Renormalización de una Teoría Efectiva

J. M. Cabarcas, J. Morales Aponte

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia

Resumen

Las teorías efectivas son las herramienta más util para describir el comportamiento a bajas energías de una teoría subyacente conocida, por ejemplo la Cromodinámica Cuántia (QCD), pero una de las mayores dificultades de estas teorías es su renormalización. Es necesario hacerla orden por orden en la expansión de la energía. Renormalizamos la teoría efectiva que describe la QCD a bajas energía hasta orden p^4. Mediante el método de Campo de Fondo se obtienen las doce constantes que aparecen en el Lagrangiano efectivo, y de esta forma se obtiene una teoría efectiva de la QCD renormalizada hasta orden p^4.

Abstract

The effective field theories are the best tool to describe that behavior at low energy of a theory known, for example the Quantum Chromodynamics (QCD), but the greater difficulty of these theories is its renormalization. It is necessary doing it order by order in the energy expansion. We renormalizate the effective field theory that describe the QCD at low energies until order p^4. By means the technique the background field method are obtained the twelve constant that appear in the effective lagrangian. Obtaining the renormalizate effective theory of QCD until order p^4.

J. M. Cabarcas: e-mail:migue@scientist.com
J. Morales Aponte : e-mail: jmoralesa@unal.edu.co

1. Introducción

Las teorías de campos efectivos (TCE) son la herramienta teórica apropiada para describir la física de bajas energías de la Cromodinámica Cuántica (QCD), donde la expresión “bajo” está definida con respecto a la escala de energía Λ_{QCD} ($1\ TeV$). A esta escala de energía, debido al confinamiento, los campos gluónicos y de quarks de la QCD no son estados asintóticos. Sin embargo, sabemos las propiedades de simetría de las interacciones fuertes, entonces, podemos escribir una TCE en términos de los estados hadrónicos asintóticos, y parametrizar la información dinámica desconocida en una pocas constantes. Lo que esto significa es que solo se tienen en cuenta los grados de libertad relevantes al problema en análisis y el resto son integrados fuera de la acción. En general las TCE contienen un número infinito de términos, sin embargo, la renormalización no es un problema debido a que a un número dado en la expansión de la energía, la teoría esta especificada por un número finito de acoplamientos, es decir la renormalización se obtiene orden a orden en la expansión de los términos del Lagrangiano.

2. Lagrangiano efectivo para la QCD

El conocimiento convencional sobre las teorías efectivas nos expresa, que para su construcción se debe tener en cuenta las siguientes generalidades

- Los grados de libertad de alta energía (cortas distancias) pueden ser llevados fuera. Mediante la integración funcional se puede obtener un Lagrangiano efectivo que describe los grados de libertad de baja energía.
- El Lagrangiano efectivo a todos los ordenes debe contener todos los posibles términos que son compatibles con la teoría subyacente (aún si estas simetrías son rotas espontáneamente).
- El Lagrangiano efectivo debe respetar el análisis dimensional. Sin embargo, al hacer el análisis dimensional no debemos olvidar la escala de validez Λ de la teoría subyacente.

Como una demostración del poder de este tipo de razonamiento, trataremos el caso de la teoría que describe los bosones de Goldstone sin masa asociados con la ruptura espontánea de la simetría quiral.

La construcción del Lagrangiano efectivo de la QCD, está relacionado con el desarrollo propuesto por el Modelo Sigma Lineal($M\sigma L$) [1]. En este modelo, el Lagrangiano consistente con la invariancia de Lorentz y la simetría quiral (local) surge precisamente como una teoría efectiva, el cual tiene la forma:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f^2}{4}\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U\rangle \tag{1}$$

pero este Lagrangiano no ha tenido en cuenta los campos escalar s y pseudo escalar p, propios del modelo σ. Para tener en cuenta los anteriores campos, adicionamos un término que los contenga, que sea invariante Lorentz y preserve la simetría quiral

$$\frac{f^2}{4}\langle U^\dagger\chi + \chi^\dagger U\rangle \tag{2}$$

donde

$$\chi = 2B_0(s + ip)$$

y B_0 es una constante, que al igual que f no se fija únicamente por requerimientos de simetría.

Entonces el Lagrangiano efectivo a más bajo orden en la energía es

$$\mathcal{L}_{Ef} = \frac{f^2}{4}\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U + U^\dagger\chi + \chi^\dagger U\rangle \tag{3}$$

Debemos recordar que la teorí a efectiva de la QCD funciona hasta cierta escala de energía, pero está de acuerdo con las simetrías de la QCD, las cuales son descritas mediante el Lagrangiano forma

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}^{QCD}_{m_{quark}=0} + \bar{q}\gamma^{\mu}(v_{\mu} + a_{\mu}\gamma_5)q - \bar{q}(s - i\gamma_5 p)q \tag{4}$$

donde

$$\mathcal{L}^{QCD}_{m_{quark}=0} = \frac{-1}{2g^2}\langle G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\rangle + \bar{q}i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - iG_{\mu})q \tag{5}$$

Teniendo en cuenta que nuestro Lagrangiano efectivo debe tener toda la información física de la QCD, es decir, las funciones de Green físicas se obtienen de la derivada funcional respecto a el campo de interés del funcional generatriz $Z[v, a, s, p]$, podemos relacionar la teoría subyacente (QCD) con la teoría a bajas energías mediante la integral de camino

$$\begin{aligned} e^{iZ} &= \int \mathcal{D}q\mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}G_{\mu} exp\left\{i\int d^4x\mathcal{L}_{QCD}\right\} \\ &= \int \mathcal{D}U(\phi)\mathcal{D}U^{\dagger}(\phi) exp\left\{i\int d^4x\mathcal{L}_{ef}\right\} \end{aligned} \tag{6}$$

3. Esquema de Renormalización

Dentro del esquema de renormalización, la mejor manera de ver las teorías cuánticas de campo es como teorías efectivas. En particular uno siempre debe tener en mente una cierta escala de corte Λ. Es importante reconocer que esta escala de corte puede presentarse en dos diferentes formas

- Como reflejo de la nueva física de cortas distancias (tal como nuevo tipos de partículas o nuevos tipos de interacciones) que influyen en la escala Λ. En este caso el corte es completamente físico, en el sentido que el marco teórico cambia realmente con la escala.

- Como cuestión de conveniencia. Es muy útil centrarse en una cierta escala de energía (la energía del centro de masa de un proceso de dispersión dado) e ignorar que pasa a una energía mucho más grande que la escla. Para hacer esto es útil colocar un corte.

En nuestro caso dicha escala de corte es Λ_{QCD}.

Por otro lado, al pasar a nivel de un loop, se puede mostrar que la teoría viola unitariedad, a la vez que el modelo σ lineal no es renormalizable completamente. Este problema tiene una solución simple, consistente en considerar los diagramas que contienen un loop, los infinitos resultantes de estos diagramas pueden ser reabsorbidos en las constantes de acoplaimiento que aparecen en el Lagrangiano efectivo al siguiente orden en la expansión de la energía

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 \;=\;& L_1\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U\rangle^2 + L_2\langle D_\mu U^\dagger D_\nu U\rangle\langle D^\mu U^\dagger D^\nu U\rangle \\
+\;& L_3\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U D_\nu U^\dagger D^\nu U\rangle + L_4\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U\rangle\langle U^\dagger\chi + \chi^\dagger U\rangle \\
+\;& L_5\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U(U^\dagger\chi + \chi^\dagger U)\rangle + L_6\langle U^\dagger\chi + \chi^\dagger U\rangle^2 \\
+\;& L_7\langle U^\dagger\chi - \chi^\dagger U\rangle + L_8\langle U^\dagger\chi U^\dagger\chi + \chi^\dagger U\chi^\dagger U\rangle \\
-\;& iL_9\langle F_R^{\mu\nu} D_\mu U D_\nu U^\dagger + D_\mu U^\dagger D_\mu U\rangle + L_{10}\langle U^\dagger F_R^{\mu\nu} U F_L^{\mu\nu}\rangle \\
+\;& H_1\langle F_{R\mu\nu}F_R^{\mu\nu} + F_{L\mu\nu}F_L^{\mu\nu}\rangle + H_2\langle\chi^\dagger\chi\rangle
\end{aligned} \tag{7}
$$

es decir, los infinitos resultantes de los diagramas a orden un Loop, generados por el Lagrangiano a orden p^2 ec(3), seran eliminados con escogencias particulares de las constantes L_1, ...H_2 .[2]

4. Método de Campo de Fondo y Renormalización

Existen diferentes formas de encontrar las correcciones de los diagramas a nivel árbol de una teoría y extenderlos a diagramas de uno o más loops. Un método que funciona particularmente bien para la teoría que estamos tratando es el denominado "Método de campo de Fondo" (Backgroud Field Method) el cual tiene como finalidad reabsorber los infinitos que surgen de los diagramas de un loop y encontrar una expresión finita de la acción del problema que se este estudiando.[4]

Para aplicar el método de Campo de Fondo a nuestra teoría podemos definir $U = \bar{U} + \delta U$ (esta es una entrada del método), siendo $\bar{U}$ la solución de la ecuación de movimiento clásica. La razón principal de la anterior definición es calcular la desviación que tiene la solución de la ecuación de movimiento ante un pequeño cambio alrededor de la misma, generado por el δU. Teniendo en cuenta que $U^\dagger U = 1$, podemos exigir directamente la condición $\bar{U}^\dagger \bar{U} = 1$.

Existen diferentes formas de definir el U, pero en particular nosotros tomaremos

$$U = \bar{U} e^{i\Delta} \tag{8}$$

donde Δ es una constante, de tal forma que

$$\delta U = i\bar{U}\Delta - \frac{1}{2}\bar{U}\Delta^2 + \cdots \tag{9}$$

donde $\Delta = \lambda^a \Delta^a$ y recordando que el Lagrangiano a orden p^2 es de la forma

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f^2}{4}\langle(D_\mu U^\dagger D^\mu U + U^\dagger \chi + \chi^\dagger U)\rangle \tag{10}$$

podemos reemplazar la ec.(8) en la ec.(10) de tal forma que llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= \frac{f^2}{4}\langle(D_\mu \bar{U}^\dagger D^\mu \bar{U} + \bar{U}^\dagger \chi + \chi^\dagger \bar{U})\rangle \\
&- \frac{f^2}{4}\langle(\Delta(\chi^\dagger \bar{U}) - \bar{U}^\dagger \chi) - 2\bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U} D^\mu \Delta)\rangle \\
&+ \frac{f^2}{4}\langle(D_\mu \Delta D^\mu \Delta + \bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U}(\Delta D_\mu \Delta - D_\mu \Delta\Delta))\rangle \\
&+ \frac{f^2}{4}\langle\frac{1}{2}\Delta(\bar{U}^\dagger \chi + \chi^\dagger \bar{U})\Delta\rangle
\end{aligned} \tag{11}$$

esto implica que podemos escribir la funcional generatriz de la forma

$$
\begin{aligned}
e^{iZ} &= \int d[\Delta] e^{i\int \frac{f^2}{4}\langle (D_\mu \bar{U}^\dagger D^\mu \bar{U} + \bar{U}^\dagger \chi + \chi^\dagger \bar{U})\rangle d^4x} \\
&\times \; e^{-\int \frac{f^2}{4}\langle (\Delta(\chi^\dagger \bar{U}) - \bar{U}^\dagger \chi) - 2\bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U} D^\mu \Delta)\rangle d^4x} \\
&\times \; e^{i\int \frac{f^2}{4}\langle (D_\mu \Delta D^\mu \Delta + \bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U}(\Delta D_\mu \Delta - D_\mu \Delta\Delta)) + \frac{1}{2}\Delta(\bar{U}^\dagger \chi + \chi^\dagger \bar{U})\Delta\rangle d^4x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{iZ} &= e^{S[\bar{U}]} \times e^{-\int \frac{f^2}{4}\langle (\Delta(\chi^\dagger \bar{U}) - \bar{U}^\dagger \chi) - 2\bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U} D^\mu \Delta)\rangle d^4x} \\
&\times \int d[\Delta] e^{i\int \frac{f^2}{4}\langle (D_\mu \Delta D^\mu \Delta + \bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U}(\Delta D_\mu \Delta - D_\mu \Delta\Delta)) + \frac{1}{2}\Delta(\bar{U}^\dagger \chi + \chi^\dagger \bar{U})\Delta\rangle d^4x}
\end{aligned} \tag{12}
$$

de lo cual resulta

$$
\begin{aligned}
Z &= S[\bar{U}] + i\int \frac{f^2}{4}\langle (\Delta(\chi^\dagger \bar{U}) - \bar{U}^\dagger \chi) - 2\bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U} D^\mu \Delta)\rangle d^4x \\
&+ \int \frac{f^2}{4}\langle (D_\mu \Delta D^\mu \Delta + \bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U}(\Delta D_\mu \Delta - D_\mu \Delta\Delta)) \\
&+ \frac{1}{2}\Delta(\bar{U}^\dagger \chi + \chi^\dagger \bar{U})\Delta\rangle d^4x
\end{aligned} \tag{13}
$$

donde $S[\bar{U}]$ denota la acción evaluada en la solución clásica. Debemos evaluar las integrales de manera separada. Para la primera integral tenemos:

$$
\begin{aligned}
& i\int \frac{f^2}{4}\langle (\Delta(\chi^\dagger \bar{U}) - \bar{U}^\dagger \chi) - 2\bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U} D^\mu \Delta)\rangle d^4x \\
&= i\int \frac{f^2}{4}\langle \Delta(\chi^\dagger \bar{U}) - \bar{U}^\dagger \chi) - \bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U} D^\mu \Delta + \bar{U} D_\mu \bar{U}^\dagger D^\mu \Delta\rangle d^4x \\
&= i\int \frac{f^2}{4}\langle \Delta\bar{U}(D_\mu D^\mu \bar{U}^\dagger - \chi^\dagger) - \Delta\bar{U}^\dagger (D_\mu D^\mu \bar{U} - \chi) d^4x
\end{aligned} \tag{14}
$$

pero las ecuaciones de movimiento estan dadas por

$$
\begin{aligned}
D_\mu D^\mu \bar{U}^\dagger - \chi^\dagger = 0 \\
D_\mu D^\mu \bar{U} - \chi = 0
\end{aligned} \tag{15}
$$

por tanto la integral de la ec. (14) se anula, de tal manera que solo resta evaluar la segunda integral, es decir

$$\begin{aligned} & \int \frac{f^2}{4}\langle (D_\mu \Delta D^\mu \Delta + \bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U}(\Delta D_\mu \Delta - D_\mu \Delta\Delta))\rangle \\ + & \frac{f^2}{8}\langle \Delta^2(\bar{U}^\dagger \chi + \chi^\dagger \bar{U})\rangle d^4x \end{aligned}$$

esta integral dentro de la funcional generatriz esta integrada en $d[\Delta]$, de tal manera que integrando por partes sobre esta variable, tenemos

$$\begin{aligned} & \int \frac{f^2}{4}\langle (D_\mu \Delta D^\mu \Delta + \bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U}(\Delta D_\mu \Delta - D_\mu \Delta\Delta)) \\ + & \frac{f^4}{8}\Delta(\bar{U}^\dagger \chi + \chi^\dagger \bar{U})\rangle d^4x \\ = & \int \frac{f^2}{4}\langle \Delta D_\mu D^\mu \Delta - \frac{1}{2}\bar{U}^\dagger D^\mu \bar{U}(\Delta D^\mu \Delta) \\ + & \frac{1}{2}\Delta(\bar{U}\chi + \chi^\dagger \bar{U})\Delta\rangle d^4x \end{aligned} \tag{16}$$

teniendo en cuenta que $\Delta = \lambda^a \Delta^a$ y mediante la redefinición

$$d_\mu^{ab} = \delta^{ab} D_\mu + \Gamma_\mu^{ab} \tag{17}$$

$$\Gamma_\mu^{ab} = -\frac{1}{4}\langle [\lambda^a, \lambda^b]\bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U}\rangle \tag{18}$$

$$\sigma_\mu^{ab} = \frac{1}{8}\langle \{\lambda^a, \lambda^b\}(\bar{U}^\dagger \chi + \chi^\dagger \bar{U}) + [\lambda^a, \bar{U}^\dagger D_\mu \bar{U}][\lambda^b, \bar{U}^\dagger D^\mu \bar{U}]\rangle \tag{19}$$

la integral de la ec.(16) es:

$$-i\int \frac{f^2}{4}\Delta^a (d_\mu d^\mu + \sigma)^{ab}\Delta^b d^4x \tag{20}$$

entonces la funcional generatiz es descrita por

$$e^{iZ} = Ne^{iS[\bar{U}]} \int d[\Delta] e^{-i \int \frac{f^2}{4} \Delta^a (d_\mu d^\mu + \sigma)^{ab} \Delta^b d^4 x} \tag{21}$$

esta última integral es gaussiana y puede resolverse mediante la relación

$$\int d[\Delta] e^{-i \int \frac{f^2}{4} \Delta^a (d_\mu d^\mu + \sigma)^{ab} \Delta^b d^4 x} = \left[det \left(\frac{f^2}{4} (d_\mu d^\mu + \sigma)^{ab} \right) \right]^{1/2} \tag{22}$$

de tal forma que la funcional generatriz es ahora

$$e^{iZ} = Ne^{iS[\bar{U}]} e^{\frac{i}{2} \ln det \left(\frac{f^2}{4} (d_\mu d^\mu + \sigma)^{ab} \right)} \tag{23}$$

Si tenemos en cuenta que el determinante $d-$dimensional de $\mathcal{D}$ puede definirse mediante

$$\ln det\mathcal{D} = - \int_0^{i\infty} \frac{d\xi}{\xi} \langle e^{-\xi \mathcal{D}} \rangle \tag{24}$$

podemos recurrir al formalismo del Heat Kernel, el cual es introducido en este método por la igualdad que existe entre nuestro determinante y la representación de la Heat-ecuación via la función ξ de Riemann [4]. Haciendo el reemplazo $\xi \to \tau$, la ec.(24) nos obliga a calcular

$$\langle x | e^{-\tau \mathcal{D}} | x \rangle = H(x, \tau) \tag{25}$$

donde τ es un parámetro perturbativo propio del formalismo de la función de calor; se ha hecho el reemplazo $(d_\mu d^\mu + \sigma)^{ab} \to \mathcal{D}$ y se han tenido en cuenta las coordenadas espaciales. La ec.(25) puede escribirse en la base de momentum mediante la relación

$$H(x, \tau) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip \cdot x} e^{-\tau \mathcal{D}} e^{ip \cdot x} \tag{26}$$

ya que

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{ip\cdot x} \tag{27}$$

y se ha tenido en cuenta que

$$\begin{aligned} d_\mu e^{ip\cdot x} &= e^{ip\cdot x}(ip + \Gamma) \\ &= e^{ip\cdot x}(ip + \Gamma + D_\mu) \\ &= e^{ip\cdot x}(ip + d_\mu) \end{aligned} \tag{28}$$

se encuentra

$$d_\mu d^\mu e^{ip\cdot x} = e^{ip\cdot x}(ip + d_\mu)(ip + d_\mu) \tag{29}$$

lo cual nos deja escribir el Heat Kernel mediante

$$\begin{aligned} H(x,\tau) &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-\tau[(ip_\mu + d_\mu)^2 + \sigma]} \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{\tau p^2} e^{-\tau[d\cdot d + \sigma + 2ip\cdot d]} \end{aligned} \tag{30}$$

expandiendo $e^{-\tau[d\cdot d+\sigma+2ip\cdot d]}$ en Taylor y despreciando la parte imaginaria

$$\begin{aligned} H(x,\tau) = \quad & \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-\tau p^2} \left\{ 1 - \tau[d\cdot d + \sigma] \right. \qquad (31) \\ + \quad & \left. \frac{\tau^2}{2}[(d\cdot d + \sigma)(d\cdot d + \sigma) + 4(p\cdot d)(p\cdot d)] + \ldots \right\} \end{aligned}$$

Por conveniencia consideramos un p euclideo, donde $p_\mu = (p_{1E}, p_{2E}, p_{3E}, -p_{4E})$ y $p_\mu p^\mu = -p_E^2$ el cual nos permite recurrir a las siguientes integrales

$$\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} e^{-\tau p_E^2} = \int \frac{d^d\Omega}{(2\pi)^d} \int dp_E p_E^{d-1} e^{-\tau p_E^2}$$
$$= \frac{(2\pi)^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(d/2)}{2\tau^{d/2}} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\tau^{d/2}} \quad (32)$$

$$\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} p_E^\mu p_E^\nu = \frac{\delta^{\mu\nu}}{d} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\tau^{d/2+1}} \frac{\Gamma(d/2+1)}{\Gamma(d/2)}$$
$$= \frac{\delta^{\mu\nu}}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}\tau^{d/2+1}} \quad (33)$$

para resolver la ec.(31), la cual toma la forma:

$$H(x,\tau) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\tau^{d/2}} \left(1 - \tau\sigma + \frac{\tau^2}{2}\left(\sigma^2 + \frac{1}{6}[d_\mu, d_\nu][d^\mu, d^\nu]\right) \ldots\right) (34)$$

ahora, recordando la ec. (24) podemos escribir

$$\frac{f^2}{4}\frac{i}{2} \ln det\mathcal{D} = -\frac{f^2}{4} \int d^4x \left\{ \frac{3}{d} - \frac{1}{4\pi(d-2)} \langle\sigma\rangle \right. \quad (35)$$
$$\left. + \frac{1}{(4\pi)^2(d-4)} \left\langle \frac{1}{12}[d_\mu, d_\nu][d^\mu, d^\nu] + \frac{1}{2}\sigma^2 \right\rangle \ldots \right\}$$

pero como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{ab} = D_\mu \Gamma_\nu^{ab} - D_\nu \Gamma_\mu^{ab} + \Gamma_\mu^{ac}\Gamma_\nu^{cb} - \Gamma_\nu^{ac}\Gamma_\mu^{cb} = [d_\mu, d_\nu]^{ab} \quad (36)$$

la ec.(35) es

$$\frac{f^2}{4}\frac{i}{2} \ln det\mathcal{D} = -\frac{f^2}{4} \int d^4x \left\{ \frac{3}{d} - \frac{1}{4\pi(d-2)} \langle\sigma\rangle \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(4\pi)^2(d-4)} \left\langle \frac{1}{12}\Gamma_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sigma^2 \right\rangle \ldots \right\} (37)$$

Regresando nuevamente a la definición ec.(18) y ec.(19) realizando un álgebra dispendiosa, que requiere de mucho cuidado, y teniendo en cuenta que la solución de las trazas sigue la identidad de Fiertz que para un espacio N-dimensional tiene la forma

$$\lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} = 2\left(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \tag{38}$$

para $SU(3)$ llegamos a

$$\langle\sigma\rangle = \frac{3}{2}\langle D_\mu\bar{U}^\dagger D^\mu\bar{U}\rangle + \frac{4}{3}\langle\chi^\dagger\bar{U} + \bar{U}^\dagger\chi\rangle \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\langle\Gamma_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\rangle = \ & \tfrac{3}{4}\ \langle D^\mu\bar{U}^\dagger D^\nu\bar{U}D_\mu\bar{U}^\dagger D_\nu\bar{U}\rangle - \frac{3}{4}\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D_\mu\bar{U}D_\nu\bar{U}^\dagger D_\nu\bar{U}\rangle \\ - \ & 3i\langle F^R_{\mu\nu}D^\mu\bar{U}D^\nu\bar{U}^\dagger\rangle - i3\langle F^L_{\mu\nu}D^\mu\bar{U}^\dagger D^\nu\bar{U}\rangle \\ - \ & 3\langle\bar{U}^\dagger F^R_{\mu\nu}\bar{U}F^{L\mu\nu}\rangle - \frac{3}{2}\langle F^R_{\mu\nu}F^{R\mu\nu} + F^L_{\mu\nu}F^{L\mu\nu}\rangle\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\langle\sigma^2\rangle = \ & \tfrac{1}{8}\ (\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D_\mu\bar{U}\rangle)^2 + \frac{1}{4}\langle D_\mu\bar{U}^\dagger D_\nu\bar{U}\rangle\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D^\nu\bar{U}\rangle \\ + \ & \frac{3}{8}\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D_\mu\bar{U}D^\nu\bar{U}^\dagger D_\nu\bar{U}\rangle + \frac{1}{4}\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D_\mu\bar{U}\rangle\langle\chi^\dagger\bar{U} + \bar{U}\chi^\dagger\rangle \\ + \ & \frac{3}{4}\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D_\mu\bar{U}(\chi^\dagger\bar{U} + \bar{U}\chi^\dagger)\rangle + \frac{11}{72}(\langle\chi^\dagger\bar{U} + \bar{U}\chi^\dagger\rangle)^2 \\ + \ & \frac{5}{24}\langle\chi^\dagger\bar{U}\chi^\dagger\bar{U} + \chi\bar{U}^\dagger\chi\bar{U}^\dagger + \chi^\dagger\chi\rangle\end{aligned} \tag{41}$$

Pero para el grupo $SU(3)$ tenemos otra identidad que es util [4],[5].

$$\begin{aligned}\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D^\nu\bar{U}D_\mu\bar{U}^\dagger D_\nu\bar{U}\rangle = \ & - \ 2\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D_\mu\bar{U}D^\nu\bar{U}^\dagger D_\nu\bar{U}\rangle \\ & + \ \frac{1}{2}(\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D_\mu\bar{U}\rangle)^2 \\ & + \ \langle D_\mu\bar{U}^\dagger D_\nu\bar{U}\rangle\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D^\nu\bar{U}\rangle\end{aligned} \tag{42}$$

Insertando estas relaciones ec.(39), ec.(40) y ec.(41) en la ec.(35) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{f^2}{4}\frac{i}{2}\ln\det\mathcal{D} = & - \frac{f^2}{4}\int d^4x\{\frac{3}{d}-\frac{1}{4\pi(d-2)}\frac{3}{2}\langle D_\mu\bar{U}^\dagger D^\mu\bar{U}\rangle \\
& + \frac{4}{3}\langle\chi^\dagger\bar{U}+\bar{U}^\dagger\chi\rangle+\frac{1}{(4\pi)^2(d-4)}[\frac{3}{32}(\langle D_\mu\bar{U}^\dagger D^\mu\bar{U}\rangle)^2 \\
& + \frac{3}{8}\langle D_\mu\bar{U}^\dagger D_\nu\bar{U}\rangle\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D^\nu\bar{U}\rangle \\
& + \frac{1}{8}\langle D_\mu\bar{U}^\dagger D^\mu\bar{U}\rangle\langle\chi^\dagger\bar{U}+\bar{U}^\dagger\chi\rangle \\
& + \frac{3}{8}\langle D_\mu\bar{U}^\dagger D^\mu\bar{U}(\chi^\dagger\bar{U}+\bar{U}^\dagger\chi)\rangle \\
& + \frac{11}{144}(\langle\chi^\dagger\bar{U}+\bar{U}^\dagger\chi\rangle)^2+\frac{i}{4}\langle F^R_{\mu\nu}D^\mu\bar{U}D^\nu\bar{U}+F^L_{\mu\nu}\bar{U}\rangle \\
& - \frac{1}{4}\langle\bar{U}^\dagger F^R_{\mu\nu}\bar{U}F^{L\mu\nu}\rangle-\frac{1}{24}\langle F^R_{\mu\nu}F^{R\mu\nu}+F^L_{\mu\nu}F^{L\mu\nu}\rangle \\
& + \frac{5}{48}\langle\chi^\dagger\chi\rangle]+\ldots\Big\}
\end{aligned} \tag{43}$$

pero vemos que la integral anterior diverge para $d = 0, 2, 4...$, tomando la última parte de la ecuación

$$\begin{aligned}
& \frac{f^2}{4}\int d^4x\frac{1}{(4\pi)^2(d-4)}\left[+\frac{3}{32}(\langle D_\mu\bar{U}^\dagger D^\mu\bar{U}\rangle)^2\right. \\
+ & \frac{3}{8}\langle D_\mu\bar{U}^\dagger D_\nu\bar{U}\rangle\langle D^\mu\bar{U}^\dagger D^\nu\bar{U}\rangle \\
+ & \frac{1}{8}\langle D_\mu\bar{U}^\dagger D^\mu\bar{U}\rangle\langle\chi^\dagger\bar{U}+\bar{U}^\dagger\chi\rangle+\frac{3}{8}\langle D_\mu\bar{U}^\dagger D^\mu\bar{U}(\chi^\dagger\bar{U}+\bar{U}^\dagger\chi)\rangle \\
+ & \frac{11}{144}(\langle\chi^\dagger\bar{U}+\bar{U}^\dagger\chi\rangle)^2+\frac{i}{4}\langle F^R_{\mu\nu}D^\mu\bar{U}D^\nu\bar{U}+F^L_{\mu\nu}\bar{U}\rangle \\
- & \frac{1}{4}\langle\bar{U}^\dagger F^R_{\mu\nu}\bar{U}F^{L\mu\nu}\rangle-\frac{1}{24}\langle F^R_{\mu\nu}F^{R\mu\nu}+F^L_{\mu\nu}F^{L\mu\nu}\rangle \\
+ & \left.\frac{5}{48}\langle\chi^\dagger\chi\rangle\right]
\end{aligned} \tag{44}$$

y comparando directamente el término interno de la ecuación anterior con el Lagrangiano a orden p^4 ec.(7) podemos construir la siguiente tabla

$\bar{L}_1$	$\bar{L}_2$	$\bar{L}_3$	$\bar{L}_4$	$\bar{L}_5$	$\bar{L}_6$	$\bar{L}_7$	$\bar{L}_8$	$\bar{L}_9$	$\bar{L}_{10}$	$\bar{H}_1$	$\bar{H}_2$
$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{144}$	0	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{5}{48}$

Debemos tener en cuenta que las anteriores constantes pueden ser absorbidas en la acción (con lo cual desaparece la divergencia generada por el polo $d = 4$) si exigimos que las constantes del Lagrangiano a orden p^4 sean de la forma

$$L_i = L_i^r + \bar{L}_i \lambda \quad i = 1 - 10 \tag{45}$$

$$H_i = H_i^r + \bar{H}_i \lambda \quad i = 1, 2 \tag{46}$$

donde L_i^r y H_i^r denotan los valores renormalizados y

$$\lambda = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2}{d-4} \right) \tag{47}$$

Sin embargo cuando se realizan los cálculos explícitos de los diagramas a un loop, surge un término adicional, el cual es incluido por completez y corrobora la definición del λ que se muestra en la literatura [3]

$$\lambda = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2}{d-4} - ln(4\pi) - 1 + L_i \right) \tag{48}$$

Por tanto; como ejemplo, si estamos interesados en la acción generada de orden p^4 tenemos que [4]

$$S_4^{ren} = S_4^{des} + S_4^{div} \tag{49}$$

donde

$$
\begin{aligned}
S_4^{div} = & - \lambda \int d^4x \frac{1}{(4\pi)^2(d-4)} \left[+ \frac{3}{32}(\langle D_\mu \bar{U}^\dagger D^\mu \bar{U}\rangle)^2 \right. \\
& + \frac{3}{8}\langle D_\mu \bar{U}^\dagger D_\nu \bar{U}\rangle\langle D^\mu \bar{U}^\dagger D^\nu \bar{U}\rangle \\
& + \frac{1}{8}\langle D_\mu \bar{U}^\dagger D^\mu \bar{U}\rangle\langle \chi^\dagger \bar{U} + \bar{U}^\dagger \chi\rangle + \frac{3}{8}\langle D_\mu \bar{U}^\dagger D^\mu \bar{U}(\chi^\dagger \bar{U} + \bar{U}^\dagger \chi)\rangle \\
& + \frac{11}{144}(\langle \chi^\dagger \bar{U} + \bar{U}^\dagger \chi\rangle)^2 + \frac{i}{4}\langle F^R_{\mu\nu} D^\mu \bar{U} D^\nu \bar{U} + F^L_{\mu\nu}\bar{U}\rangle \\
& - \frac{1}{4}\langle \bar{U}^\dagger F^R_{\mu\nu}\bar{U} F^{L\mu\nu}\rangle - \frac{1}{24}\langle F^R_{\mu\nu}F^{R\mu\nu} + F^L_{\mu\nu}F^{L\mu\nu}\rangle \\
& \left. + \frac{5}{48}\langle \chi^\dagger \chi\rangle \right]
\end{aligned} \tag{50}
$$

Por último hay que tener en cuenta que la funcional generatriz a orden p^4 se define como

$$
e^{iZ_4} = N e^{iS[\bar{U}]} e^{\frac{i}{2}\ln det\left(\frac{f^2}{4}(d_\mu d^\mu + \sigma)^{ab}\right)} \tag{51}
$$

por tanto la funcional generatriz efectiva es

$$
e^{iZ} = N e^{i\int \mathcal{L}_2(\bar{U}) + \mathcal{L}_4(\bar{U})} e^{\frac{i}{2}\ln det\left(\frac{f^2}{4}(d_\mu d^\mu + \sigma)^{ab}\right)} \tag{52}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
Z = & \quad \frac{f^2}{4}\int d^4x \left\{ \left(\frac{1}{4\pi(d-2)}\frac{3}{2} + 1 \right) \langle D_\mu \bar{U}^\dagger D^\mu \bar{U}\rangle \right. \\
& + \left(\frac{1}{4\pi(d-2)}\frac{4}{3} + 1 \right) \langle \chi^\dagger \bar{U} + \bar{U}^\dagger \chi\rangle \\
& + [L_1^r(\langle D_\mu \bar{U}^\dagger D^\mu \bar{U}\rangle)^2 + L_2^r\langle D_\mu \bar{U}^\dagger D_\nu \bar{U}\rangle\langle D^\mu \bar{U}^\dagger D^\nu \bar{U}\rangle \\
& + L_3\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U D_\nu U^\dagger D^\nu U\rangle + L_4^r\langle D_\mu \bar{U}^\dagger D^\mu \bar{U}\rangle\langle \chi^\dagger \bar{U} + \bar{U}^\dagger \chi\rangle \\
& + L_5^r\langle D_\mu \bar{U}^\dagger D^\mu \bar{U}(\chi^\dagger \bar{U} + \bar{U}^\dagger \chi)\rangle \ + L_6^r(\langle \chi^\dagger \bar{U} + \bar{U}^\dagger \chi\rangle)^2 \\
& + L_7(\langle U^\dagger \chi - \chi^\dagger U\rangle)^2 + L_8^r\langle \chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi\rangle \\
& - iL_9^r\langle F^R_{\mu\nu} D^\mu \bar{U} D^\nu \bar{U} + F^L_{\mu\nu}\bar{U}\rangle - L_{10}^r\langle \bar{U}^\dagger F^R_{\mu\nu}\bar{U} F^{L\mu\nu}\rangle \\
& \left. + H_1^r\langle F^R_{\mu\nu}F^{R\mu\nu} + F^L_{\mu\nu}F^{L\mu\nu}\rangle + H_2^r\langle \chi^\dagger \chi\rangle] + \ldots \right\}
\end{aligned} \tag{53}
$$

La cual es la expresión brindada por la literatura [4],[5].

5. Conclusiones

Utilizamos el Método de campo de Fondo para la renormalización de los términos del Lagrangiano a orden p^4 y de esta forma absorber las divergencias provenientes de los cálculos a nivel un loop del Lagrangiano a orden p^2. Este método parte de realizar una expansión de la variable principal del Lagrangiano efectivo (U), como una suma de la solución de la ecuación de movimiento $(\bar{U})$ y una pequeña corrección δU. El tratamiento de la funcional generatriz generada mediante esta transformación, nos lleva a la evaluación de diferentes integrales de camino de Feynman. Una de las tres ecuaciones de camino tiene como término principal la acción evaluada en la solución de la ecuación de movimiento clásica, en tanto que los términos sobrantes pueden ser reescritos en una integral gaussiana. La evaluación de la integral gaussiana nos lleva a utilizar el formalismo de la función ξ de Riemann y consecuentemente la utilización del Heat Kernel. La ecuación del calor tiene una amplia utilización en física y para nosotros nos generó la necesidad de la evaluación de los términos del Heat Kernel. De esta forma renormalizamos el Lagrangiano a orden p^2 con la redefinición de los coeficientes del Lagrangiano a orden p^4.

Referencias

[1] Gell-Mann y Levy. Nuovo Cimento. 16:705-713.1960

[2] J. Gasser and H. Leutwyler. Annals of Phys. 158, 142-210(1984)

[3] H. Leutwyler. Annals of Phys. 235, 164-203(1994)

[4] J. F. Donoghue. Dynamics of the Standard Model. Cambridge UniversityPress (1992)

[5] A.Dobado. Effective Lagrangians for the Standar Model pringer. 1997

[6] J. P. Cole. Progress in Particle and Nuclear Physics. Vol 12 (1984),241-408.