# Una Aplicación de las Series de Lie en el estudio del Problema de los Dos Cuerpos clásico

**J. G. Portilla B.**[1] **y E. Brieva B.**[2]

[1] Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia
[2] Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

### Resumen

El clásico problema de dos cuerpos es analizado por series de Lie a través de una regularización común. Se muestra que por un cambio adecuado de la variable independiente (la introducción de un pseudo-tiempo) es posible obtener seis ecuaciones diferenciales que, integradas por series de Lie, dan expresiones cortas para los componentes de los vectores posición y velocidad. En principio, las expresiones son válidas para las cónicas y el movimiento rectilíneo.

**Palabras claves:** Series de Lie, problema de los dos cuerpos, mecánica celeste.

### Abstract

The classical two-body problem is analiyzed by Lie series through a common regularization. It is showed that by an appropriate change of the independent variable (introducing a pseudo-time) is possible to obtain six differential equations which, integrated by Lie series, give short expressions for the components of the position and velocity vectors. In principle, the expressions are valid for the conics and the rectilinear motion.

**Keywords:** Lie series, two-body problem, Celestial Mechanics.

J. G. Portilla: jgportillab@unal.edu.co
E. Brieva: ebrieva@cable.net.co

## 1. Introducción

Una serie de Lie es una expresión de la forma (Stumpff, 1968):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k f(z) = f(z) + tDf(z) + \frac{t^2}{2!} D^2 f(z) + \dots, \tag{1}$$

donde $f(z)$ es cualquier función que depende de las variables complejas $z_1$, $z_2$, ... $z_n$; $D$ es un operador diferenciable lineal definido por:

$$D = \delta_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \delta_2(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + \delta_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}, \tag{2}$$

donde los coeficientes $\delta_i(z)$ representan funciones de las variables complejas $z_1$, $z_2$, ... $z_n$, las cuales son holomorfas en un cierto vecindario de $z_0$.

Al aplicar $D$ a $f(z)$ se verifica que

$$D^2 f(z) = D(Df(z)); \qquad D^3 f(z) = D(D^2 f(z)); \dots, \qquad D^n f(z) = D(D^{n-1} f(z)). \tag{3}$$

Las series de Lie se han utilizado como una poderosa herramienta para resolver ecuaciones diferenciales. En efecto, considérese el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales representado por:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \qquad \mathbf{z}(0) = (\mathbf{a}). \tag{4}$$

Al introducir el operador diferencial

$$D = \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{a}) \frac{\partial}{\partial a_k}, \tag{5}$$

la solución del sistema (4) se puede escribir como:

$$\mathbf{z}(t) = \exp(tD)\mathbf{a}, \tag{6}$$

donde $\exp(tD)\mathbf{a}$ es una serie de Lie $n$-dimensional.

## 2. El Problema de los dos cuerpos

Como es sabido, el problema clásico de los dos cuerpos, esto es, la descripción del movimiento de dos partículas que se mueven sometidas sólo a la atracción newtoniana, posee solución analítica para todos los valores de las masas y todo tipo de condiciones iniciales. Las ecuaciones de movimiento suelen estar expresadas en coordenadas polares y su integración obliga a considerar la solución por separado en cada caso: la órbita rectilínea (momentum angular nulo) y las cónicas: elipse, parábola e hipérbola. Exceptuando el caso de la parábola, las soluciones involucran en algún momento la resolución de una ecuación trascendente (la ecuación de Kepler en la órbita elíptica, por ejemplo).

En lo que sigue mostraremos una solución del problema cuyas fórmulas son las mismas con independencia del tipo de trayectoria involucrada. Y esto se hará utilizando series de Lie $n$-dimensionales.

La ecuación diferencial vectorial del problema de los dos cuerpos con masas $m_1$ y $m_2$, para el movimiento relativo, es (ver por ejemplo McCuskey, 1963):

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}, \tag{7}$$

donde $\mu = G(m_1 + m_2)$ siendo $G$ la constante de gravitación, $\vec{r}$ el vector relativo entre las dos y $\ddot{\vec{r}}$ su doble derivada con respecto al tiempo. Dicho conjunto de ecuaciones representa, en coordenadas cartesianas espaciales, tres ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Es fácil mostrar que al aplicar la solución (5) al sistema (7) el cálculo de los coeficientes (obtenidos por la recurrencia de $D$ a través de (3)) se va complicando hasta extremos inmanejables. El éxito para obtener una solución concisa y manejable por medio de las series de Lie $n$-dimensionales se logra partiendo de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, escritas de tal forma que la recurrencia de la serie no genera expresiones complicadas cada vez que se procede en el cálculo de los términos de orden creciente. Ello obliga entonces a realizar algún tipo de transformación que permita convertir las ecuaciones diferenciales (7) en un sistema de ecuaciones diferenciales adecuado para abordar la solución por series de Lie. Dicha transformación, como veremos a continuación, puede lograrse mediante una regularización de las ecuaciones.

## 3. La Regularización

Como es evidente, la ecuación diferencial (7) es singular en $r = 0$. Una regularización permite, mediante una transformación de la variable temporal, eliminar la presencia de $r$ en el denominador de las ecuaciones diferenciales. Definimos el operador diferencial temporal de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\mu^{1/2}}{r}\frac{d}{d\tau}. \tag{8}$$

El operador diferencial temporal aplicado sobre sí mismo es entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu^{1/2}}{r}\frac{d}{d\tau}\right) = \frac{\mu^{1/2}}{r}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mu^{1/2}}{r}\frac{d}{d\tau}\right),$$

donde $\tau$ será nuestra nueva variable independiente, un seudotiempo.

Realizando la última derivada y llamando

$$r' = \frac{dr}{d\tau},$$

tendremos

$$\frac{d^2}{dt^2} = \mu\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{r'}{r^3}\frac{d}{d\tau}\right). \tag{9}$$

Al aplicar el operador (9) al vector posición $\vec{r}$ obtenemos el vector aceleración en términos de $\tau$:

$$\vec{\ddot{r}} = \mu\left(\frac{\vec{r''}}{r^2} - \frac{r'\vec{r'}}{r^3}\right), \tag{10}$$

donde se ha utilizado la notación

$$\vec{r'} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}, \qquad \vec{r''} = \frac{d^2\vec{r'}}{d\tau^2}.$$

Reemplazando la aceleración (10) en la ecuación diferencial del problema de los dos cuerpos obtenemos:

$$\vec{r''} - \frac{r'\vec{r'}}{r} + \frac{\vec{r}}{r} = 0. \tag{11}$$

Para lo que se quiere es necesario eliminar de la ecuación anterior, de algún modo, el término $\frac{r'\vec{r'}}{r}$. En lo que sigue se verá cómo se procede. La ecuación (7), al ser multiplicada vectorialmente por $\vec{r}$ a la izquierda e integrada permite obtener el vector constante llamado momentum angular por unidad de masa $\vec{h}$:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \tag{12}$$

Al multiplicar esta última a ambos lados por $\times\ddot{\vec{r}}$ y reemplazar al lado derecho el valor de $\ddot{\vec{r}}$ por el de (7):

$$\vec{h} \times \ddot{\vec{r}} = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times (-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}) = -\frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r}.$$

Aplicando las propiedades del triple producto vectorial se obtiene:

$$\vec{h} \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\left[\dot{\vec{r}}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\right],$$

pero, puesto que $\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2$ y $\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = r\dot{r}$ podemos escribir:

$$\vec{h} \times \ddot{\vec{r}} = -\mu\left[\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2}\vec{r}\right] = -\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right).$$

Como $\vec{h}$ es un vector constante podemos integrar a ambos lados de la ecuación anterior para obtener:

$$\vec{h} \times \dot{\vec{r}} = -\mu\frac{\vec{r}}{r} + \vec{K},$$

donde $\vec{K}$ es un vector constante. Al reemplazar en esta última la definición de $\vec{h}$ dada por (12) y de nuevo utilizando las propiedades del producto triple vectorial llegamos a:

$$\dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = -\frac{\mu\vec{r}}{r} + \vec{K}. \tag{13}$$

Pero $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = r\dot{r}$ y puesto que la velocidad en el problema de los dos cuerpos se puede representar en los cuatro tipos de trayectorias (las tres cónicas y la trayectoria rectilínea) de la siguiente forma

$$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha}\right), \tag{14}$$

donde $\alpha$ es una constante que en el caso de la elipse es mayor que cero y se identifica con el semieje mayor, o en la órbita parabólica es igual a infinito, la ecuación (13) queda entonces:

$$\dot{\vec{r}}(r\dot{r}) = \frac{\mu\vec{r}}{r} - \frac{\mu\vec{r}}{\alpha} + \vec{K},$$

y puesto que de (8):

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\mu^{1/2}}{r}\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\mu^{1/2}}{r}\vec{r'}, \qquad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{\mu^{1/2}}{r}\frac{dr}{d\tau} = \frac{\mu^{1/2}}{r}r', \tag{15}$$

obtenemos, después de dividir por $\mu$ a ambos lados:

$$\frac{\vec{r'}r'}{r} = \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r}}{\alpha} + \frac{\vec{K}}{\mu}.$$

El término de la izquierda era lo que estábamos buscando. Al reemplazar este valor en (11) tenemos:

$$\vec{r''} + \frac{\vec{r}}{\alpha} - \frac{\vec{K}}{\mu} = 0,$$

que al derivar de nuevo con respecto a $\tau$ se convierte en:

$$\vec{r'''} + \frac{\vec{r'}}{\alpha} = 0. \tag{16}$$

Una ecuación equivalente para $r$ puede hallarse de la forma siguiente. De la segunda de las ecuaciones (15) tenemos:

$$r' = \frac{r\dot{r}}{\mu^{1/2}}. \tag{17}$$

Aplicando a ambos lados el operador (8):

$$r'' = \frac{r}{\mu^{1/2}}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\mu^{1/2}}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\right]$$

donde al lado derecho se hizo uso de $r\dot{r} = \vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}$. Al realizar las derivadas al lado derecho se tiene:

$$r'' = \frac{r}{\mu}\left(\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right).$$

Por lo tanto, al reemplazar en esta última las expresiones (7) para $\ddot{\vec{r}}$ y (14) para $\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}$ se tiene:

$$r'' = \frac{r}{\mu}\left(-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{r} + \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{\alpha}\right),$$

y teniendo en cuenta que $\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2$ se llega a:

$$r'' = 1 - \frac{r}{\alpha}, \tag{18}$$

expresión que al ser derivada de nuevo con respecto a $\tau$ queda:

$$r''' + \frac{r'}{\alpha} = 0. \tag{19}$$

Por supuesto que tenemos una ecuación diferencial para $t$. Esta se consigue aplicando el operador (8) a $t$ con lo que

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r}{\mu^{1/2}}. \tag{20}$$

El siguiente paso en convertir las ecuaciones (16) y (19) en ecuaciones diferenciales de primer orden. Ello se logra fácilmente por el siguiente procedimiento. Llamando:

$$\vec{p} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{r}', \tag{21}$$

se deduce que:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = \vec{r''}. \tag{22}$$

De nuevo, al llamar

$$\vec{q} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}, \tag{23}$$

entonces tendremos:

$$\frac{d\vec{q}}{d\tau} = \frac{d^2\vec{p}}{d\tau^2} = \frac{d^3\vec{r}}{d\tau^3} = \vec{r'''}. \tag{24}$$

Con la introducción de las variables $\vec{p}$ y $\vec{q}$ se puede escribir la ecuación diferencial de movimiento (16) como

$$\frac{d\vec{q}}{d\tau} = -\frac{\vec{p}}{\alpha}. \tag{25}$$

Lo que se ha hecho entonces es convertir una ecuación diferencial de tercer orden en tres de primer orden, es decir, escribir el sistema diferencial en su forma canónica:

$$\frac{d\vec{q}}{d\tau} = -\frac{\vec{p}}{\alpha}, \qquad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{q}, \qquad \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{p}. \tag{26}$$

Introduciendo las variables no vectoriales $p$ y $q$ y realizando un procedimiento completamente análogo al anterior se puede convertir la ecuación escalar (19) en el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dq}{d\tau} = -\frac{p}{\alpha}, \qquad \frac{dp}{d\tau} = q, \qquad \frac{dr}{d\tau} = p; \tag{27}$$

Las ecuaciones difrenciales (26) y (27), junto con (20), son las siete ecuaciones diferenciales simultáneas que han de resolverse.

## 4. La Solución

Se dispone de un conjunto de siete ecuaciones diferenciales, cada una de las cuales es de la forma:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = f(\xi), \qquad \xi_{(0)} = C.$$

En conjunto pueden representarse como la ecuación (4). Supóngase entonces que se tienen por condiciones iniciales (en $\tau_0$) los siguientes valores para cada una de nuestras variables: $\vec{q_0}$, $\vec{p_0}$, $\vec{r_0}$, $q_0$, $p_0$, $r_0$, $t_0$. El operador diferencial $D$ en nuestro caso es:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k=1}^{7} f_k(a)\frac{\partial}{\partial a_k} = \left(-\frac{\vec{p}}{\alpha}\right)_{\tau=\tau_0}\frac{\partial}{\partial \vec{q_0}} + (\vec{q})_{\tau=0}\frac{\partial}{\partial \vec{p_0}} + (\vec{p})_{\tau=0}\frac{\partial}{\partial \vec{r_0}} + \\ &+ \left(-\frac{p}{\alpha}\right)_{\tau=0}\frac{\partial}{\partial q_0} + (q)_{\tau=0}\frac{\partial}{\partial p_0} + (p)_{\tau=0}\frac{\partial}{\partial r_0} + \left(\frac{r}{\mu^{1/2}}\right)_{\tau=0}\frac{\partial}{\partial t_0}, \end{aligned}$$

o mejor

$$D = -\frac{\vec{p_0}}{\alpha}\frac{\partial}{\partial \vec{q_0}} + \vec{q_0}\frac{\partial}{\partial \vec{p_0}} + \vec{p_0}\frac{\partial}{\partial \vec{r_0}} - \frac{p_0}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_0} + q_0\frac{\partial}{\partial p_0} + p_0\frac{\partial}{\partial r_0} + \frac{r_0}{\mu^{1/2}}\frac{\partial}{\partial t_0}. \tag{28}$$

De acuerdo con (6) y teniendo en cuenta que nuestra variable independiente es $\tau$ la solución para $\vec{r}$ es:

$$\vec{r} = \exp(\tau D)\vec{r_0},$$

o en forma explícita:

$$\vec{r} = (1 + \tau D + \frac{1}{2!}\tau^2 D^2 + \frac{1}{3!}\tau^3 D^3 + \frac{1}{4!}\tau^4 D^4 + \cdots)\vec{r_0}.$$

Aplicando el operador $D$ definido por (28) a $\vec{r_0}$ y teniendo en cuenta la propiedad (3) se puede encontrar:

$$D\vec{r_0} = \vec{p_0}, \qquad D^2\vec{r_0} = \vec{q_0}, \qquad D^3\vec{r_0} = -\frac{\vec{p_0}}{\alpha},$$

$$D^4\vec{r_0} = -\frac{\vec{q_0}}{\alpha}, \qquad D^5\vec{r_0} = \frac{\vec{p_0}}{\alpha^2}, \qquad D^6\vec{r_0} = \frac{\vec{q_0}}{\alpha^2},$$

$$D^7\vec{r_0} = -\frac{\vec{p_0}}{\alpha^3}, \qquad D^8\vec{r_0} = -\frac{\vec{q_0}}{\alpha^3}, \qquad D^9\vec{r_0} = \frac{\vec{p_0}}{\alpha^4},$$

y así sucesivamente. Por lo tanto, la solución para $\vec{r}$ es, al factorizar los términos en $\vec{p}$ y $\vec{q}$:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \left(\tau - \frac{\tau^3}{3!\alpha} + \frac{\tau^5}{5!\alpha^2} - \frac{\tau^7}{7!\alpha^3} + \cdots\right)\vec{p_0} + \left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!\alpha} + \frac{\tau^6}{6!\alpha^2} - \frac{\tau^8}{8!\alpha^3} + \cdots\right)\vec{q_0},$$

o también:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \tau \left( 1 - \frac{\tau^2}{3!\alpha} + \frac{\tau^4}{5!\alpha^2} - \frac{\tau^6}{7!\alpha^3} + \cdots \right) \vec{p_0}$$
$$+ \tau^2 \left( \frac{1}{2!} - \frac{\tau^2}{4!\alpha} + \frac{\tau^4}{6!\alpha^2} - \frac{\tau^6}{8!\alpha^3} + \cdots \right) \vec{q_0}. \quad (29)$$

Llamando

$$\theta = \frac{\tau}{\sqrt{\alpha}}, \quad (30)$$

la ecuación para $\vec{r}$ puede quedar en la forma:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \tau \left( 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \frac{\theta^6}{7!} + \cdots \right) \vec{p_0}$$
$$+ \tau^2 \left( \frac{1}{2!} - \frac{\theta^2}{4!} + \frac{\theta^4}{6!} - \frac{\theta^6}{8!} + \cdots \right) \vec{q_0}.$$

Ahora bien, recordando que la representación de las funciones seno y coseno en series de potencias es:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Es evidente entonces que:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \tau \left( \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \right) \vec{p_0} + \tau^2 \left( \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \right) \vec{q_0}, \quad (31)$$

donde $\theta$ está dado por (30). Puesto que el operador $D$ tiene la misma forma funcional, tanto para $\vec{p}$ y $\vec{q}$ como para $p$ y $q$, se deduce que la ecuación para $r$ (la magnitud de $\vec{r}$) tiene por solución:

$$r = r_0 + \tau \left( \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \right) p_0 + \tau^2 \left( \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \right) q_0. \quad (32)$$

La solución para $t$ es de la forma:

$$t = \exp(\tau D) t_0,$$

o mejor:

$$t = (1 + \tau D + \frac{1}{2!}\tau^2 D^2 + \frac{1}{3!}\tau^3 D^3 + \frac{1}{4!}\tau^4 D^4 + \cdots) t_0.$$

Aplicando el operador $D$ definido por (28) a $t$ podemos encontrar:

$$Dt_0 = \frac{r_0}{\mu^{1/2}}, \qquad D^2 t_0 = \frac{p_0}{\mu^{1/2}}, \qquad D^3 t_0 = \frac{q_0}{\mu^{1/2}},$$

$$D^4 t_0 = -\frac{p_0}{\mu^{1/2}\alpha}, \qquad D^5 t_0 = -\frac{q_0}{\mu^{1/2}\alpha}, \qquad D^6 t_0 = \frac{p_0}{\mu^{1/2}\alpha^2},$$

$$D^7 t_0 = \frac{q_0}{\mu^{1/2}\alpha^2}, \qquad D^8 t_0 = -\frac{p_0}{\mu^{1/2}\alpha^3}, \qquad D^9 t_0 = -\frac{q_0}{\mu^{1/2}\alpha^3},$$

y así sucesivamente. La solución puede escribirse, factorizando los términos de $p_0$ y $q_0$, como:

$$t = t_0 + \frac{\tau r_0}{\mu^{1/2}} + \frac{p_0}{\mu^{1/2}}\left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!\alpha} + \frac{\tau^6}{6!\alpha^2} - \frac{\tau^8}{8!\alpha^3} + \cdots\right) + \frac{q_0}{\mu^{1/2}}\left(\frac{\tau^3}{3!} - \frac{\tau^5}{5!\alpha} + \frac{\tau^7}{7!\alpha^2} - \frac{\tau^9}{9!\alpha^3} + \cdots\right),$$

la cual, al factorizar $\tau^2$ queda como:

$$t = t_0 + \frac{\tau r_0}{\mu^{1/2}} + \frac{p_0\tau^2}{\mu^{1/2}}\left(\frac{1}{2!} - \frac{\tau^2}{4!\alpha} + \frac{\tau^4}{6!\alpha^2} - \frac{\tau^6}{8!\alpha^3} + \cdots\right) + \frac{q_0\tau^3}{\mu^{1/2}}\left(\frac{1}{3!} - \frac{\tau^2}{5!\alpha} + \frac{\tau^4}{7!\alpha^2} - \frac{\tau^6}{9!\alpha^3} + \cdots\right),$$

y considerando las expansiones en serie del seno y el coseno es evidente que se puede llegar a

$$t = t_0 + \frac{\tau r_0}{\mu^{1/2}} + \frac{p_0\tau^2}{\mu^{1/2}}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right) + \frac{q_0\tau^3}{\mu^{1/2}}\left(\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{\theta^3}\right), \qquad (33)$$

donde $\theta$ está dado por (30). También es posible encontrar una expresión para el vector velocidad. En efecto, de la ecuación (21) obtenemos

$$\vec{p} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau},$$

teniendo en cuenta (20) se deduce

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\mu^{1/2}}{r}\vec{p}, \qquad (34)$$

lo cual requiere encontrar $\vec{p}$. La solución para este es:

$$\vec{p} = \exp(\tau D)\vec{p_0}.$$

Al aplicar el operador (28) a $\vec{p}$ se encuentra:

$$D\vec{p_0} = \vec{q_0}, \qquad D^2\vec{p_0} = -\frac{\vec{p_0}}{\alpha}, \qquad D^3\vec{p_0} = -\frac{\vec{q_0}}{\alpha},$$
$$D^4\vec{p_0} = \frac{\vec{p_0}}{\alpha^2}, \qquad D^5\vec{p_0} = \frac{\vec{q_0}}{\alpha^2}, \qquad D^6\vec{p_0} = -\frac{\vec{p_0}}{\alpha^3},$$
$$D^7\vec{p_0} = -\frac{\vec{q_0}}{\alpha^3}, \qquad D^8\vec{p_0} = \frac{\vec{p_0}}{\alpha^4}, \qquad D^9\vec{p_0} = -\frac{\vec{q_0}}{\alpha^4},$$

y así sucesivamente. La solución se puede escribir, factorizando los términos de $\vec{p}$ y $\vec{q}$, como

$$\vec{p} = \vec{p_0}\left(1 - \frac{\tau^2}{2!\alpha} + \frac{\tau^4}{4!\alpha^2} - \frac{\tau^6}{6!\alpha^3} + \frac{\tau^8}{8!\alpha^4} + \cdots\right) + \vec{q_0}\left(\tau - \frac{\tau^3}{3!\alpha} + \frac{\tau^5}{5!\alpha^2} - \frac{\tau^7}{7!\alpha^3} + \frac{\tau^9}{9!\alpha^4} + \cdots\right).$$

Factorizando $\tau$ en el segundo término del lado derecho y teniendo en cuenta (30):

$$\vec{p} = \vec{p_0}\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots\right) + \vec{q_0}\tau\left(1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \frac{\theta^6}{7!} + \frac{\theta^8}{9!} + \cdots\right),$$

que puede escribirse como:

$$\vec{p} = \vec{p_0}\cos\theta + \vec{q_0}\tau\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right). \tag{35}$$

Por lo tanto, la expresión para el vector velocidad se halla al reemplazar (35) en (34):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\mu^{1/2}}{r}\left[\vec{p_0}\cos\theta + \vec{q_0}\tau\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)\right]. \tag{36}$$

## 5. Las Condiciones Iniciales

Supóngase que se tiene dos partículas interactuantes de masas conocidas y que las condiciones iniciales para el movimiento relativo son:

$$t = t_0, \qquad \vec{r_0} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}, \qquad \dot{\vec{r_0}} = \dot{x}_0\hat{i} + \dot{y}_0\hat{j} + \dot{z}_0\hat{k},$$

así que

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \qquad \text{y} \qquad v_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}.$$

De la ecuación (14) obtenemos inmediatamente el valor de $\alpha$

$$\alpha = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{\mu}}. \tag{37}$$

La constante $\alpha$ constituye un indicador del tipo de órbita que está describiendo el objeto. Si $\alpha$ es positiva la trayectoria es una elipse, si es infinita (esto es, cuando $\frac{rv^2}{\mu} = 2$) es una parábola y si es negativa es una hipérbola. El valor de $\vec{p_0}$ se halla en la siguiente forma. De la primera de las ecuaciones (15) y de (21) tenemos

$$\vec{p} = \frac{\dot{\vec{r}} r}{\mu^{1/2}}$$

o, en el tiempo $t_0$:

$$\vec{p_0} = \frac{r_0}{\mu^{1/2}} \dot{\vec{r_0}}. \tag{38}$$

De igual manera, el valor de $p_0$ puede hallarse con ayuda de la ecuación (17) y de la tercera de las ecuaciones (27):

$$p_0 = \frac{r_0 \dot{r}_0}{\mu^{1/2}} = \frac{\vec{r_0} \cdot \dot{\vec{r_0}}}{\mu^{1/2}}. \tag{39}$$

De las ecuaciones (11), (22) y (23) se deduce

$$\vec{q} = \frac{r'}{r} \vec{r'} - \frac{1}{r} \vec{r}.$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (21) y de tercera de las (27) se tiene, para $t = t_0$:

$$\vec{q_0} = \frac{p_0}{r_0}\vec{p_0} - \frac{1}{r_0}\vec{r_0}. \tag{40}$$

Por último, el valor de $q_0$ se halla con ayuda de (18):

$$q_0 = 1 - \frac{r_0}{\alpha}. \tag{41}$$

## 6. Las Funciones de Stumpff

Se llaman funciones de Stumpff las siguientes funciones trigonométricas:

$$c_0(\theta) = \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\ , \tag{42}$$
$$c_1(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \frac{\theta^6}{7!} + \cdots\ , \tag{43}$$
$$c_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2!} - \frac{\theta^2}{4!} + \frac{\theta^4}{6!} - \frac{\theta^6}{8!} + \cdots\ , \tag{44}$$
$$c_3(\theta) = \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{\theta^3} = \frac{1}{3!} - \frac{\theta^2}{5!} + \frac{\theta^4}{7!} - \frac{\theta^6}{9!} + \cdots\ . \tag{45}$$

Las funciones de Stumpff adoptan los siguientes valores si se toma el límite cuando $\theta \to 0$:

$$\lim_{\theta\to 0} C_0(\theta) = 1, \tag{46}$$
$$\lim_{\theta\to 0} C_1(\theta) = 1, \tag{47}$$
$$\lim_{\theta\to 0} C_2(\theta) = \frac{1}{2}, \tag{48}$$
$$\lim_{\theta\to 0} C_3(\theta) = \frac{1}{6}. \tag{49}$$

## 7. La Órbita Parabólica

El lector habrá notado que, de acuerdo con la introducción de la constante $\alpha$ en la ecuación (14), se tendrá para la órbita parabólica el caso $\alpha = \infty$, esto es, $1/\alpha = 0$, lo cual aparentemente crearía problemas si notamos que $\theta$ tiene a $\alpha$ en su denominador. Pero no hay tal. El tomar $1/\alpha \to 0$ equivale a $1/\sqrt{\alpha} \to 0$ con lo cual $\tau/\sqrt{\alpha} \to 0$; en otras palabras, $\theta \to 0$. Además, de (41) se obtiene $q_0 = 1$. Por lo tanto, las ecuaciones que solucionan el problema en la órbita parabólica se reducen a:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \tau\vec{p_0} + \frac{\tau^2}{2}\vec{q_0}, \tag{50}$$

$$r = r_0 + \tau p_0 + \frac{\tau^2}{2}q_0, \tag{51}$$

$$t = t_0 + \frac{\tau r_0}{\mu^{1/2}} + \frac{p_0\tau^2}{2\mu^{1/2}} + \frac{\tau^3}{6\mu^{1/2}}, \tag{52}$$

$$\vec{v} = \frac{\mu^{1/2}}{r}\left(\vec{p_0} + \vec{q_0}\tau\right). \tag{53}$$

El valor de $\tau$ puede obtenerse por medio de la ecuación cúbica (52) que puede escribirse:

$$\tau^3 + 3p_0\tau^2 + 6r_0\tau - 6\mu^{1/2}(t - t_0) = 0.$$

## 8. La Órbita Hiperbólica

La órbita hiperbólica surge al presentarse el caso $\alpha < 0$. Esto tiene el ligero inconveniente de que $\sqrt{\alpha}$ corresponde al dominio de los números complejos. Pero la aparición de los números complejos es tan solo transitoria y las funciones de Stumpff sufren una ligera modificación en términos de las funciones hiperbólicas, como se apreciará a continuación. Tómese como ejemplo el caso de $c_0(\theta)$ cuando $\theta = \frac{\tau}{\sqrt{-\alpha}}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{-\alpha}}\right) &= 1-\frac{\tau^2}{2!(\sqrt{-\alpha})^2}+\frac{\tau^4}{4!(\sqrt{-\alpha})^4}-\frac{\tau^3}{6!(\sqrt{-\alpha})^6}+\cdots\\
&= 1-\frac{\tau^2}{2!(i\sqrt{|\alpha|})^2}+\frac{\tau^4}{4!(i\sqrt{|\alpha|})^4}-\frac{\tau^3}{6!(i\sqrt{|\alpha|})^6}+\cdots\\
&= 1+\frac{\tau^2}{2!(\sqrt{|\alpha|})^2}+\frac{\tau^4}{4!(\sqrt{|\alpha|})^4}+\frac{\tau^3}{6!(\sqrt{|\alpha|})^6}+\cdots\\
&= \cosh\theta_h,
\end{aligned}$$

donde

$$\theta_h=\frac{\tau}{\sqrt{|\alpha|}}. \tag{54}$$

Es sencillo verificar además que

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-\alpha}}\right)}{\frac{\tau}{\sqrt{-\alpha}}} &= \frac{\operatorname{senh}\theta_h}{\theta_h},\\
\frac{1-\cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{-\alpha}}\right)}{\left(\frac{\tau}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2} &= \frac{\cosh\theta_h-1}{\theta_h^2},\\
\frac{\left(\frac{\tau}{\sqrt{-\alpha}}\right)-\operatorname{senh}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-\alpha}}\right)}{\left(\frac{\tau}{\sqrt{-\alpha}}\right)^3} &= \frac{\operatorname{senh}\theta_h-\theta_h}{\theta_h^3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para la órbita hiperbólica son:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r_0}+\tau\left(\frac{\operatorname{senh}\theta_h}{\theta_h}\right)\vec{p_0}+\tau^2\left(\frac{\cosh\theta_h-1}{\theta_h^2}\right)\vec{q_0}, && (55)\\
r &= r_0+\tau\left(\frac{\operatorname{senh}\theta_h}{\theta_h}\right)p_0+\tau^2\left(\frac{\cosh\theta_h-1}{\theta_h^2}\right)q_0, && (56)\\
t &= t_0+\frac{\tau r_0}{\mu^{1/2}}+\frac{p_0\tau^2}{\mu^{1/2}}\left(\frac{\cosh\theta_h-1}{\theta_h^2}\right)+\frac{q_0\tau^3}{\mu^{1/2}}\left(\frac{\operatorname{senh}\theta_h-\theta_h}{\theta_h^3}\right) && (57)\\
\vec{v} &= \frac{\mu^{1/2}}{r}\left[\vec{p_0}\cosh\theta_h+\vec{q_0}\tau\left(\frac{\operatorname{senh}\theta_h}{\theta_h}\right)\right]. && (58)
\end{aligned}$$

## 9. Un caso especial en la Órbita Rectilínea

La órbita rectilínea surge al presentarse el caso $\vec{\dot{r}} = \beta\hat{u}_r$ (donde $\beta$ es una cantidad con unidades de velocidad que puede ser positiva, negativa e incluso cero), esto es, cuando el momentum angular $\vec{h}$ es nulo (ver ecuación (12)). Pueden presentarse varios casos dependiendo del valor que adopte $\beta$. A continuación se analizará el caso $\beta = 0$. Para un instante dado $t_0 = 0$ se tiene, a una distancia $r = r_0$, la partícula de interés con una velocidad $\vec{v}_0 = 0$. Por lo tanto:

$$\vec{v}_0 = 0, \qquad \alpha = \frac{r_0}{2}, \qquad \vec{p}_0 = 0,$$
$$p_0 = 0, \qquad \vec{q}_0 = -\frac{\vec{r}_0}{r_0}, \qquad q_0 = -1.$$

De lo anterior se deduce que:

$$\theta = \tau\sqrt{\frac{2}{r_0}}, \qquad \text{esto es,} \quad \tau = \theta\sqrt{\frac{r_0}{2}}.$$

Es fácil verificar que la ecuación (31) queda:

$$\vec{r} = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\vec{r}_0 \tag{59}$$

al igual que (ver ecuación (32)):

$$r = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)r_0. \tag{60}$$

La velocidad está dada por (ver ecuación (36)):

$$\vec{v} = -\sqrt{\frac{\mu}{2r_0}}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)\vec{r}_0 \tag{61}$$

y el tiempo por la expresión (ecuación (33)):

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{r_0}{2}\right)^{3/2}(\theta + \operatorname{sen}\theta). \tag{62}$$

Es evidente, observando la ecuación (60), que en el tiempo $t_0 = 0$ se ha de cumplir $\theta = 0$. Así mismo, en el momento de la colisión ($r = 0$) se tendrá $\theta = \pi$. La velocidad, en el instante de la colisión, está dada por el límite

$$\vec{v}_{r=0} = \lim_{\theta \to \pi} \left[ -2\sqrt{\frac{\mu}{2r_0}} \frac{\vec{r_0}}{r_0} \left( \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} \right) \right] = \infty.$$

El tiempo que tarda la partícula en llegar hasta $r = 0$ es

$$t_{r=0} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{r_0}{2} \right)^{3/2}, \qquad \text{esto es,} \qquad t_{r=0} = \frac{\pi \alpha^{3/2}}{\sqrt{\mu}}.$$

## 10. Algunos Ejemplos

### Ejemplo 1

Un cuerpo de masa despreciable –comparada con la del Sol– posee en un instante $t_0 = 0$ los siguientes valores de las componentes de los vectores posición y velocidad con respecto a un plano fundamental dado:

$$x = 3{,}7330754, \quad y = 3{,}0524266, \quad z = 1{,}2174299627,$$

$$\dot{x} = -0{,}0050865, \quad \dot{y} = 0{,}0054936, \quad \dot{z} = 0{,}0024787,$$

en unidades astronómicas y unidades astronómicas por día, respectivamente. Con el fin de mostrar el procedimiento de cálculo vamos a encontrar la posición del cuerpo en cuestión para un seudotiempo (nuestra variable independiente) igual a $\tau = 0{,}69$. Sólo después veremos a que tiempo $t$ corresponden dichas coordenadas. Se comienza por hallar las magnitudes de los vectores posición y velocidad en el instante $t_0$:

$$r_0 = 4{,}9734591, \qquad v_0 = 0{,}0078865.$$

Luego se calcula $\alpha$ por intermedio de (37):

$$\alpha = 5{,}2097544$$

lo que significa que la órbita puede ser elíptica (o rectilínea acotada). Esto se decide calculando el momentum angular. Es fácil verificar que en nuestro ejemplo $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \neq 0$, lo que indica que la trayectoria es una elipse. Luego se calculan las componentes de los vectores $\vec{p_0}$ y $\vec{q_0}$ con ayuda de (38) y (40):

$$(p_0)_x = -1{,}4706181, \qquad (p_0)_y = 1{,}5883178, \quad (p_0)_z = 0{,}7166349,$$

$$(q_0)_x = -0{,}7643183, \qquad (q_0)_y = -0{,}5989262, \quad (q_0)_z = -0{,}2381000.$$

Con el valor que hemos elegido de $\tau$ hallamos $\theta$:

$$\theta = 0{,}3023016.$$

Se puede calcular entonces el valor del tiempo $t$ utilizando (33):

$$t = 200{,}2732043,$$

y las componentes del vector posición y velocidad para dicho tiempo $t$ con ayuda de (31) y (36):

$$x = 2{,}5531691, \qquad y = 3{,}9902577, \quad z = 1{,}6481616,$$

$$\dot{x} = -0{,}0065963, \qquad \dot{y} = 0{,}0038045, \quad \dot{z} = 0{,}0017914.$$

## Ejemplo 2

Un cuerpo de masa despreciable posee en un instante $t_0 = 0$ los siguientes valores de las componentes de los vectores posición y velocidad con respecto a un plano fundamental dado:

$$x = 1{,}7154588, \quad y = -0{,}6997922, \quad z = -0{,}0741581,$$

$$\dot{x} = 0{,}0400547, \quad \dot{y} = 0{,}0097257, \quad \dot{z} = 0{,}0008797,$$

en unidades astronómicas y unidades astronómicas por día, respectivamente. Se desea encontrar la posición del cuerpo en cuestión para un seudotiempo igual a $\tau = 1{,}5$. Las magnitudes de los vectores posición y velocidad en el instante $t_0$ son:

$$r_0 = 4{,}9734591, \qquad v_0 = 0{,}0078865.$$

Luego se calcula $\alpha$ por intermedio de (37):

$$\alpha = -0{,}2143419,$$

lo que significa que la órbita puede ser hiperbólica (o rectilínea no acotada). Como antes, al calcular el momentum angular se verifica que en nuestro ejemplo $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \neq 0$, indicando que la trayectoria es hiperbólica. Las componentes de los vectores $\vec{p_0}$ y $\vec{q_0}$ son:

$$(p_0)_x = 4{,}3174341, \qquad (p_0)_y = 1{,}0483193, \quad (p_0)_z = 0{,}0948288,$$

$$(q_0)_x = 7{,}4456273, \qquad (q_0)_y = 2{,}4099342, \quad (q_0)_z = 0{,}2238527.$$

Con el valor que hemos elegido de $\tau$ hallamos $\theta$:

$$\theta = 3{,}2399456.$$

El valor del tiempo $t$ es:

$$t = 1218{,}8641749,$$

y las componentes del vector posición y velocidad para dicho tiempo $t$ son:

$$x = 46{,}0029068, \qquad y = 11{,}5745773, \quad z = 1{,}0509468,$$

$$\dot{x} = 0{,}0359427, \qquad \dot{y} = 0{,}0100157, \quad \dot{z} = 0{,}0009184.$$

## 11. Conclusiones

Se ha realizado una descripción detallada de la solución por Series de Lie de las ecuaciones diferenciales que describen el problema de los dos cuerpos clásico para cualquier tipo de condiciones iniciales. Se dedujeron ecuaciones específicas para el caso de la trayectoria parabólica, hiperbólica y rectilínea y se presentaron dos ejemplos que describen el proceso numérico involucrado. La solución es elegante en su construcción y tiene la ventaja adicional de estudiar aquellos casos en o cercanos al origen puesto que las ecuaciones están regularizadas.

## Referencias

[1] McCuskey, S.W., *Introduction to Celestial Mechanics*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Massachusetts, 1963.

[2] Stumpff, K., *On the application of Lie-series to the problems of celestial mechanics*, NASA, TN D-4460, Washington, 1968.

[3] Battin, R.H., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, American Institute of Astronautics,Inc., New York, 1999.