

Decoherencia atómica en una zona de Ramsey fría

K. M. Fonseca Romero¹

¹Departamento de Física, Grupo de Óptica e Información Cuántica, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Resumen

Átomos de dos niveles, que interactúan de manera casi resonante con campos electromagnéticos en cavidades frías con bajo factor de calidad y bombeadas por una fuente clásica de radiofrecuencia, pueden modelarse como sistemas de dos niveles interactuando con un campo clásico. Esta modelación es fidedigna aún si el número medio de fotones dentro de la cavidad es del orden de uno, como sucede en varios experimentos. Si la constante de acoplamiento átomo-campo es mucho menor que el inverso del tiempo de vida de los fotones en la cavidad, la aproximación de Weisskopf-Wigner dependiente del tiempo es válida y permite mostrar lo siguiente. El tiempo característico de la decoherencia atómica es inversamente proporcional al producto del cuadrado de la constante de acoplamiento átomo-campo por el tiempo de vida de los fotones en la cavidad. En otras palabras, si el factor de calidad de la cavidad es bajo, el átomo se desacopla de los efectos del ambiente. En estas condiciones, el átomo queda efectivamente acoplado con un campo “clásico” de intensidad igual a la un fotón.

Palabras Clave: Decoherencia, Zonas de Ramsey, Límite clásico.

Abstract

Two-level atoms, almost in resonance with electromagnetic fields in cold low-quality-factor cavities pumped with a classical radiofrequency source, can be modeled as two-level systems interacting with a classical field. This model is faithful even if the average photon number, inside the cavity, is of the order of one, as has been reported in several experiments. If the atom-field coupling constant is much smaller than the inverse of the photon mean lifetime, the time-dependent Weisskopf-Wigner approximation is valid and allows to show the following. The atomic decoherence characteristic time is inversely proportional to the product of the square of the coupling constant and the photon mean lifetime. In other words, if the cavity quality factor is small, the atom decouples from its environment. Under these conditions, the atom effectively couples to a “classical” field with mean number of photons equals to one.

Keywords: Decoherence, Ramsey zones, Classical limit.

1. Introducción

Con ayuda de los interferómetros, uno de los aparatos cuánticos (aún cuando los hay clásicos) conceptualmente más sencillos, ha sido posible realizar lindos experimentos que prueban la naturaleza cuántica de los sistemas físicos, entre los cuales, solamente para mencionar un par, tenemos la interferencia de uno y dos fotones [1]. Desde la década de los treinta del siglo pasado la interferometría de átomos, desarrollada por el físico estadounidense Norman F. Ramsey, también se ha venido usando tanto como una herramienta para la investigación de las propiedades cuánticas de los átomos, en particular la espectroscopía de alta precisión, como para aplicaciones tales como los relojes atómicos. Para la realización de interferometría atómica [2] se requieren dos cavidades espacialmente separadas, a través de las cuales pasa un haz de átomos. En cada una de las cavidades, conocidas como zonas de Ramsey, los átomos interactúan con el campo y sufren una rotación en el espacio de estados. En la actualidad las zonas de Ramsey continúan siendo usadas

en experiencias de electrodinámica de cavidades [3, 4, 5, 6, 7], y se constituyen, en la jerga de la teoría cuántica de la información, en compuertas de un bitio cuántico. Para modelar este comportamiento basta suponer que los átomos interactúan con un campo eléctrico clásico. A pesar de que la teoría así formulada predice correctamente las características de la interferencia atómica, el modelo de campo clásico no es realista, debido a que mediciones precisas de los campos electromagnéticos de las cavidades, que se mantienen a bajas temperaturas (del orden de algunos Kelvin), demuestran que el número medio de fotones dentro de la cavidad es de alrededor de uno. Así, la hipótesis necesaria para describir el campo como clásico, que su intensidad sea muy alta, hablamos de más de un millón de fotones en media, se viola manifiestamente.

El problema del comportamiento clásico de campos con pocos fotones ha sido tratado usando varios tratamientos diferentes en las referencias [8, 9, 10, 11]. En este trabajo vamos a emplear una aproximación tipo Weisskopf-Wigner dependiente del tiempo, para atacar este problema. En la sección 2 establecemos el modelo, en la sección 3 encontramos la ecuación de movimiento para el átomo y en la sección 4 sacamos algunas conclusiones.

2. Modelo

Para modelar el sistema debemos recordar que tenemos un átomo que interactúa con un modo del campo electromagnético sostenido en una cavidad con pérdidas. El átomo está preparado en un estado de Rydberg con tiempo de vida mucho mayor que el tiempo de vida de los fotones en la cavidad. La cavidad se bombea de manera continua con una fuente clásica de microondas (de intensidad alta). Debido a que la frecuencia del modo sostenido en la cavidad es casi resonante con una transición permitida del átomo, desde el estado en que se ha preparado hacia otro estado, consideramos que solamente son necesarios estos dos niveles para describir al átomo. La interacción puede describirse en la aproximación de ondas largas, porque el tamaño atómico es mucho menor que la longitud de onda del modo de la cavidad. Los términos antirrotativos de la interacción puede obviarse, porque corresponden a pequeñas

correcciones a altísimas frecuencias (del doble de la frecuencia de resonancia), a menos que tengamos campos muy intensos. Como el momento del átomo es grande, la energía cinética de su centro de masa, comparada con el potencial de interacción, también lo es. En estas condiciones podemos ignorar posibles efectos de reflexión en el potencial, y considerar que el centro de masa del átomo se comporta de manera clásica. Los experimentos se conducen a muy bajas temperaturas, de modo que el número medio de fotones térmicos, en ausencia de bombeamiento, es mucho menor que uno, y del orden de uno en presencia del mismo.

Empleando las consideraciones del párrafo anterior describimos un átomo atravesando una zona de Ramsey por el Hamiltoniano siguiente

$$\begin{aligned}
 H &= \hbar\omega_A\sigma_z/2 + \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) + \hbar \sum_k \omega_k(b_k^\dagger b_k + 1/2) \\
 &+ \hbar \sum_k c_k(a^\dagger b_k + ab_k^\dagger) + \hbar F(ae^{i\omega_B t} + a^\dagger e^{-i\omega_B t}) \\
 &+ \hbar g(a^\dagger \sigma_- + a\sigma_+)W(t; t_0, t_0 + T) \quad (1) \\
 &= H_0 + H_I = H_0 + \hbar g(a^\dagger \sigma_- + a\sigma_+)W(t, t_0, t_0 + T). \quad (2)
 \end{aligned}$$

A partir de los dos estados relevantes del átomo, que designamos por e y g , definimos los siguientes operadores

$$\sigma_z = ee - gg, \quad \sigma_- = ge = \sigma_+^\dagger.$$

La diferencia de energía entre el estado “excitado” e y el estado “base” g , es $\hbar\omega$. Las comillas se refieren al hecho de que ambos estados son excitados, incluso altamente excitados. Los operadores de creación a^\dagger (b_k^\dagger) y aniquilación a (b_k) del campo electromagnético (del reservorio a temperatura cero) satisfacen las relaciones de conmutación bosónicas usuales $[a, a^\dagger] = 1$ ($[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{k,l}$). La energía de un fotón del modo del campo sostenido en la cavidad (de una excitación del i -ésimo modo del reservorio) es $\hbar\omega$ ($\hbar\omega_k$). El modo de la cavidad intercambia energía con cada uno de los modos de la cavidad a través de una interacción de tipo RWA (aproximación de onda rotativa), que conserva el número de excitaciones. Las constantes de acoplamiento $\hbar c_k$ son muy pequeñas, de modo que el interacción

del campo de la cavidad con los modos del reservorio es muy débil. Hemos designado por $\hbar F$ a la constante de acoplamiento del campo dentro de la cavidad con el campo clásico de bombeamiento, con frecuencia ω_B . La interacción átomo-campo también es del tipo onda rotativa. La constante de acoplamiento promedio entre el campo y el átomo se denota por $\hbar g$ y corresponde a

$$g = \frac{1}{T} \int_0^T dt g(t),$$

en donde $g(t)$ es la constante de interacción instantánea, que no es constante porque, a medida que el átomo atraviesa la cavidad, la amplitud del campo eléctrico cambia; podemos decir que este efecto se debe al perfil campo. El átomo pasa la cavidad con momento del centro de masa constante: comienza a atravesar el campo en el instante t_0 y termina de atravesarlo T segundos después. La función $W(t, t_0, t_0 + T)$ es una función del tiempo que se anula en todas partes, excepto entre t_0 y $t_0 + T$, intervalo durante el cual asume el valor uno. Resumiendo, los términos que componen el hamiltoniano del sistema son los siguientes: la energía libre del átomo de dos niveles, la energía libre del modo del campo electromagnético sostenido por la cavidad, la energía libre de los modos del reservorio de temperatura cero, la interacción entre el modo de la cavidad y los modos del reservorio, el término de bombeamiento y finalmente la interacción entre el modo electromagnético y el átomo.

La menor de las escalas de tiempo del problema que tratamos es el tiempo de correlación del reservorio τ_B . La pérdida de energía en la cavidad es exponencial, con un tiempo de vida de los fotones de la cavidad igual a τ_f . La frecuencia de la cavidad, ω , está muy cerca de las frecuencias de transición atómica ω_A y de bombeamiento, ω_B . La constante de acoplamiento con el campo de bombeamiento $\hbar F$ se escoge de modo a tener alrededor de un fotón en media en la cavidad. El tiempo de interacción del átomo con la cavidad se escoge para que corresponda a un pulso $\pi/2$ (según se mide en la esfera de Bloch), es decir el tiempo necesario para ir del polo norte de la esfera de Bloch (el estado e) a un estado del ecuador (como $(e + g)/\sqrt{2}$). Consideramos que el tiempo necesario para comenzar la interacción átomo-campo, t_0 es suficientemente grande

para asegurar que el campo sometido a disipación y bombeamiento ya se encuentra en su estado estacionario. Finalmente, suponemos que el estado inicial del sistema completo átomo-campo-reservorio es

$$\rho(t) = \rho_A(0) \otimes \rho_C(0) \otimes \prod_k |0_k\rangle\langle 0_k|, \quad (3)$$

es decir, que mientras el estado del átomo ρ_A y del modo de la cavidad ρ_C son arbitrarios, el reservorio de energía se encuentra en su estado fundamental (temperatura zero).

3. Ecuación de movimiento para el átomo

Cuando un sistema cuántico se acopla débilmente a un reservorio, su dinámica puede obtenerse mediante la aproximación de Born-Markov, la cual, hablando de manera imprecisa, corresponde a la exponenciación de la dinámica, en la imagen de interacción, aproximada hasta segundo orden, seguida de una integración hasta tiempo infinito de términos que tienen que ver con las correlaciones del baño. Es interesante notar que, si no se realiza la segunda parte de la aproximación, la dinámica se torna válida para tiempos cortos. La aproximación de Weisskopf-Wigner dependiente del tiempo, o de Born, se define en el siguiente marco de referencia. Supongamos que tenemos un sistema de interés, digamos A , y los grados de libertad con los cuales interactúa, digamos B . Supongamos que el hamiltoniano total tiene la estructura (2), en donde H_0 actúa de manera separada sobre el sistema de interés y sobre los grados de libertad de su entorno, y H_I actúa sobre ambos. Supongamos, finalmente, que el estado inicial del sistema es separable, y de la forma

$$\rho(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_B(0). \quad (4)$$

En esas condiciones la aproximación de Weisskopf-Wigner dependiente del tiempo para el operador de densidad reducida del sistema

A, $\rho_A(t) = \text{tr}_B \rho(t)$, corresponde a la ecuación maestra

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_A(t)}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\langle \tilde{H}'_I(t) \rangle, \bullet] \tilde{\rho}_A(t) \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{Tr}_B [\tilde{H}'_I(t) - \langle \tilde{H}'_I(t) \rangle, [\tilde{H}'_I(\tau) - \langle \tilde{H}'_I(\tau) \rangle, \rho_B(0) \bullet]] \tilde{\rho}_A(t), \end{aligned} \quad (5)$$

donde la virgulilla ($\tilde{}$) indica que estamos en la imagen de interacción. Usamos la notación $\langle \tilde{H}'_I(t) \rangle$ para representar el promedio

$$\langle \tilde{H}'_I(t) \rangle = \text{Tr}_B \left(\tilde{H}'_I(t) \rho_B(0) \right).$$

Puede demostrarse que la aproximación de Weisskopf–Wigner dependiente del tiempo es válida para acoplamiento suficientemente débiles y que, para acoplamientos fuertes, es válida para tiempos cortos [12]. En particular, esta aproximación es exacta para los modelos de las referencias [13, 14]. Si hacemos que el tiempo t , que aparece en el límite superior de la integral de la ecuación (5), tienda a infinito, e imponemos la condición $\langle \tilde{H}'_I(t) \rangle = 0$, obtenemos la aproximación de Born–Markov usual.

En el caso del hamiltoniano (1), el hamiltoniano de interacción en la imagen de interacción, $\tilde{H}_I(t)$, es

$$\begin{aligned} \tilde{H}_I(t) &= e^{iH_0 t/\hbar} H_I e^{-iH_0 t/\hbar} \\ &= \hbar g W(t, t_0, t_0 + T) (\sigma_+ e^{i\omega A t} a(t) + \text{h.c.}), \end{aligned} \quad (6)$$

en donde, como es costumbre, h.c. indica el hermitiano conjugado. Debido a la aparición de la función W vemos que uno de los ingredientes necesarios en la descripción de la dinámica reducida del átomo es el comportamiento del modo de la cavidad para tiempos mayores a t_0 , como función de la disipación y del bombeamiento. Dada la suposición de disipación fuerte tendremos que el comportamiento relevante del campo de la cavidad es el del régimen estacionario, ya que $t_0/\tau_f \gg 1$. Las ecuaciones para los operadores de aniquilación del modo de la cavidad y de los modos del ambiente son las siguientes (con el punto indicando la derivada temporal)

$$\dot{a} = -i\omega a - i \sum_k c_k b_k + F e^{-i\omega_B t}, \quad (7)$$

$$\dot{b}_k = -i\omega_k b_k - i c_k a. \quad (8)$$

Resolviendo (8) en términos de a , y empleando esta solución en (7) obtenemos la ecuación integrodiferencial

$$\begin{aligned} \dot{a} + i\omega a + \int_0^t d\tau \sum_k c_k^2 e^{-i\omega_k(t-\tau)} a(\tau) \\ = -i \sum_k c_k b_k(0) e^{-i\omega_k t} + F e^{-i\omega_B t}. \end{aligned} \quad (9)$$

A partir de los datos experimentales sabemos que, para tiempos mucho mayores que τ_B , el tercer término del lado izquierdo de la ecuación (9) puede aproximarse por $(-i\delta\omega + \gamma_A)a(t)$, donde $\delta\omega$ es un corrimiento de frecuencia y γ_A , es la mitad de la tasa de pérdida de fotones. Hacemos caso omiso de $\delta\omega$, teniendo en cuenta que el corrimiento de frecuencia es usualmente muy pequeño. Así, de manera efectiva hemos realizado la aproximación

$$\sum_k c_k^2 e^{-i\omega_k(t-\tau)} \approx \gamma_A \delta(t-\tau), \quad (10)$$

la cual puede usarse para resolver la ecuación (9). En la aproximación markoviana el operador de aniquilación del modo del campo es

$$\begin{aligned} a(t) &= a(0)e^{-i\omega t - \gamma_A t} - i \int_0^t d\tau \sum_k c_k e^{(-i\omega - \gamma_A)(t-\tau)} e^{-i\omega_k \tau} b_k(0) \\ &\quad + F \int_0^t d\tau e^{(-i\omega - \gamma_A)(t-\tau)} e^{-i\omega_B \tau} \\ &= \left(a(0) - \frac{F}{\gamma_A + i(\omega - \omega_B)} \right) e^{-i\omega t - \gamma_A t} + \frac{F e^{-i\omega_B t}}{\gamma_A + i(\omega - \omega_B)} \\ &\quad - i \int_0^t d\tau \sum_k c_k e^{(-i\omega - \gamma_A)(t-\tau)} e^{-i\omega_k \tau} b_k(0). \end{aligned} \quad (11)$$

Tomando la media de (11) sobre el estado inicial (3) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle a(t) \rangle &= \left(\langle a(0) \rangle - \frac{F}{\gamma_A + i(\omega - \omega_B)} \right) e^{-i\omega t - \gamma_A t} + \frac{F e^{-i\omega_B t}}{\gamma_A + i(\omega - \omega_B)} \\ &= \langle a(t) \rangle_T + \langle a(t) \rangle_S, \end{aligned} \quad (12)$$

en donde los subíndices T y S se refieren a los comportamientos transitorio y estacionario, respectivamente. Definimos $\delta a(t)$ como

$$\begin{aligned}\delta a(t) &= a(t) - \langle a(t) \rangle \\ &= \delta a(0)e^{-i\omega t - \gamma_A t} - i \int_0^t d\tau e^{(-i\omega - \gamma_A)(t-\tau)} e^{-i\omega_k \tau} b_k(0).\end{aligned}\quad (13)$$

También definimos $k(t)$ y $A_{\pm}(t)$ como

$$k(t) = \langle a(t) \rangle \exp(i\omega_A t), \quad \text{y} \quad A_{-(+)}(t) = e^{(-)i\omega_A t} \delta a^{(\dagger)}(t).\quad (14)$$

Estas definiciones nos ayudan a escribir la ecuación dinámica para el operador densidad del átomo (5) como

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\rho}_A(t)}{dt} &= -igW(t; t_0, t_0 + T)[k(t)\sigma_+ + \text{h.c.}, \bullet]\tilde{\rho}_A(t) \\ &\quad - g^2W(t; t_0, t_0 + T) \int_{t_0}^t d\tau \mathcal{K}(\tau, t) \tilde{\rho}_A(t),\end{aligned}\quad (15)$$

con

$$\mathcal{K}(\tau, t) = \text{Tr}_B[\sigma_+ A_-(t) + \text{h.c.}, [\sigma_+ A_-(\tau) + \text{h.c.}, \rho_B(0) \bullet]].$$

Teniendo en cuenta los promedios

$$\langle b_k b_l \rangle = \langle b_k^\dagger b_l^\dagger \rangle = \langle b_k^\dagger b \rangle = 0, \quad \langle b_k b_l \rangle = \delta_{k,l},\quad (16)$$

podemos simplificar la ecuación (15) así

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} &= -igW(t; t_0, t_0 + T)[k(t)\sigma_+ + \text{h.c.}, \bullet]\tilde{\rho}_S(t) \\ &\quad - g^2W(t; t_0, t_0 + T) \int_{t_0}^t d\tau \text{Tr}_B(\langle A'_-(t)A'_+(\tau) \rangle (\sigma_+\sigma_- \bullet - \sigma_- \bullet \sigma_+) \\ &\quad + \langle A'_-(\tau)A'_+(t) \rangle (\bullet \sigma_+\sigma_- - \sigma_- \bullet \sigma_+)) \tilde{\rho}_S(t),\end{aligned}\quad (17)$$

con

$$\begin{aligned}
 \nu(t, \tau) &= \langle A'_-(t)A'_+(\tau) \rangle \\
 &= e^{i\omega_A t} (-i) \int_0^t dt' \sum_k c_k e^{(-i\omega - \gamma_A)(t-t')} e^{-i\omega_k t'} \times \\
 &\quad \times e^{-i\omega_A \tau} (i) \int_0^\tau d\tau' \sum_l c_l e^{(i\omega - \gamma_A)(\tau-\tau')} e^{i\omega_k \tau'} \delta_{k,l} \\
 &= \int_0^t dt' \int_0^\tau d\tau' e^{i\omega_A(t-\tau)} e^{(-i\omega - \gamma_A)(t-t')} e^{(i\omega - \gamma_A)(\tau-\tau')} \sum_k c_k^2 e^{-i\omega_k(t'-\tau')}.
 \end{aligned}$$

Empleando nuevamente la aproximación(10), realizando las integrales y descartando los termos transitorios tenemos

$$\nu(t, \tau) = \frac{1}{2} e^{-(\gamma_A + i(\omega - \omega_A))(t-\tau)} = S(t - \tau) - A(t - \tau), \quad (18)$$

en donde $S(t - \tau)$ es una función simétrica y $A(t - \tau)$ una función antisimétrica

$$\begin{aligned}
 S(u) &= \frac{1}{2} e^{-\gamma_A u} \cos((\omega - \omega_A)u), \\
 A(u) &= \frac{-i}{2} e^{-\gamma_A u} \sin((\omega - \omega_A)u).
 \end{aligned}$$

La ecuación de movimiento para la densidad atómica queda así

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} &= -igW(t; t_0, t_0 + T)[k(t)\sigma_+ + \text{h.c.}, \bullet] \tilde{\rho}_S(t) \\
 &\quad -g^2W(t; t_0, t_0 + T) \int_{t_0}^t d\tau S(t - \tau) (\sigma_+\sigma_- \bullet - 2\sigma_- \bullet \sigma_+ + \bullet\sigma_+\sigma_-) \tilde{\rho}_S(t) \\
 &\quad -g^2W(t; t_0, t_0 + T) \int_{t_0}^t d\tau A(t - \tau) [\sigma_+\sigma_-, \bullet] \tilde{\rho}_S(t). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Realizando las integraciones tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{\rho}_A(t)}{dt} &= -igW(t; t_0, t_0 + T)[k(t)\sigma_+ + (k(t))^*\sigma_- + g\eta(t - t_0)\sigma_z, \bullet] \tilde{\rho}_A(t) \\
 &\quad -g^2W(t; t_0, t_0 + T)\mu(t - t_0) (\sigma_+\sigma_- \bullet - 2\sigma_- \bullet \sigma_+ + \bullet\sigma_+\sigma_-) \tilde{\rho}_A(t), \quad (20)
 \end{aligned}$$

donde

$$k(t) = \frac{F e^{-i(\omega_B - \omega_A)t}}{\gamma_A + i(\omega - \omega_B)}$$

$$\eta(t) = \frac{\gamma_A e^{-\gamma_A t} \sin(\omega - \omega_A)t - (\omega - \omega_A)(1 - e^{-\gamma_A t} \cos(\omega - \omega_B)t)}{2(\gamma_A^2 + (\omega - \omega_A)^2)}$$

$$\mu(t) = \frac{\gamma_A(1 - e^{-\gamma_A t} \cos(\omega - \omega_B)t)}{2(\gamma_A^2 + (\omega - \omega_A)^2)}.$$

Bajo condiciones de resonancia $\omega = \omega_B = \omega_A$, que se indican mediante un subíndice R , las expresiones se simplifican considerablemente,

$$k_R(t) = \frac{F}{\gamma_A}, \quad \eta_R(t) = 0, \quad \mu_R(t) = \frac{1 - e^{-\gamma_A t}}{2\gamma_A}.$$

Podemos ver claramente una separación de contribuciones unitaria y no unitaria: la primera corresponde a un término efectivo de bombeamiento del átomo y a una renormalización de la frecuencia instantánea del átomo, y la segunda corresponde a un acoplamiento efectivo, dependiente del tiempo, con un reservorio a temperatura cero, que tiene forma de Lindblad [15], ligeramente generalizada para permitir coeficientes dependientes del tiempo. Enseguida nos restringimos al caso resonante.

4. Resultados y conclusiones

El término unitario es el que se necesita para hacer una descripción “clásica” del campo electromagnético. En efecto, si nos devolvemos a la imagen de Schrödinger, ignoramos las contribuciones no unitarias y escribimos el estado atómico inicial como

$$\psi(t) = \alpha(t) |e\rangle + \beta(t) |g\rangle, \quad (21)$$

encontramos la siguiente dinámica para los coeficientes α y β

$$\begin{pmatrix} \alpha(t)e^{i\omega_A t} \\ \beta(t)e^{-i\omega_A t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \end{pmatrix} W(t; t_0, t_0 + T) \cos(gF(t - t_0)/\gamma_A) \\ - i \begin{pmatrix} \beta(0) \\ \alpha(0) \end{pmatrix} W(t; t_0, t_0 + T) \sin(gF(t - t_0)/\gamma_A).$$

Concluimos que el tiempo de tránsito dentro de la cavidad, T , necesario para producir una rotación de $\pi/2$ en la esfera de Bloch que describe el estado atómico es $T = \pi\gamma_A/(2gF)$. Nuestra primera conclusión es que el átomo actúa como se estuviera acoplado a un campo clásico de intensidad igual a la del número medio de fotones presentes en la cavidad, es decir, el tipo de acoplamiento es clásico, pero la intensidad del campo es pequeña.

Una primera observación importante es que el proceso de decoherencia para el átomo, tomando tiempos grandes comparados con el tiempo de vida de los fotones en la cavidad, tiene una tasa característica igual a $g^2/2\gamma_A$. Así, podemos estimar el tiempo de decoherencia atómico como el inverso de esta tasa, $t_D \approx 2\gamma_A/g^2$. Si $g \ll F$, podemos rotar el estado atómico, esencialmente sin pérdida de coherencia. Esta desigualdad puede ponerse en una forma diferente si tenemos en cuenta el hecho de que, en las zonas de Ramsey reales, el número de fotones $n(t)$ es de alrededor de uno

$$n(t) = \langle a^\dagger(t)a(t) \rangle = \langle a^\dagger(t) \rangle \langle a(t) \rangle = (F/\gamma_A)^2, \quad (22)$$

donde usamos (11), (16) y tuvimos en cuenta que los tiempos son largos comparados con el tiempo de vida de los fotones dentro de la cavidad, $t \gg \gamma_A^{-1}$. En cavidades reales $\gamma_A = F\sqrt{n}$, y si

$$g \ll \frac{\gamma_A}{\sqrt{n}} \quad (23)$$

el átomo puede rotarse por un ángulo de $\pi/2$ con pérdida de coherencia ignorable.

Si escribimos la densidad atómica en la base $|e\rangle, |g\rangle$,

$$\tilde{\rho}(t) = \sum_{i,j=e,g} \tilde{\rho}_{ij} |i\rangle\langle j|, \quad (24)$$

podemos transformar la ecuación (20), en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales acopladas,

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{ee} \\ \tilde{\rho}_{eg} \\ \tilde{\rho}_{ge} \\ \tilde{\rho}_{gg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g^2\mu(\tau) & i\frac{g}{\sqrt{n}} & -i\frac{g}{\sqrt{n}} & 0 \\ i\frac{g}{\sqrt{n}} & -g^2\mu(\tau) & 0 & -i\frac{g}{\sqrt{n}} \\ -i\frac{g}{\sqrt{n}} & 0 & -g^2\mu(\tau) & i\frac{g}{\sqrt{n}} \\ g^2\mu(\tau) & -i\frac{g}{\sqrt{n}} & i\frac{g}{\sqrt{n}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{ee} \\ \tilde{\rho}_{eg} \\ \tilde{\rho}_{ge} \\ \tilde{\rho}_{gg} \end{pmatrix},$$

donde $0 \leq \tau = t - t_0 \leq T$.

Como su nombre lo indica, la pureza $0 < \delta = \text{tr}\rho^2 \leq 1$, mide la pureza de un estado: entre más cercano a uno más puro es el estado. Para sistemas de dos niveles el valor mínimo de la pureza es 0.5. Si un estado se transforma de manera unitaria, el estado transformado tiene la misma pureza del estado original

$$\text{Tr}(U\rho U^\dagger)^2 = \text{Tr}(U\rho U^\dagger U\rho U^\dagger) = \text{Tr}(\rho\rho U^\dagger U) = \text{Tr}(\rho)^2,$$

en donde usamos $U^\dagger U = 1$ y la ciclicidad de la traza $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB)$. La pureza atómica en la imagen de interacción $\delta = \text{Tr}\tilde{\rho}_A^2 = \tilde{\rho}_{ee}^2 + \tilde{\rho}_{gg}^2 + 2\tilde{\rho}_{ge}\tilde{\rho}_{eg}$ es idéntica a la pureza atómica en la imagen de Schrödinger porque las dos imágenes están relacionadas por una transformación unitaria. Empleando la ecuación de movimiento para el operador densidad del átomo y la definición de pureza podemos escribir una ecuación de movimiento para la pureza

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \frac{-2g^2}{\gamma_A}(1 - e^{-\gamma_A\tau})(\delta(\tau) - \lambda(\rho_{gg} + \rho_{eg}\rho_{ge})(\tau)), \quad (25)$$

que se obtiene teniendo en cuenta que ρ_A tiene traza uno. Hemos introducido un factor λ por conveniencia, que por ahora debe suponerse igual a uno. Las desigualdades

$$\frac{2g^2}{\gamma_A}(1 - e^{-\gamma_A\tau}) \geq 0, \quad \rho_{gg} \geq 0, \quad \rho_{eg}\rho_{ge} = |\rho_{eg}|^2 \geq 0$$

nos permiten concluir que el término proporcional a λ del lado derecho de la ecuación (25) tiende a aumentar el valor de la pureza. Es decir que si resolvemos la ecuación (25) haciendo $\lambda = 0$ tenemos una cota inferior para la pureza

$$\begin{aligned} \delta(\tau) &\geq \delta(0) \exp\left(-2\frac{g^2}{\gamma_A^2}(e^{-\gamma_A\tau} - 1 + \gamma_A\tau)\right) \\ &\geq \min\left(\exp\left(-2\frac{g^2}{\gamma_A^2}\gamma_A^2\tau^2\right), \exp\left(-2\frac{g^2\tau}{\gamma_A}\right)\right). \end{aligned} \quad (26)$$

En las condiciones experimentales

$$\delta\left(T = \frac{\pi\gamma_A}{2gF}\right) > \delta(0)e^{-\left(\frac{\pi\gamma_A}{\sqrt{2}F}\right)^2} = \delta(0)e^{-\frac{\pi^2 n}{2}} \approx 0,9928 \delta(0), \quad (27)$$

ya que hemos considerado que el número promedio de fotones en la cavidad es exactamente uno. Empleando la otra desigualdad tenemos

$$\delta\left(T = \frac{\pi\gamma_A}{2gF}\right) > \delta(0)e^{-\frac{\pi g}{2F}} = \delta(0)e^{-\frac{\pi g\sqrt{n}}{2\gamma_A}} \geq \delta(0)\left(1 - \frac{\pi g\sqrt{n}}{2\gamma_A}\right), \quad (28)$$

Aunque estos resultados permiten explicar el comportamiento clásico del campo electromagnético en la cavidad, no deja de ser extraña la ausencia de la constante de acoplamiento campo-átomo en una de las cotas finales. Esto puede ser una consecuencia de la aproximación de Weisskopf-Wigner dependiente del tiempo que hemos empleado, la cual equivale a considerar que el campo de la cavidad continúa siendo coherente, aún cuando átomo y campo interactúan. Si en la dinámica del operador de aniquilación incluimos la interacción con el átomo (ver ecuación (9)), tenemos un término proporcional a g , el cual debe compararse con el término proporcional a F : ya que $F \sim \gamma_A \gg g$, la aproximación es consistente, y las correcciones son de orden $g/\gamma \ll 1$.

Veamos como se aplican estas consideraciones a un experimento real. En las zonas de Ramsey empleadas por Haroche, el valor de g es de aproximadamente $2\pi \times 10$ kHz, mientras γ_A es del orden de algunos MHz. Si el número medio de fotones es uno entonces las correcciones son del orden de kHz/MHz= 10^{-3} . La pureza atómica, en estas condiciones y suponiendo que es uno en el momento que entra a la cavidad, resulta mayor que 0,991. A pesar de la elucidación del mecanismo que permite que acoplamientos fuertes con el ambiente pueda llevar al límite clásico a sistemas con números cuánticos pequeños, no podemos dejar de sorprendernos con este comportamiento.

5. Agradecimientos

Agradecemos la financiación parcial de la DIB-UN.

Referencias

- [1] L. Mandel. *Quantum effects in one-photon and two-photon interference*, Rev. Mod. Phys. **71**, S274 (1999).

- [2] N. F. Ramsey, *A Molecular Beam Resonance Method with Separated Oscillating Fields*, Phys. Rev. **78**, 695 (1950).
- [3] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J. M. Raimond y N. Zagury, *Quantum nondemolition measurement of small photon numbers by Rydberg-atom phase-sensitive detection*, Phys. Rev. Lett. **65**, 976 (1990).
- [4] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich y N. Zagury, *Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of $\hat{a} \sim \hat{a}^{\text{TM}}$ Schrödinger cat states*, Phys. Rev. A **45**, 5193 (1992)
- [5] M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt-Kaler, F. Bernardot, A. Maali, J. M. Raimond y S. Haroche, *From Lamb shift to light shifts: Vacuum and subphoton cavity fields measured by atomic phase sensitive detection*, Phys. Rev. Lett. **72**, 3339 (1994).
- [6] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, J. M. Raimond y S. Haroche. *Quantum Rabi Oscillation: A Direct Test of Field Quantization in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996).
- [7] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raymond y S. Haroche, *Mesoscopic quantum coherences in cavity QED: Preparation and decoherence monitoring schemes*, Phys. Rev. A **53**, 1295 (1996).
- [8] Ji Il Kim, Karen Milena Fonseca Romero, A. M. Horiguti, L. Davidovich, Maria Carolina Nemes, y Antonio Fernando Ribeiro de Toledo Piza, *Classical behavior with small quantum numbers: The physics of Ramsey interferometry of Rydberg atoms*, Phys. Rev. Lett. **82**, 4737 (1999).
- [9] A. B. Klimov, J. L. Romero, y C. Saavedra, *General properties of quantum systems interacting with a field mode in a low-Q*, Phys. Rev. A **64**, 063802 (2001).
- [10] Eduardo Mascarenhas y Marcelo França Santos, *Emergence of classicality in small-number entangled systems*, Phys. Rev. A **79**, 023836 (2009).

-
- [11] M. J. Everitt, W. J. Munro, y T. P. Spiller, *Quantum-classical crossover of a field mode*, Phys. Rev. A **79**, 032328 (2009).
 - [12] Ji Il Kim, M. C. Nemes, A. F. R. de Toledo Piza y H. E. Borges, *Perturbative Expansion for Coherence Loss*, Phys. Rev. Lett. **77**, 207 (1996).
 - [13] N. G. van Kampen, *A soluble model for quantum mechanical dissipation*, J. Stat. Phys. **78**, 299 (1995).
 - [14] K. M. Fonseca Romero y M.C. Nemes, *Quantum decoherence without damping*, Phys. Lett. A **235**, 432 (1997).
 - [15] G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semi-groups*, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).