial \dot{\phi}(x,t)}{\partial \dot{\phi}(y,t)} \cdot \frac{\partial \pi_{\dot{\phi}}(x',t)}{\partial \pi_{\dot{\phi}}(y,t)} - \frac{\partial \dot{\phi}(x,t)}{\partial \pi_{\dot{\phi}}(y,t)} \cdot \frac{\partial \pi_{\dot{\phi}}(x',t)}{\partial \dot{\phi}(y,t)}\right) \\ \{Y_1, Y_2\} &= -\delta^3(x - x'), \end{aligned} \tag{51}$$

donde sea utilizado que $\phi$, $\dot{\phi}$, $\pi_\phi$ y $\pi_{\dot{\phi}}$ son variables independientes en el formalismo de Hamilton. Debido a que el corchete de Poisson (51) es diferente de cero, se tiene que las constricciones $Y_1$ y $Y_2$ son constricciones de segunda clase [10]. Ahora es posible escribir la matriz $C_{ij}$, que involucra los corchetes de Poisson y las constricciones (50), definida de la forma [10]:

$$C_{ij}(x, x') = \left\{Y_i(x), Y_j(x')\right\}, \tag{52}$$

que para este caso particular es

$$C_{ij}(x,x') = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-x'). \tag{53}$$

Para que una constricción de segunda clase este fuertemente constreñida a cero, es necesario cambiar los corchetes de Poisson por los corchetes de Dirac. Debido a que los corchetes de Dirac con constricciones de segunda clase son cero [10]. Los corchetes de Dirac entre dos cantidades $A$ y $B$ están definidos (50) como

$$\begin{aligned} \{A(x), B(x')\}^D_{x_0=x'_0} = {} & \{A(x,t), B(x',t)\}_{x_0=x'_0} \\ & - \int d^3y d^3z \, \{A(x,t), X_i(y,t)\}_{x_0=y_0} \\ & C^{-1}_{ij}(y,z) \, \{X_j(z,t), B(x',t)\}_{z_0=x'_0} \, . \end{aligned} \tag{54}$$

Relación con la cual es muy simple obtener los corchetes de Dirac fundamentales de nuestra teoría

$$\begin{aligned} \left\{\phi(x), \pi_\phi(x')\right\}^D_{x_0=x'_0} &= \tfrac{1}{2}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}) \\ \left\{\dot{\phi}(x), \pi_{\dot{\phi}}(x')\right\}^D_{x_0=x'_0} &= \tfrac{1}{2}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}) \\ \left\{\phi(x), \dot{\phi}(x')\right\}^D_{x_0=x'_0} &= \delta^3(\vec{x}-\vec{x'}) \\ \left\{\pi_{\dot{\phi}}(x), \pi_\phi(x')\right\}^D_{x_0=x'_0} &= -\tfrac{1}{4}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}). \end{aligned} \tag{55}$$

Los demás corchetes permanecen iguales a cero.

Ahora siguiendo el procedimiento convencional de la cuantización del campo, los campos $\phi(\mathbf{x},t)$, $\dot{\phi}(\mathbf{x},t)$, $\pi_\phi(\mathbf{x},t)$ y $\pi_{\dot{\phi}}(\mathbf{x},t)$ deben de ser reemplazados por operadores $\hat{\phi}(\mathbf{x},t)$, $\hat{\dot{\phi}}(\mathbf{x},t)$, $\hat{\pi}_\phi(\mathbf{x},t)$ y $\hat{\pi}_{\dot{\phi}}(\mathbf{x},t)$, para los cuales las relaciones de conmutación (41) evaluadas en el mismo instante, son

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\pi}_\phi(t,\vec{y})\right] &= i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ \left[\hat{\dot{\phi}}(t,\vec{x}), \hat{\pi}_{\dot{\phi}}(t,\vec{y})\right] &= i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \end{aligned} \tag{56}$$

las demás relaciones de conmutación son cero.

## 6. Conclusiones

Sea estudiado el formalismo de cuantización canónica a cualquier orden en las derivadas para una teoría de campos escalar. Se mostro cual es la forma explícita de las ecuaciones de movimiento, las corrientes conservadas, los momentos canónicamente conjugados para cualquier orden en las derivadas que aparecen en el Lagrangiano, por último mediante el uso de la teoría de sistemas constreñidos [10], se obtuvieron las conocidas relaciones de conmutación para el campo escalar con dos derivadas.

## Referencias


[1] B. Podolski and P. Schwed, *Rev. Mod. Phys* **20** (1948) 40.

[2] D. A. Eliezer and R. P. Woodard, *Nucl. Phys.* **B325** (1989) 389,
H. Hata, *Phys. Letts.* **B329** (1990) 698. M. Dine, N. Seiberg. *Phys Letts* **409** (1997), 239-244.

[3] Michio Kaku, *Quantum Field Theory* **Oxford University Press** (1993).

[4] M. Ostrogradski, *Mem. Ac. St. Pestesburg* **V14** (1850) 385.

[5] N. V. Krasnikov, A. B. Kyiatkinand E. R. Poppitz, *Phys Letts* **B222** (1989), 66-71. I. L. Buchbinder, S. L. Lyakhovivh, *Theor. Math. Phys* **72** (1987), 824-834.

[6] F.J. de Urries, J. Julve. J. Phys. **A31** (1998) 6949.
M. Leclerec. gr-qc/0608096 (2006).
J. Barcelos-Neto, N. R. F. Braga. Act. Phys. Polonica **B20** (1989) 205.
V. Tapia. Nuovo Cim. **B101** (1988) 183.
Dongsu Bak, D. Cangemi, R. Jackiw. *Phys. Rev.* **D49** (1994) 5173.
Shinji Hamamoto, hep-th/9503177 (1995).

[7] Rodrigues L. and Rodrigues P. *Am. J. Phys.* **38** (1970), 557. Koestler J. and Smith J. *Am J. Phys.* **33** (1965), 140. Borneas M. *Am J. Phys.* **27**(1959), 265. A. Morozov. *Theor. Math. Phys* **157** (2008), 1542-1549. T. Kimura. *Lett. Nouvo Cim* **5** (1872), 81-85.

[8] Noether, E. *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen*, **2** (1918), 235.

[9] W. Greiner, J. Reinhardt. *Field Quantization Springer-Verlag* (1996).

[10] A. Hanson, Tullio Regge and C. Teitelboim. *Constrained Hamiltonian System.* Accademia Nazionale Dei Lincei (1976).