Dinámica del comportamiento fractal de las estructuras a gran escala del Cosmos

C. A. Chacón[1,2], R. A. Casas[1]

[1] Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

[2] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá

Resumen

En el presente artículo de revisión, se exponen los fundamentos físicos más importantes de la cosmología fractal. Se incluyen los primeros desarrollos teóricos de la dinámica gravitacional a partir del principio cosmológico condicional propuesto por Mandelbrot, así como los estudios iniciales desde el punto de vista fractal del agrupamiento galáctico observado. El entendimiento de este fenómeno propende por el desarrollo de física más allá del modelo cosmológico estándar.

Palabras clave: Cosmología, fractal, gravedad, estructura a gran escala

Abstract

In this review article the most important foundations of fractal cosmology are presented. Special attention is given to the first theoretical developments in gravitational dynamics based on the conditional cosmological principle proposed by Mandelbrot and to the starting research about the fractal nature of the observed spatial clustering of galaxies. The understanding of this phenomena may impulse the development of new physics beyond the standard cosmological model.

Keywords: Cosmology, fractals, gravity, large scale structure

Chacón: cachaconc@unal.edu.co
Casas: racasasm@unal.edu.co

1. Introducción

El paradigma actual sobre el cual se basa el modelo cosmológico estándar, afirma que el universo a gran escala es homogéneo e isotrópico, de manera que las inhomogeneidades observadas solo son de carácter local y deben desvanecerse a escalas suficientemente grandes [11, 9]. Este principio se basa por un lado, en las observaciones de la radiación cósmica de fondo [7, 21], cuya isotropía se encuentra del orden de una parte en cien mil y por otro, en consideraciones filosóficas; el universo observado debe ser el mismo para cualquier observador independiente del punto de observación y de la dirección de esta [14, 21].

No obstante el éxito de los modelos físicos basados en este principio cosmológico, aún quedan sin resolver preguntas fundamentales dentro de la formación de estructura en el universo [25]. Específicamente las galaxias se agrupan en patrones jerárquicos altamente estructurados, con propiedades de auto similaridad (invariancia de escala) y dimensión fractal alrededor de dos, en donde nuevas leyes, conceptos y generalizaciones son necesarios [29]. En la última década, el interés en el desarrollo de la cosmología fractal ha arrojado resultados promisorios, convirtiéndose en un campo fértil de trabajo para la investigación de la formación de estructuras a gran escala en el universo [3, 2].

2. Fractalidad en la Distribución de Estructura en el Universo

La información proveniente de los últimos informes de catálogos de galaxias muestra que la distribución de galaxias en el universo observado exhibe una estructura compleja, invariante de escala, con dimensión fractal [29]. Matemáticamente se ha estimado la forma funcional de la distribución del agrupamiento galáctico de acuerdo a la relación [11, 9]:

$$N(r) \sim r^D \tag{1}$$

donde $N(r)$ representa el número de galaxias en una esfera de radio r y D la dimensión fractal, cuyo significado no solo es estadístico

Catálogo	D_F	Tamaño aprox.
CfA1	1.7 (0.2)	1800
CfA2	~ 2	11000
SSRS1	2.0 (0.1)	1700
SSRS2	~ 2	3600
LEDA	2.1 (0.2)	75000
IRAS 1.2/2 Jy	2.2 (0.2)	5000
Perseus-Pisces	$\sim 2{,}1$	3300
ESP	1.8 (0.2)	3600
Las Campanas (LCRS)	2.2 (0.2)	25000
SDSS (r1)	~ 2	$2 \times 10^5 - 1{,}5 \times 10^6$

Cuadro 1. Dimensión Fractal de Galaxias, cálculos para varios catálogos en corrimiento al rojo. [19]

[32] sino también geométrico. Cuando la dimensión fractal coincide con una dimensión entera se puede asignar a la estructura una geometría asociada con esta dimensión. $D = 0$ distribución puntual, $D = 1$ distribución lineal, $D = 2$ distribución superficial, $D = 3$ distribución volumétrica. Aquí, $D = 3$ corresponde a una distribución de galaxias homogénea e isotrópica, $D = 2$ corresponde a una distribución de galaxias donde la materia está uniformemente distribuida en superficies esféricas que rodean el punto de observación, mientras que, $D = 1$ corresponde a distribución uniforme dentro de un círculo cuyo centro es el observador. En el caso de dimensión no entera la distribución de galaxias se encuentra en estado de transición entre regímenes de homogeneidad [11].

Los resultados recientes se resumen en el Cuadro 1, de acuerdo a [20]. Esta información muestra una tendencia de la dimensión fractal del orden de $D = 2$ en profundidades cercanas a los $100 Mpc/h$. Estos datos observacionales constituyen una violación, por lo menos local, del principio cosmológico estándar, paradigma basado en la suposición de homogeneidad e isotropía en escalas mayores a $30 Mpc/h$ [19].

La pregunta fundamental es: ¿Cuál es el origen de la invariancia de escala en el fenómeno del agrupamiento gravitacional? [30, 9].

La mayoría de los grupos de investigación han enfocado sus esfuerzos primeramente en el modelamiento de la interacción gravitacional de N-cuerpos desde el punto de vista newtoniano [12], con algunos trabajos desde la perspectiva de la Teoría general de la relatividad [24, 19] y otros a partir de nuevas teoría de gravitación [1]. Algunos investigadores van más allá de la interacción gravitacional, buscando orígenes cuánticos en la estructura fractal, a partir de la conexión entre entropía, información, fractalidad y las distribuciones no homogéneas de anisotropías en el universo temprano [20].

Se requiere una revisión de la imagen estándar del crecimiento de estructura [2], desde los mismos principios subyacentes a los desarrollos del modelo estándar [5]. Algunos autores propenden por un cambio de paradigma, del Principio Cosmológico actualmente aceptado, al Principio Cosmológico Condicional propuesto por Mandelbrot [15], en el cual el universo aparece estadísticamente igual [32] solo para los observadores situados en una galaxia como punto ocupado del conjunto fractal [19] [13]. Con estos cambios en los principios físicos subyacentes a la cosmología estándar, es necesario revaluar los modelos universalmente aceptados con el fin de establecer si nos encontramos frente a un cambio de paradigma y aplicar la dinámica gravitacional a las fluctuaciones de densidad primordiales que son concordantes con el Principio Cosmológico Condicional [20]. La mayoría de los trabajos están encaminados en desarrollar modelos gravitacionales basados en distribuciones fractales de materia [1, 11, 12, 19] mientras otros investigadores buscan representar en forma discreta el campo continuo de densidad, de manera tal que dentro de modelos fractales de crecimiento de estructura, las distribuciones galácticas observadas se puedan reproducir en simulaciones de N-cuerpos [29, 9].

3. Antecedentes

La noción de estructura jerárquica en el cosmos tiene su origen temprano en los antiguos filósofos griegos. Desde tiempos de los presocráticos, Anaxágoras introdujo la idea acerca de un multiuniverso, un sistema indefinidamente extendido, con la premisa fun-

damental: *Todo está contenido en una porción del todo.*
De esta forma cada subsistema material contiene réplicas del resto [13].

Las enseñanzas de Anaxágoras fueron mayormente excluidas en los tiempos de la edad media. En el siglo 12 los escritos griegos fueron traducidos del griego al latín, y luego fueron inmersos dentro de la escolástica medieval, con su mayor exponente, Santo Tomás de Aquino.

El rompimiento con el pensamiento escolástico comenzó con las ideas heliocéntricas promulgadas por Nicolás Copérnico. Este movimiento desembocó en el renacimiento con los desarrollos posteriores de Galileo Galilei, Isaac Newton y Gottfried Leibniz, quienes proponen el modelo estático de un universo infinito. De este tiempo Emmanuel Kant reconoce una visión jerárquica del cosmos, asociando audazmente las nebulosas vistas en el cielo, con universos isla tal como nuestra Vía Láctea, ciento cincuenta años antes de cualquier testimonio observacional [14].

El pensamiento del universo newtoniano, basado en la premisa de la existencia de un universo infinito, eterno y estático, es cuestionado en principio por Olber, quien se pregunta ¿Porqué el cielo es negro de noche? Si el universo es infinito, los rayos de luz provenientes de las estrellas debían mostrar un brillo uniforme como el que ofrece la Vía Láctea, llenando de luz el espacio [14, 25].

Llegando a los inicios del siglo XX, la cosmología tuvo como eje, el desarrollo en 1915 de la Teoría General de la Relatividad, formulada principalmente por Albert Einstein. Esta visión de la gravitación, permitió tratar de manera cuantitativa el universo como un todo, partiendo de una distribución uniforme de materia [28]. La introducción de la constante cosmológica, fue un intento de conservar la visión newtoniana de un cosmos estático, pero ya en 1922, Alexander Friedmann demuestra que el problema de estabilidad es inherente a la solución de la ecuación de Einstein.

El desarrollo de Friedmann, junto con Georges Lemaitre, Howard Robertson, y Arthur Walker donde el universo es concebido como un gas perfecto de galaxias bajo la suposición de homogeneidad e isotropía, permite desarrollar una métrica consistente con un universo en expansión [28, 31], opacó la concepción jerárquica

(No-homogénea) desarrollada a principios de siglo por el astrónomo Carl Charlier, en su artículo de 1908: *Como puede ser construido un mundo infinito.* Charlier concibe un universo estructurado por niveles de complejidad partiendo en el nivel cero con las galaxias como constituyentes primarios. El siguiente nivel corresponde a una agrupación esférica de racimos galácticos de radio R_1, con N_1 galaxias, el segundo nivel con super-racimos esféricos de radio R_2 y N_2 racimos de galaxias, continuando la construcción en niveles superiores. [12], [13]. Este modelo fue olvidado hasta finales del siglo veinte con el advenimiento del concepto de fractal y su posterior aplicación a la cosmología [29, 30].

El adelanto de la noción de los fractales tiene su punto de partida en los trabajos del matemático alemán Felix Hausdorff quien trabajó la generalización de los conceptos de métrica, medida y dimensión dentro de la rama de la topología. En 1918 en su artículo titulado: *Dimension und ausseres Mass*, formaliza la idea de dimensión de manera general. Esta concepción es el punto de partida para el concepto moderno de fractal, formulado por el también matemático Benoit Mandelbrot en 1982, en su libro: The Fractal Geometry of Nature, donde se unen dos pensamientos: la auto-similaridad y la dimensión [23].

En cosmología este concepto está íntimamente relacionado con la invariancia de escala, [6] la faceta de objetos cuyas leyes no cambian si la longitud de escala es multiplicada por un factor común [14].

En la Figura 1 se observa la auto-similaridad en el agrupamiento galáctico, en dos escalas diferentes, de acuerdo al trabajo de Sylos Labini F, Pietronero L. [29, 9].

4. Desarrollo Teórico

El concepto natural de dimensión parte de la noción del número de coordenadas necesarios para la descripción de puntos dentro de un espacio métrico. En la aproximación auto-similar, se divide cada lado del objeto en igual número de partes y se observa la relación entre el número de partes y la razón entre la cual se dividió el objeto [23].

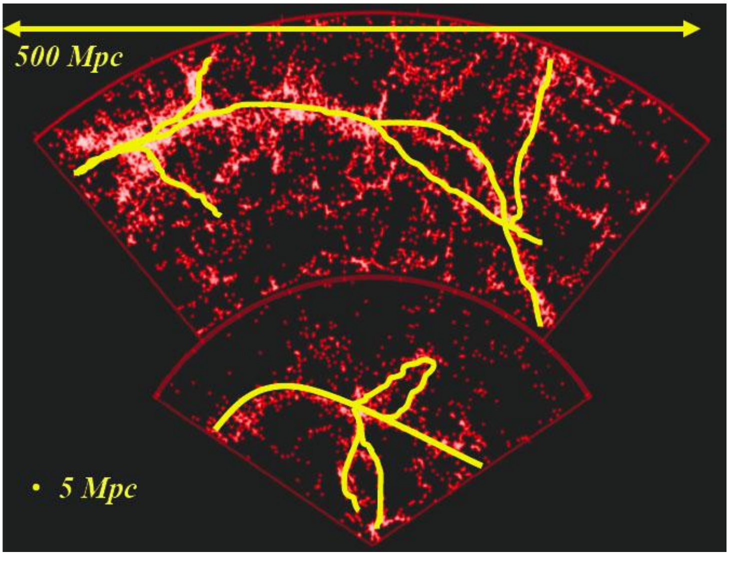

FIGURA 1. Fractales en el agrupamiento galáctico; invariancia de escala y autosimilaridad [29].

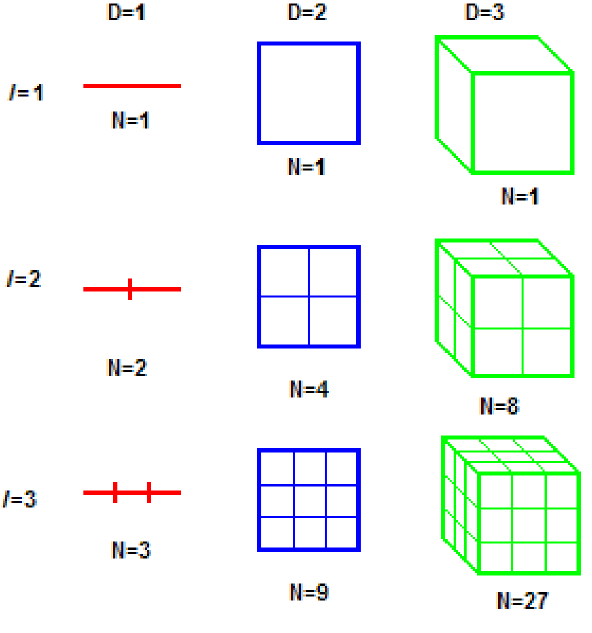

FIGURA 2. Ejemplo de dimensión fractal coincidente con la dimensión topológica [23]

Si se toma el objeto con tamaño lineal igual a 1, que reside en una dimensión Euclidiana D, y se reduce su tamaño lineal en el factor en cada dirección espacial, se necesitan un número de objetos auto-similares para cubrir el objeto original (Ver Figura 2). De esta manera la dimensión auto-similar D se define como:

$$D = \frac{\log N(l)}{\log(l)} \tag{2}$$

Extendiendo el concepto, se define la dimensión de Haussdorf para un espacio métrico cualquiera, A, como un número real positivo, considerando primero el número $N(\epsilon)$ de bolas de radio ϵ que se requieren para cubrir el espacio completamente, donde la medida d-dimensional es proporcional al límite:

$$h^d(A) = \underset{\epsilon \to 0}{lím} N(\epsilon)\epsilon^d \tag{3}$$

Haussdorf demostró que solo existe un valor d para el cual este límite es diferente de cero o de infinito. Para este valor se satisface que:

$$h^d(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } d < D_H(A) \\ 0 & \text{si } d > D_H(A) \end{cases} \tag{4}$$

Donde D_H es por definición la dimensión de Haussdorf de A, $d = D_H(A)$ y es el valor para el cual $N(\epsilon) \propto 1/\epsilon^d$ [23].

En el caso de la distribución de galaxias otra forma de dimensión fractal que es utilizada es la dimensión masa-radio D_m, que consiste en la medida de la masa total contenida en una esfera de radio R cuyo centro es un punto ocupado del conjunto, donde se determina la masa contenida como función del tamaño radial [9]. La dimensión fractal se define entonces como:

$$M(R) \approx R^{D_m}, \tag{5}$$

de manera que la densidad número de galaxias decrece como:

$$n(R) \approx R^{Dm-d} \tag{6}$$

Para describir completamente un fractal, es necesario especificar en que clase de función acompaña a la variación radial [17], es decir expresando la masa como:

$$M(R) = FR^{D_m} \tag{7}$$

donde el factor F es una función, que puede ser diferente para fractales con dimensión idéntica. De esta forma se define la Lacunaridad, un término que describe las propiedades del factor F. Mandelbrot propone esta descripción por medio de una serie de factores de variabilidad [4, 17] .

$$S_k = \frac{C_k(D)}{[C_1(D)]^k} \tag{8}$$

El más simple de estos factores es el factor de variabilidad de segundo orden:

$$\Phi(D) = \frac{\langle (F - \langle F \rangle)^2 \rangle}{\langle F \rangle^2}, \tag{9}$$

El análisis de lacunaridad complementa los estudios fractales permitiéndonos distinguir agrupaciones fractales de dimensión similar pero que ocupan el espacio en forma diferente [22].

Las definiciones de dimensión antes presentadas, representan casos particulares del espectro multifractal de dimensión generalizada [9]. De acuerdo con Sarkar [26] la distribución galáctica puede ser caracterizada con un espectro fractal definido a partir de una correlación generalizada. Partiendo de la i-ésima galaxia como centro, se determina $n_i(r)$ el numero de otras galaxias dentro de una esfera comóvil de radio r, realizando el conteo del número de galaxias alrededor del observador, a través de métodos numéricos [27]. La correlación generalizada es definida como:

$$C_q(r) = \frac{1}{MN} \sum [n_i(r)]^{q-1}, \tag{10}$$

donde M es el número de centros, N es el número total de galaxias y q se refiere a un momento particular del conteo de galaxias. A partir de esta correlación generalizada se puede definir la dimensión generalizada como:

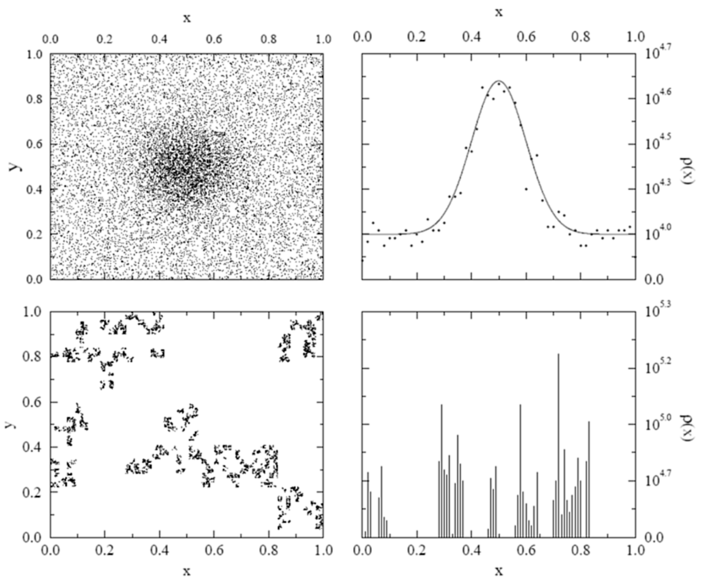

FIGURA 3. Ejemplo de distribuciones de masa regular (Arriba), multifractal (Abajo). En la derecha se muestran los correspondientes perfiles de densidad. [29]

$$D_q = \frac{1}{q-1}\frac{d\log C_q(r)}{d\log r} \tag{11}$$

Para $q > 1$ D_q explora el comportamiento del escalamiento de galaxias en ambientes de alta densidad (Cúmulos y super cúmulos) y para $q < 1$ D_q explora este escalamiento pero en ambientes de baja densidad es decir vacíos [10]. A partir de estos conceptos y del principio cosmológico condicional propuesto por Mandelbrot las nociones fundamentales deben ser revisadas comenzando con la densidad [9].

Una distribución homogénea, se caracteriza por una granulosidad, con una densidad de fondo bien definida, cuya estructura evidencia un exceso de densidad local, y es caracterizada por su posición, tamaño en intensidad, pudiéndose definir analíticamente un perfil. En cambio en una estructura fractal no se tiene una densidad de fondo, tiene un perfil altamente irregular y solo puede observarse regularidad en la escala de transformación [29, 30].

Como puede observarse en la Figura 3, los sistemas fractales no tienen longitud natural, en ellos la noción de densidad pierde sentido. Existen estructuras en muchas zonas y a varias escalas, pero ya no es posible asignarles una intensidad específica. [29, 30]. La pregunta a formularse es ¿la evidencia observacional apoya la concepción homogénea e isotrópica del universo, o se observa estructuración jerárquica del tipo fractal?

La evidencia astronómica de la no-homogeneidad del universo comenzó a vislumbrarse desde la publicación de Shapley de su catálogo galáctico, en 1934. En esta recopilación, se observan agrupaciones galácticas en racimos tan grandes como el observado alrededor de Virgo. Ya en 1958 Abel publicó su catálogo que indicaba una gran concentración de racimos y súper racimos en tan alta concentración que el mismo dudaba de su información [13].

En 1970 el astrónomo francés Gerard De Vaucouleurs hizo el primer intento de identificar un patrón jerárquico fractal, estimando para la fecha una dimensión fractal $D = 1{,}2$. El gran avance respecto a este tema fue dado por Luciano Pietronero, quien en 1987 en su estudio de la función de correlación, demostró que esta herramienta estadística resulta inapropiada cuando el objeto de investigación son conjuntos fractales. Además propuso una función de correlación más general que revela el agrupamiento jerárquico de manera contundente [13].

Actualmente la evidencia observacional, de acuerdo con [11], en regiones cercanas hasta 10 Mpc/h muestra una dimensionalidad del agrupamiento fractal de galaxias en valores cercanos a $D \approx 1$, mientras que a mayores radios [28, **?**], el comportamiento fractal exhibe una dimensionalidad $D \approx 2$ para la región observable del cosmos, como puede verse en la sección de justificación del problema. De manera que un modelo plausible para el comportamiento fractal que reproduzca la evidencia observacional y contenga un posible paso a la homogeneidad tendría la forma [8]:

$$N = b\left[1 + \frac{R_1}{r} + \left(\frac{R_2}{r}\right)^2\right] r^3, \tag{12}$$

donde esta expresión considera tres posible regiones de acuerdo al comportamiento fractal, estas son:

1. Región más interna, $R_1 < r$, donde el término de mayor peso en la expresión sería el de dimensión fractal 1, con $N \approx bR_1^3 r$.

2. Región intermedia, $R_1 < r < R_2$, donde es el segundo término el que toma la mayor importancia, de manera que la dimensión fractal estaría alrededor de 2, con $N \approx bR_2^3 r^2$

3. Mientras que en la región más allá de la escala de homogeneidad, $r \gg R_2$, la distribución de galaxias tendría dimensión fractal de 3, y tendería a la forma: $N \approx br^3$.

A partir de la dinámica newtoniana [18], es posible derivar la expresión antes propuesta partiendo de un ensamble estadístico de galaxias [32] aproximadamente homogéneo cuya distribución de densidad dentro de una esfera de radio r, y masa total m es [11]:

$$\rho_m^H = \frac{3m}{4\pi r^3} \tag{13}$$

Esta última expresión corresponde a la aproximación de orden cero, una distribución continua y homogénea de densidad de materia, con la fuerza gravitacional por unidad de masa en la superficie de la esfera de acuerdo a la expresión newtoniana:

$$F = G\rho_m^H \frac{V}{r^2} \tag{14}$$

Para representar una distribución discreta no homogénea, se toman aproximaciones de mayor orden, a través de una expansión de Taylor para la fuerza gravitacional por unidad de masa, con valor absoluto de los términos, valores finitos de la variación δr y con el volumen fijo, derivando y factorizando el término de orden cero se observa:

$$F \approx G\rho_m^H \frac{V}{r^2}\left[1 + 2\frac{\delta r}{r} + 3\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2\right] r^3 \tag{15}$$

Despejando la densidad de materia:

$$\rho_m = \rho_m^H \left[1 + 2\frac{\delta r}{r} + 3\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2\right] r^3 \tag{16}$$

Expresión compatible con el modelo fractal propuesto [11], [12]. Si esto se observa de un modelo newtoniano, ¿Cómo se darían pasos a desarrollar un modelo fractal del universo en el marco de la Teoría General de la Relatividad? [23]

Partiendo del principio cosmológico condicional, el universo es considerado estadísticamente igual para todos los observadores situados en una galaxia, pero no desde el punto de vista de una región de vacío [19]. En un universo fractal, la densidad no estaría definida en cualquier punto, y por lo tanto las ecuaciones de Einstein no tendrían sentido puntualmente. Es necesario reemplazar el concepto de densidad en un punto, por el concepto de medida condicional de masa definida sobre conjuntos discretos [29].

Es necesario definir de acuerdo al principio condicional lo que es homogeneidad fractal e isotropía desde un punto ocupado del conjunto. En primer lugar se define una hipersuperficie de fractalidad homogénea de dimensión fractal D, la hipersuperficie donde la masa medida sobre una esfera de radio r es proporcional a r^D [11]. De esta manera el universo sería fractal de dimensión D si a través de cada galaxia pasa una hipersuperficie como de espacio de fractalidad homogénea de dimensión D. En segundo lugar la isotropía desde el punto de vista condicional implicaría que un observador que se encuentre en reposo en su hipersuperficie no puede distinguir estadísticamente una dirección espacial de cualquier otra. Como en el modelo estándar, la isotropía de un universo fractal, implica que las líneas de universo del fluido cosmológico son ortogonales a cada hipersuperficie de tiempo constante, tal como en el modelo estándar [19, 28, 31]. De las ecuaciones de campo de Einstein $G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}$ la componente G^{00}, del tensor de Einstein para la métrica de Robertson-Walker (RW), en un universo homogéneo es [25]:

$$G^{00}_{RW} = 3\left[(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{k}{a^2}\right] \tag{17}$$

En un universo fractal la componente G^{00} tiene el mismo valor pero en los puntos del conjunto fractal y es cero en los demás. Esto repercute en las ecuaciones de Einstein en el primer componente del tensor momento-energía $G^{00} = 8\pi\rho$, expresión que tendría una densidad de la forma $\rho(P) = \sum_{i} m\delta(P, P_i)$ [15], donde los P_i son los puntos del fractal, cada uno con masa m, donde la homogeneidad fractal se puede expresar como:

$$\int \rho dV = \int d\mu = M_P(R) = C(t)R^D \tag{18}$$

El concepto de densidad es indefinido en un conjunto fractal, esto implica que G^{00}, tampoco puede definirse puntualmente, pero es posible definirlo en una superficie de tiempo constante $\int G^{00} = 8\pi \int d\mu$. Proponiendo una relación entre G^{00}_{RW} y la componente $G^{00}_{Fractal}$, donde se separan el comportamiento temporal y el espacial de esta última en la forma:

$$\hat{G}^{00}_{\text{FRACTAL}} = \begin{cases} \hat{f}(\chi)\ G^{00}_{RW} & \forall P \in \text{fractal} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{19}$$

Reemplazando en la ecuación (18) y efectuando separación de variables, igualando cada miembro a una constante ν:

$$\begin{gathered} G^{00}_{RW} = 2\nu C(t)a^{D-3}(t) \\ \hat{f}(\chi) = \tfrac{D\chi^{D-1}}{\nu\Sigma^2(\chi)} \end{gathered} \tag{20}$$

El valor de ν, se determina para el caso *k=0* y *D=3* (Distribución homogénea), donde $\hat{f}(\chi) = 1$. En este caso $\nu = 3$. Un desarrollo de interés del modelo de estado estacionario puede realizarse a partir de esta expresión para $G^{00}_{Fractal}$, si se supone que el número de galaxias en una esfera de radio R es el mismo en todas la épocas, $C(t) =$ cte. En este caso de la ecuación (20) para *D=2* esta toma la forma:

$$\left[(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 2C/a \tag{21}$$

Solucionando esta ecuación diferencial bajo la condición:

$$H_0 a_0 = (2Ca_0 - k)^{1/2} \rightarrow (H_0 a_0)^2 + k = 2Ca_0 \tag{22}$$

$$a(t) = a_0 + H_0 a_0 (t - t_0) + (C/2)(t - t_0)^2 \tag{23}$$

Así es posible calcular el parámetro de desaceleración q_0 :

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}} \tag{24}$$

En el caso *k=0*:

$$q_0 = -\frac{1}{2} \tag{25}$$

En el caso *k=-1*:

$$q_0 = -\frac{C}{C + \sqrt{C^2 + H_0^2}} \tag{26}$$

Si $C \ll H_0$ entonces $q_0 \approx -\frac{C}{H_0}$ un valor más bien bajo y concordante con el modelo de vacío. Finalmente *k=1*:

$$q_0 = -\frac{C}{C + \sqrt{C^2 - H_0^2}} \tag{27}$$

Expresión que no es físicamente aceptable para $C \ll H_0$ recordando que este caso se trata de un universo cerrado. Es necesario notar que el Principio Cosmológico condicional puede ser consecuencia de una estructura fractal del espacio-tiempo [19, 24], en cuyo caso la distribución de materia oscura debería exhibir también comportamiento fractal. Este modelo nos brinda posibilidad de incorporar la aceleración del factor de escala sin incluir constante cosmológica.

5. Anotaciones Finales

A partir del principio cosmológico condicional comienza a vislumbrarse nueva física en el campo de la dinámica de formación de estructuras a gran escala en el cosmos. Se abre un campo de investigación donde los conceptos de la gravitación, la mecánica estadística, y la complejidad de sistemas físicos se interrelacionan y complementan, proveyendo resultados acordes con las observaciones recientes del espacio profundo. La dinámica gravitacional basada en el principio cosmológico condicional arroja resultados promisorios respecto a la aceleración del universo sin acudir a constante cosmológica.

Referencias

[1] Baryshev Yu., Field Fractal Cosmological Model as an Example of Practical Cosmology Approach, Practical Cosmology, Proceedings of the International Conference "Problems of Practical Cosmology", held at Russian Geographical Society, 23-27 June, 2008 in St. Petersburg, Edited by Yurij V. Baryshev, Igor N. Taganov, Pekka Teerikorpi, Volume 1. TIN, St.-Petersburg, 2008, Vol.1,2, ISBN 978-5-902632, p.60-67

[2] Baryshev Yu. Teerikorpi P., Fractal Approach to Large Scale Galaxy Distribution, Bull. Spec. Astrophys. Obs. Russian Academy of Sciences, vol.59, 2005

[3] Baryshev Yu. Teerikorpi P., Discovery of Cosmic Fractals , World Scientific Publishing Co. 2002

[4] Blumenfeld R., Mandelbrot B., Lévy dusts, Mittag-Leffler statistics, mass fractal lacunarity, and perceived dimension, Physical Review E,Volume 56, Number 1, July 1997

[5] Campos D., Elementos de Mecánica Estadística. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, 2006, 282-285

[6] Campos D., Isaza F, Prolegómenos a los sistemas dinámicos, Universidad Nacional de Colombia, 2002

[7] Caruso F., Oguri V., The Cosmic Microwave Background Spectrum and an Upper Limit for Fractal Space Dimensionality, The Astrophysical Journal 694 (2009) 151

[8] Durrer R., Sylos Labini F, A., Fractal galaxy distribution in a homogeneous Universe?, Astronomy and Astrophysics, 339, 85-88,1998

[9] Gabrielli A., Sylos L.F., Joyce M., Pietronero L., Statistical Physics for Cosmic Structures, Springer-Verlag, 2010

[10] Gaité J., Halos and Voids in a multifractal model of cosmic struture, The astrophysical Journal, 658, 11-24, 2007

[11] Gruji'c P. V., Pankovi'c V. D., On the fractal structure of the universe, http://arxiv.org/abs/0907.2127

[12] Gruji'c P. V, A simple newtonian model for the fractal accelerating universe, Astrophysics and Space Science, 18 April 2004

[13] Gruji'c P. V, The concept of a hierarchical Cosmos, Publications of the Astronomical Observatory of Belgrade (ISSN 0373-3742), No. 75, p. 257 - 262 (2003). In: Proceedings of the XIII National Conference of Yugoslav Astronomers, Belgrade, October 17-20, 2002.

[14] Longair, M. S., Galaxy Formation, Springer-Verlag, 2008

[15] Mandelbrot B, The fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman and Company, New York, 1982

[16] Martínez V., Saar E., Clustering Statistics in Cosmology. Astronomical Data Analysis II, Proceedings of the SPIE, Vol. 4847, 86 - 100, 2002

[17] Martínez V., Saar E., Statistics of the Galaxy Distribution. Chapman-Hall/CRC. 2002

[18] Miller B., Rouet J., Development of Fractal Geometry in a One Dimensional Gravitational System, Elsevier Science, 2006

[19] Mittal A.K., Loiya Daksh, Fractal dust model of the Universe based on Mandelbrot s Conditional Cosmological Principle and General Theory of Relativity, Fractals 11, 145-153, 2003

[20] Mureika J. R., Fractal Holography: a geometric reinterpretation of cosmological large scale structure , Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Issue 05, pp. 021, 2007

[21] Peacock J. A., Cosmological Physics. Cambridge University Press. 1999

[22] Provenzale A., S piegel E.A., Thienberger R., Cosmic lacunarity. Chaos, American Institute of Physics, 1997

[23] Rubiano G. N., Iteración y Fractales , Universidad Nacional de Colombia, 2009.

[24] Ribeiro M.B., On Modelling a Relativistic Hierarchical (Fractal) Cosmology by Tolman s Spacetime I. Theory, Astrophysics Journal. 388, 1-8, 1992

[25] Reeves H, Ultimas noticias del Cosmos , Editorial Andrés Bello, 1996

[26] Sarkar P., Yadav J. , Pandey B., Bharadwaj S., The scale of homogeneity of the galaxy distribution in SDSS DR6, Royal Astronomical Society: Letters, 399(1), 6, 2008

[27] Szapudi I., A new method for calculating counts in cells. The Astrophysical Journal, 497:16-20, 1998 April 10

[28] Shutz B, A first course in General Relativity , Cambridge University Press, 2006

[29] Sylos Labini F, Pietronero L., Statistical Physics for Cosmic Structures, Eur. Phys. J. B Volume 64, Number 3-4, August 2008

[30] Sylos Labini F, Pietronero L., Complexity in Cosmology , Statistical properties of galaxy large scale structures , in the Proc. of the Erice Course in astro fundamental physics, Nato Advanced Study Institute, International Euroconference Erice, Ettore Majorana Centre December 2000 N. Sanchez and A. Zichichi Editors. NATO-ASI, 2001

[31] Tejeiro J. M., Principios de Relatividad General , Universidad Nacional de Colombia, 2005

[32] Wall J.V., Jenkins C.R. Practical Statistics for Astronomers. Cambridge University Press. 2003