

ECUACIONES DE ONDA RELATIVISTAS Y MODELOS DE QUARKS

Oscar E. Casas B.¹ y Maurizio De Sanctis²

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia

Resumen

Se presentan algunas Ecuaciones de Onda Relativistas (RWE) para dos cuerpos derivadas de la QED, como la ecuación de Breit, Gross y Mandelzweig-Wallace; y se analizan los efectos de sus aproximaciones, sus simetrías y posibilidades de aplicación en la construcción de modelos relativistas de quarks. Finalmente, se exponen en forma general los problemas de la QCD en la descripción de los sistemas hadrónicos y se estudia brevemente un modelo de quarks basado en una generalización de las RWE.

Palabras claves: Ecuaciones de Onda relativistas, Modelos de Quarks, Propagador relativista para dos cuerpos.

Abstract

Some two-body Relativistic Wave Equations (RWE) derived from QED are presented: the Breit, Gross and Mandelzweig-Wallace equations. We analyze their advantages, symmetries and application possibilities for the construction of relativistic quarks models. Finally, we expose in a general form, the problems of QCD in the description of hadronic systems, and a quark model based on a generalization of the RWE is briefly studied.

Keywords: Relativistic Wave Equations, Quark models, Relativistic two-body propagator.

O. Casas: e-mail: oecasasb@unal.edu.co

M. De Sanctis: e-mail: mdesanctis@unal.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de sistemas hadrónicos, requiere en forma esencial, la implementación de formalismos y métodos de cálculo relativistas. Una descripción relativista adecuada de un sistema cuántico y sus interacciones, sólo es posible en el contexto de las *Teorías Cuánticas de Campos (QFT)*. Actualmente, existen QFT para todas las interacciones, excepto para la gravitación, y constituyen hasta el momento, el mejor modelo de la materia a nivel fundamental.

Sin embargo, las QFT encuentran dificultades en el tratamiento de sistemas ligados; en cambio, por construcción, explican muy bien los procesos de colisiones relativistas. Además, a los sistemas hadrónicos corresponde la *Cromodinámica Cuántica (QCD)*, una teoría de campo que no admite un tratamiento perturbativo para el rango de energía relativamente bajo de los sistemas ligados de quarks. Por tanto, queda claro que es necesario encontrar formalismos alternativos para el estudio de sistemas ligados, que incluyan las principales características cinemáticas y dinámicas de las QFT.

De todas las teorías de campo, la más simple y exitosa es la *Electrodinámica Cuántica (QED)*; la impresionante correlación de sus predicciones con los resultados experimentales la sitúa hoy como la teoría más exacta de la Física. Esto se debe principalmente a la posibilidad de un tratamiento perturbativo y a la relativa sencillez de la interacción electromagnética. Las *ecuaciones de onda relativistas (RWE)* son ecuaciones de dos cuerpos derivadas de la QED. Algunas de ellas son: la ecuación de Bethe-Salpeter, la ecuación de Breit [1], [2], la ecuación de Gross [3] y la ecuación de Mandelzweig-Wallace [4], [5] y [6]. Estas ecuaciones, que se han utilizado con éxito también para el estudio de sistemas nucleares, proveen un excelente punto de partida en la construcción de modelos de quark, introduciendo las simetrías y los rasgos dinámicos propios de la QCD de acuerdo a la fenomenología hadrónica. No obstante, difieren en sus propiedades formales y llevan implícitas algunas aproximaciones que deben ser consideradas en su eventual aplicación.

2. REDUCCIÓN DE FERMI-BREIT

Uno de los resultados más importantes en la historia de las ecuaciones de onda relativistas es que la matriz de dispersión de la QED puede interpretarse como un cuasipotencial o potencial semiclásico en el límite no relativista, y bajo la aproximación de Born. Para ilustrar esto, se calcula la amplitud de dispersión correspondiente al diagrama de Feynman para la dispersión de dos partículas cargadas, de carga e_1 y e_2 , siguiendo las reglas de Feynman de la QED en el espacio de momentos:

$$M_{fi} = e_1 e_2 [\bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1)] D_{\mu\nu}(k) [\bar{u}(p'_2) \gamma^\nu u(p_2)] \quad (1)$$

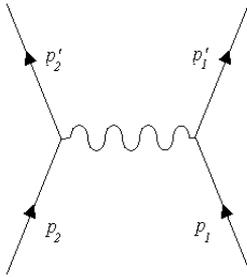


FIGURA 1. Diagrama de Feynman correspondiente a la dispersión de dos electrones.

Utilizando el propagador de Feynman para fotones en el gauge de Coulomb, y despreciando los términos de orden superior a $1/c^2$, es decir, para velocidades mucho menores que c , se encuentra la siguiente expresión [7] para el cuasipotencial:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}) = & e_1 e_2 \left\{ \frac{1}{r} - \frac{\pi \hbar^2}{2c^2} \left[\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right] \delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{2m_1 m_2 c^2 r} \left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_2)}{r^2} \right] \right. \\ & - \frac{\hbar}{4c^2 r^3} \left[\frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{m_1} - \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{m_2} + \frac{2}{m_1 m_2} \left\{ [\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - [\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 \right\} \right] \\ & \left. + \frac{\hbar^2}{4m_1 m_2 c^2 r^3} \left\{ \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - 3 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{r}) \right\} \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

Este desarrollo constituye la ecuación de Fermi-Breit. Si la parte cinemática de la ecuación viene dada por:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= G_0^{-1} = \hat{H}_1^0 + \hat{H}_2^0 \\ \text{con: } \hat{H}_i^0 &= \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m_i} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^4}{8m_i^2c^2} \end{aligned} \quad (3)$$

donde se ha hecho también una aproximación de orden $1/c^2$ en la energía cinética relativista, se obtiene finalmente, la ecuación de la *Reducción de Fermi-Breit* :

$$\left[\hat{H}_1^0 + \hat{H}_2^0 + V - E \right] \psi = 0 \quad (4)$$

La primera fila en la ecuación (2) coincide con el potencial entre dos cargas en movimiento, ya deducido en electrodinámica clásica, y recibe el nombre de *interacción orbital*. Los términos adicionales de (2) debidos al espín no tienen análogo clásico. Éstos pueden separarse en dos grupos: la interacción *espín-orbita* para la segunda fila y la interacción *tensorial* y *espín-espín* para la tercera. El término de interacción espín-orbita, al hacer en (2) que la masa de una de las partículas tienda a infinito, se reduce a

$$V_{LS} = -\frac{e_1e_2}{2m_1^2c^2r^3} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}) \quad (5)$$

que ha sido ampliamente utilizado para explicar el desdoblamiento observado en las líneas espectrales del átomo de hidrógeno.

En la misma fila de interacción espín órbita aparecen dos nuevos términos proporcionales a $1/m_1m_2$, correspondientes a una interacción espín-orbita cruzada entre las partículas. Un acoplamiento parecido se observa en la tercera fila. Los primeros dos términos constituyen la *interacción tensorial* (de rango 2) y el último término, proporcional a $\delta(\mathbf{r})$, representa la interacción espín-espín. La ventaja más importante de esta ecuación, es que permite el tratamiento de partículas con masas similares, ya que incluye correctamente en el orden $1/c^2$, los *efectos de retroceso*.

La reducción de Fermi-Breit ha sido utilizada satisfactoriamente para estimar las diferencias de energía entre los diferentes estados del *Positronio* (un sistema hidrogenoide formado por un electrón y un positrón). Actualmente, el cuasipotencial (2) ha sido utilizado

como inspiración en la construcción de potenciales efectivos quark-quark remplazando el producto de las cargas eléctricas $e_1 e_2$ con $\alpha_s \vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_2$ donde α_s representa la constante efectiva de acoplamiento fuerte y $\vec{\lambda}_i$ las matrices de Gell-Mann de color de los quarks.

3. LA ECUACIÓN DE BETHE-SALPETER

La ecuación de Bethe-Salpeter (B-S), constituye un formalismo no perturbativo, en principio exacto, para la QED de dos partículas, donde grandes conjuntos de diagramas de Feynman de diferente tipo pueden ser sumados mediante la solución de la ecuación. Se trata de una ecuación de onda cuadridimensional [1],[2] de la siguiente forma integral

$$iS_F^{-1}(p_1)S_F^{-1}(p_2)\psi(p_1, p_2) = \int \frac{d^4 p'_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_2}{(2\pi)^4} V(p_1, p_2; p'_1, p'_2)\psi(p'_1, p'_2) \quad (6)$$

donde S_F es *el propagador o función de Green de Feynman para fermiones*. Aún en el marco relativista, debe ser válido el comportamiento asintótico de la función de onda para un proceso de dispersión:

$$N\psi(p_1, p_2; p''_1, p''_2) = (2\pi)^8 \delta^4(p_1 - p''_1) \delta^4(p_2 - p''_2) + iT(p_1, p_2; p''_1, p''_2)S_F(p_1)S_F(p_2) \quad (7)$$

es decir, esta función es una superposición de la onda plana incidente, representada por el primer término, y de una onda esférica dispersada, representada por el segundo. El factor de fase T es denominado matriz de transición. Insertando la ecuación (7) en la ec (6) se encuentra una expresión cuadridimensional de la *ecuación de Lippmann-Schwinger* :

$$T = V + iV S_{F_1} S_{F_2} T \quad (8)$$

que puede resolverse de forma iterativa mediante las *series de Born*:

$$T = V + iV S_{F_1} S_{F_2} V - V S_{F_1} S_{F_2} V S_{F_1} S_{F_2} V + \dots \quad (9)$$

Si se elige como cuasipotencial

$$V = (-ie)^2 [\gamma^\mu iD_{\mu\nu}(k) \gamma^\nu] (2\pi)^4 \delta^4(P - P') \quad (10)$$

donde $D_{\mu\nu}$ es el propagador de Feynman para los fotones y γ^μ son las matrices gamma de Dirac, la ecuación (9) reproduce la suma de todos los diagramas de Feynman de tipo *escalera* para la dispersión de dos partículas:

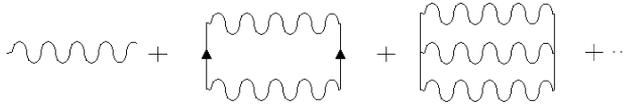


FIGURA 2. Serie de diagramas de Feynman generados por la aproximación de escalera

Así, a partir del primer diagrama o diagrama *irreducible* (kernel), pueden construirse todos los demás diagramas llamados *reducibles*. Esta elección particular del cuasipotencial constituye la *aproximación de escalera*. Si V incluyera todos los diagramas de Feynman irreducibles posibles, se podría cumplir la identidad:

$$T^{(n)} = M^{(2n)} \quad (11)$$

que relaciona los elementos de la matriz de dispersión de la QED con el formalismo integral de la ecuación de Bethe-Salpeter. En otras palabras, la serie de la teoría de perturbaciones sería expresada en una ecuación cerrada. Resaltamos que, sin embargo, la inclusión de todos los diagramas irreducibles es prácticamente imposible.

En el tratamiento de sistemas de dos partículas, resulta muy útil introducir el cuadrimento total y el cuadrimento relativo:

$$P = p_1 + p_2, \quad p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) \quad (12)$$

Con ayuda de éstos, la ecuación de Bethe-Salpeter, fijando el valor de P en el centro de masas (CM), es decir $P_{CM} = (M, \mathbf{0})$, puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \not{P}_{CM} + \not{p} - m \right) \left(\frac{1}{2} \not{P}_{CM} - \not{p} - m \right) \chi(p) \quad (13) \\ = & - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{V}(p, p+k, P_{CM}) \chi(p+k). \end{aligned}$$

Debido a que en el espacio de posiciones la función de onda depende de dos argumentos temporales, es difícil su interpretación física. Este es el precio por construir un formalismo de funciones de onda completamente relativista. Además, es en general imposible encontrar una solución exacta de esta ecuación y existen serias dificultades en el límite de unipartícula, ya que la ecuación se podría reducir a la ecuación de Dirac sólo si el kernel presentara todos los diagramas de escalera y todos los que son generados por el diagrama de caja cruzada [4].

Es interesante examinar la estructura de la ecuación (9). En esta expresión puede verse que cada término de orden superior a dos contiene dos tipos de factores: *dinámicos*, relacionados con V y *cinemáticos*, relacionados con S_F (aunque esta denominación es arbitraria, ya que en las QFT no hay una clara distinción entre lo *cinético* y lo *potencial*). Esto significa que puede extraerse una cinemática y una dinámica particular para muchos cuerpos, a partir de la matriz de dispersión. Por ejemplo, en la reducción de Fermi-Breit, los términos cinemáticos son añadidos al hamiltoniano y no son obtenidos de la matriz de dispersión. Esto se debe al uso de la aproximación de Born, que es equivalente a limitarse al primer diagrama de Feynman de la serie de escalera.

4. REDUCCIONES TRIDIMENSIONALES DE LA ECUACIÓN DE BETHE-SALPETER.

4.1. ECUACIÓN DE BREIT Y ECUACIÓN DE DIRAC PARA DOS CUERPOS.

La ecuación de Breit [1],[2] es una reducción tridimensional de la ecuación B-S en la aproximación de escalera obtenida despreciando la frecuencia del fotón, es decir, si se considera una *interacción instantánea* ($k_0 = \omega/c \rightarrow 0$). Por esto, es conveniente definir una nueva función de onda que sólo dependa de las componentes espaciales de p :

$$\phi(\mathbf{p}) = \int dp_0 \chi(p_0, \mathbf{p}) \quad (14)$$

Es un hecho fundamental de la inclusión de la teoría de la relatividad especial en la mecánica cuántica, que las partículas libres pueden presentar valores positivos y negativos para la energía. Con ayuda de los *operadores de proyección del estado de energía*:

$$\Lambda_i^\pm(\mathbf{p}) = \frac{\varepsilon(\mathbf{p}) \pm \hat{H}_D^i(\mathbf{p})}{2\varepsilon(\mathbf{p})} = |\pm\rangle \langle \pm|_i, \quad \text{con } i = 1, 2 \quad (15)$$

y tras algunos cálculos sencillos, se encuentran las siguientes expresiones para los estados correspondientes a las distintas combinaciones en los signos de la energía:

$$\phi_{+-}(\mathbf{p}) = \phi_{-+}(\mathbf{p}) = 0$$

$$\phi_{++}(\mathbf{p}) = \left(\frac{1}{M-2\varepsilon}\right) \Lambda^{++} e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\nu D_F^{\mu\nu}(0, \mathbf{k}) [\phi_{++}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) + \phi_{--}(\mathbf{p}, \mathbf{k})]$$

$$\phi_{--}(\mathbf{p}) = \left(\frac{-1}{M+2\varepsilon}\right) \Lambda^{--} e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\nu D_F^{\mu\nu}(0, \mathbf{k}) [\phi_{++}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) + \phi_{--}(\mathbf{p}, \mathbf{k})] \quad (16)$$

donde son evidentes las siguientes expresiones para las funciones de Green:

$$g_{++}^{Br} = \frac{1}{M - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad g_{--}^{Br} = \frac{-1}{M + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad g_{-+}^{Br} = g_{+-}^{Br} = 0 \quad (17)$$

ya que $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ en el sistema centro de masa. La ecuación para los estados positivos puede escribirse en la forma de una ecuación de Dirac para dos cuerpos en el espacio de posiciones:

$$\left[E_{CM} - \hat{H}_D^1(i\nabla) - \hat{H}_D^2(i\nabla) \right] \phi_{++}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})_{efec} \phi(\mathbf{r})_{++} \quad (18)$$

donde el potencial efectivo es:

$$V(\mathbf{r})_{efec} = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \gamma_0^1 \gamma_\mu^1 \gamma_0^2 \gamma_\nu^2 D_F^{\mu\nu}(0, \mathbf{k}) \quad (19)$$

Por lo tanto, la *ecuación de Breit* es una RWE para un cuasipotencial correspondiente al intercambio instantáneo de un fotón. No es una ecuación completamente relativista ya que ignora el retardo de la interacción. Sin embargo, esto no representa un problema grave desde el punto de vista práctico, ya que los efectos de retardo pueden incluirse en forma perturbativa en una aplicación dada. Además, como esta ecuación se dedujo para el sistema CM, no es manifiestamente covariante.

Aunque, la ecuación de Breit fue deducida dentro de la aproximación de escalera en QED, puede implementarse junto con un potencial fenomenológico cualquiera. La ecuación es simétrica con respecto al intercambio de partículas y se reduce a la ecuación de Dirac para un solo cuerpo cuando una de las masas tiende a infinito. Si se considera el límite no relativista, se obtiene la *reducción de Fermi-Breit*, lo cual es evidente al observar las expresiones (18) y (19). No obstante, la ecuación omite los estados mixtos de energía negativa $+-$ y $-+$, lo cual impide su aplicación plena en los sistemas hadrónicos, donde los efectos de pares virtuales partícula-antipartícula (representados por estos estados) pueden ser muy importantes. Por otra parte, esta ecuación ha sido muy útil en el cálculo de las diferencias de energía en sistemas ligados como el positronio¹ y en la física atómica.

La ecuación está libre de *Disolución del continuo (CD)*, es decir, no presenta singularidades anómalas para valores nulos de la masa del sistema. Una singularidad en las funciones de Green indica un

¹En este caso, es necesario tener en cuenta además el diagrama de Feynman de la aniquilación de pares.

estado libre altamente probable. Por ejemplo, el estado $M = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ es altamente probable ya que se presenta una singularidad en g_{++} (17). Por otra parte, el estado $M = 0$, carente de interpretación física, tiene una amplitud de probabilidad baja para los estados $++$ y $--$, lo cual es de esperarse.

4.2. ECUACIÓN DE GROSS

La ecuación de Gross [3] consiste en una reducción tridimensional de la ecuación de Bethe-Salpeter, que se obtiene al imponer la restricción de *encapsulamiento* (*on mass shell*) en el cuadrimomento de una de las partículas:

$$p_i^2 = m_i^2 \quad \text{para } i = 1 \text{ o } 2 \quad (20)$$

Introduciendo ahora la condición (20) para la partícula 1 en la definición de la función de Green:

$$G_0(p'_1, P) \equiv 2\pi\delta(p_1'^2 - m_1^2)S_F(P - p'_1) \quad (21)$$

se obtiene la *ecuación integral tridimensional de Gross* a partir de (13):

$$\begin{aligned} T(\tilde{p}_1, \tilde{p}'_1; P) &= V(\tilde{p}_1, \tilde{p}'_1, P) \\ &+ \int \frac{d^3p'_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon(\mathbf{p}'_1)} V(\tilde{p}_1, \tilde{p}'_1, P) S_F(P - \tilde{p}'_1) T(\tilde{p}'_1, \tilde{p}''_1; P) \end{aligned} \quad (22)$$

donde $\tilde{p} = (\varepsilon(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ es el cuadrimomento encapsulado. Haciendo uso de los operadores de proyección, se obtienen las siguientes expresiones acopladas para las funciones de onda:

$$\begin{aligned} \psi^{++} &= \int \frac{d^3p'_1}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{E - 2\varepsilon_1} \right) [V^{++}\psi^{++} + V^{+-}\psi^{-+}] \\ \psi^{-+} &= \int \frac{d^3p'_1}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{E} \right) [V^{-+}\psi^{++} + V^{--}\psi^{-+}] \end{aligned} \quad (23)$$

en donde es evidente que las funciones de Green de la ecuación son (en CM):

$$g_{++}^G = \frac{1}{M - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad g_{-+}^G = \frac{1}{M}, \quad g_{+-}^G = g_{--}^G = 0 \quad (24)$$

La ecuación de Gross es una RWE manifiestamente covariante, ya que no está relacionada con un marco de referencia específico. Tiene los límites correctos de unipartícula y del régimen no relativista. Sin embargo, los estados $+-$ y $--$ están ausentes y presenta el grave problema de no ser simétrica ante el intercambio de partículas, ya que el encapsulamiento sólo afecta a una. No obstante, ha sido simetrizada para el cálculo de los observables físicos en la mayoría de las aplicaciones numéricas.

Aunque presenta el estado $-+$, necesario para estudiar el efectos de pares, éste tiene un polo no físico para un valor nulo de la masa del sistema. Este problema es remediado parcialmente al exigir que la interacción decrezca más rápidamente que la masa del sistema. Sin embargo, esta condición no tiene una justificación sólida cuando se habla de un sistema libre de dos partículas. Por lo tanto, la ecuación presenta CD para el estado mixto, lo cual hace difícil la normalización de las funciones de onda en presencia de un potencial externo. Esta singularidad está asociada a la presencia de una función delta de Dirac en la función de Green [6] (21).

La ecuación de Gross ha sido utilizada exitosamente en sistemas de pocos nucleones, en donde la masa física del sistema está lejos de ser cero. Algunos de éstos son los procesos de dispersión de nucleones y el deuterón (estado ligado protón - neutrón). En estos casos son considerados los diagramas escalera y cruzado (Figura 2) obtenidos de potenciales fenomenológicos para la interacción nuclear.

5. ECUACIÓN DE MANDELZWEIG-WALLACE

Esta es una ecuación de onda tridimensional para dos fermiones [4],[5] and [6] con la siguiente forma integral:

$$G^{-1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{P})\psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{P} - \mathbf{p}_1) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\psi(\mathbf{p}', \mathbf{P} - \mathbf{p}') \quad (25)$$

El cuasipotencial V y la función de Green de dos cuerpos G son definidos de forma que la matriz de transición correspondiente

coincida, en forma aproximada, con los siguientes diagramas de Feynman, hasta el cuarto orden:

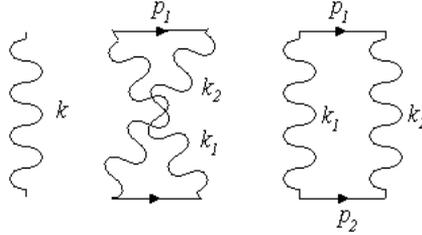


FIGURA 3. Diagramas de Feynman utilizados en la ecuación de Mandelsteg-Wallace.

De las expresiones covariantes de la matriz de dispersión puede separarse una parte tridimensional estática (intercambio instantáneo de los fotones). así:

$$\begin{aligned}
 M &= \alpha \gamma_1^\mu \gamma_2^\nu D_C(\mathbf{k}) \\
 &+ \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \alpha^2 \gamma_1^\mu \gamma_2^\nu D_C(\mathbf{k}_1) G(E_1, E_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \gamma_{1\mu} \gamma_{2\nu} D_C(\mathbf{k}_2) \\
 &+ \delta V_A + \delta V_B
 \end{aligned} \tag{26}$$

donde $D_C(\mathbf{k})$ es el propagador de fotón en el gauge de Coulomb con $\omega = 0$, el término δV_A , de orden α^2 , incluye todas las correcciones no instantáneas, y el término δV_B es una corrección definida por:

$$\delta V_B = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{\alpha^2 i [\gamma_1^\mu \gamma_2^\nu G(p_1, q_2) \gamma_{1\mu} \gamma_{2\nu} - \gamma_1 \cdot \gamma_2 G(p_1, q'_2) \gamma_1 \cdot \gamma_2]}{[(p_1^0, \mathbf{k}_1)^2 + i\eta] [(p_2^0, \mathbf{k}_2)^2 + i\eta]} \tag{27}$$

aquí es considerado el diagrama cruzado en forma aproximada, es decir, $q'_2 = (q_2^0, \mathbf{p}_2)$. Esta es la *aproximación eikonal* e implica que los momentos de los fermiones son mucho mayores que los momentos transportados por los fotones ($\mathbf{p}_j \gg \mathbf{k}_i$). Así se logra que el propagador no dependa de los momentos iniciales de las partículas, lo cual es característico de las funciones de Green no relativistas. En forma explícita, éste está dado por:

$$\hat{G}(E_1, E_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \Lambda^{++} g_{++}^{MW} + \Lambda^{-+} g_{-+}^{MW} + \Lambda^{+-} g_{+-}^{MW} + \Lambda^{--} g_{--}^{MW} \tag{28}$$

donde:

$$g_{\alpha\beta}^{MW} = \frac{\alpha\beta}{\alpha E_1 + \beta E_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \text{ con: } \alpha, \beta = \pm 1 \quad (29)$$

En esta expresión, los términos $++$ y $--$ provienen del diagrama caja, mientras que los términos $-+$ y $+ -$ del diagrama caja cruzada. La función de Green inversa G^{-1} está dada por:

$$G^{-1} = \gamma_1^0 \gamma_2^0 \left[(E_1 - \hat{H}_1) \hat{\rho}_2 + (E_2 - \hat{H}_2) \hat{\rho}_1 \right] \quad (30)$$

donde los \hat{H}_i son hamiltonianos de Dirac, y $\hat{\rho}_i = \hat{H}_i / \varepsilon_i$ es el operador signo, definido por la relación $\hat{H}_i \psi^p = p \varepsilon \psi$. La ecuación de Mandelzweig-Wallace es en forma explícita:

$$\gamma_1^0 \gamma_2^0 \left[(E_1 - \hat{H}_1) \hat{\rho}_2 + (E_2 - \hat{H}_2) \hat{\rho}_1 \right] \psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \int d^3 p'_1 V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1) \psi(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) \quad (31)$$

$$\text{con } V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1) = \int d^3 p'_1 [V_C(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1) + \delta V_A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1) + \delta V_B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1)]$$

a la cual se añade la condición subsidiaria:

$$E_1^2 - E_2^2 = m_1^2 - m_2^2 \quad (32)$$

que define la diferencia de energías y es necesaria para obtener el límite no relativista correcto. En un problema de estados ligados, $E = E_1 + E_2$ es el valor propio y en el C.M representa la masa en reposo del sistema.

La ecuación de Mandelzweig-Wallace es evidentemente simétrica con respecto al intercambio de partículas. y posee el límite correcto de unipartícula ya que en el caso libre se reduce a la ecuación de Dirac. Esta ecuación tiene en cuenta todos los posibles estados de la energía (29), y está libre de singularidades anómalas en los estados $+ -$ y $- +$, haciéndola muy útil en el estudio de los efectos de pares.

Todas estas bondades se deben a la inclusión del diagrama cruzado en la función de Green. Recordamos que los diagramas cruzados se pueden relacionar con los *diagramas* z de la teoría de perturbaciones ordenada en el tiempo. El diagrama cruzado aparece en

iguales condiciones en el diagrama caja gracias al uso de la aproximación eikonal. Ésta permite la separación de la contribución del diagrama cruzado en una parte iterativa y en una corrección al cuasipotencial. Los términos $+$ $-$ y $-$ $+$ en la función de Green, fundamentales para obtener el límite correcto de unipartícula y para el tratamiento de los estados $\psi^+ -$ y $\psi^- +$, se hacen dominantes en esta aproximación; mientras que en δV_B se hace pequeño. Prueba de esto, es que la mayor parte de la amplitud del diagrama cruzado es generada por iteración en los término $V_C G V_C$ de la series de Born, e inclusive el diagrama de intercambio de tres fotones está incluido en el término $V_C G V_C G V_C$. Se concluye que la ecuación se hace plenamente efectiva en sistemas afines con la aproximación eikonal.

6. ECUACIONES DE ONDA RELATIVISTAS Y MODELOS DE QUARK.

La teoría fundamental de la interacción fuerte entre los quarks es la *Cromodinámica Cuántica (QCD)*. Según esta teoría, los hadrones como los mesones y los nucleones (bariones), están conformados por partículas llamadas Quarks, caracterizadas por ser fermiones y tener carga eléctrica semientera.

Estas partículas interactúan mediante bosones llamados *gluones*, como los fotones de la QED. Una de las características más importantes de los sistemas conformados por quarks, según lo sugieren los experimentos de dispersión, es la existencia del fenómeno de *confinamiento* o imposibilidad de encontrar estados de quarks libres.

La QCD se diferencia de la QED fundamentalmente en la existencia de tres tipos de carga fuerte ó *color*, que pueden ser intercambiadas entre los quarks mediante los gluones. Esto significa que los gluones portan color y pueden interactuar fuertemente entre sí. La necesidad de considerar tres grados de libertad para describir a las partículas, introduce un grupo de simetría para el color que resulta

ser no abeliano², en contraste con el caso de la QED³. Formalmente, estas características conducen a la existencia de diagramas de Feynman para tres y cuatro gluones, complicando considerablemente la técnica de diagramas.

El obstáculo ineludible para estudiar los estados hadrónicos en el marco de la QCD es el siguiente. El coeficiente de acoplamiento de la QCD no es constante, sino que crece con la distancia: a distancias del orden del radio del protón es mucho mayor que uno. Por lo tanto en este rango, los diagramas de mayor orden son cada vez más importantes, haciendo imposible el uso de la teoría de perturbaciones en el estudio del confinamiento y los sistemas hadrónicos⁴. Usualmente, estas cuestiones son investigadas mediante la técnica del *retículo* (*Lattice*), en donde se resuelven las ecuaciones de la QCD numéricamente en un espacio-tiempo discreto similar a una red. Esta técnica, se basa en el hecho de que toda teoría de campos presenta confinamiento en una red de puntos finita. Pero mientras este confinamiento desaparece en el límite continuo para las demás QFT, en la QCD no. Esto probaría indirectamente la conexión entre el confinamiento y la QCD. Desafortunadamente, la técnica del retículo implica una enorme cantidad de cómputo, lo cual impide calcular con la precisión requerida muchos observables físicos.

Las *ecuaciones de onda relativistas* parecen la respuesta directa cuando se trata de sumar una gran cantidad de diagramas de Feynman en forma cerrada, como lo exigen en general los sistemas ligados y en especial, el confinamiento en la QCD. En forma concreta, el problema se reduce a la definición de un kernel irreducible suficientemente sencillo, que permita sumar todos los diagramas de Feynman relevantes. Los efectos restantes, menos importantes, son

²En un grupo no abeliano, los conmutadores entre los generadores de la transformación de simetría, es en general, una combinación lineal de los mismos, en donde los coeficientes son llamados *constantes de estructura*. En un grupo abeliano, estas constantes son nulas.

³El carácter abeliano de la QED se debe a que los generadores de las transformaciones de fase, las cuales dejan invariante la carga eléctrica, conmutan siempre (son números).

⁴Prueba de ello es que aún no ha sido posible una demostración formal del confinamiento mediante la QCD.

entonces tratados perturbativamente. Este es el espíritu general de los modelos de quarks. Debido a las diferencias dinámicas entre la QED y la QCD, *el aporte más importante de las RWE a los modelos de quarks lo constituyen las funciones de Green de dos cuerpos (parte cinética).*

Siguiendo los distintos tipos de análisis, es evidente que *la ecuación de MW es la más apropiada para el estudio de los sistemas ligados.* La ecuación MW puede implementarse como una ecuación de valores propios para los parámetros E_1 y E_2 que definen la masa del sistema en el sistema CM, de acuerdo con la relación $M = E_1 + E_2$. En la referencia [8] se propone el siguiente modelo para el estudio de sistemas hadrónicos, basado en la ecuación M-W. Como no es nada fácil deducir una ecuación a partir de los diagramas de Feynman para tres cuerpos, Mandelzweig y Wallace proponen una generalización de la expresión (30):

$$G_{III}^{-1} = \gamma_1^0 \gamma_2^0 \gamma_3^0 \left[(E_1 - \hat{H}_1) \hat{\rho}_2 \hat{\rho}_3 + (E_2 - \hat{H}_2) \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_3 + (E_3 - \hat{H}_3) \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 \right] \quad (33)$$

en donde $E_1 + E_2 + E_3 = M$ define la masa del sistema en CM. No obstante, esta ecuación implica la existencia de singularidades anómalas para los estados $++-$, $+--$ y demás permutaciones. Por otra parte, la ecuación de Dirac para tres cuerpos:

$$G^{-1} = \gamma_1^0 \gamma_2^0 \gamma_3^0 \left[M - \hat{H}_1 - \hat{H}_2 - \hat{H}_3 \right] \quad (34)$$

también presenta singularidades en estos estados para un valor nulo de la masa del sistema. Por esta razón, en [8] se ha sugerido la siguiente expresión:

$$G_{III}^{-1} = \gamma_1^0 \gamma_2^0 \gamma_3^0 \left[\left\{ (M - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \hat{H}_1) + 2(\varepsilon_1 - \hat{H}_1)(1/3 + \hat{\rho}_2 \hat{\rho}_3) \right\} + \dots \right] \quad (35)$$

donde los puntos implican una suma para todas los intercambios de índices. Esta expresión se obtienen al sumar las expresiones (33) y (34), bajo las siguientes condiciones subsidiarias:

$$E_1 = \varepsilon_1, \quad E_2 = \varepsilon_2 \quad (36)$$

Es decir, se aplica la condición de encapsulamiento a dos de las partículas. Esta es una ecuación de valores propios para M , que goza de todas las ventajas de la ecuación M-W y puede escribirse en forma covariante [8]. Sin embargo, como en todo modelo de quarks, se presenta el grave inconveniente del desconocimiento de los valores de las masas. Éstas deben ser tratadas como parámetros, de manera que los resultados se acerquen cada vez más a los datos experimentales de las masas hadrónicas.

7. CONCLUSIONES

Las diferentes ecuaciones de onda relativistas estudiadas son principalmente reducciones tridimensionales de la ecuación cuadrimensional de Bethe-Salpeter. La más adecuada para el tratamiento de sistemas hadrónicos es la ecuación M-W, la cual es obtenida de la matriz de dispersión, al separarla en una parte tridimensional y otra que incluye, de forma correctiva, los efectos de retardo del formalismo cuadrimensional. Gracias al uso de la aproximación eikonal, se incorpora en igualdad los diagramas caja y caja cruzada, los cuales son indispensables para obtener el límite correcto de unipartícula y definir todos los estados energía, incluso los estados mixtos. Además, es libre de CD y simétrica ante el intercambio de partículas, haciéndola la mejor candidata en la construcción de los modelos de quark. El modelo presentado en [8] para tres cuerpos basado en ésta ecuación y en la ecuación de Dirac para tres cuerpos, presenta todas las ventajas de la ecuación de M-W, constituyendo así una excelente alternativa en el estudio de los sistemas hadrónicos.

Referencias

- [1] C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Mc Graw-Hill, New York (1988).
- [2] W. Greiner, J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*. Springer-Verlag, Berlin (2003).

-
- [3] F. Gross, *Relativistic Methods for Few-Body Systems*, INFN Sez. Sanita, INFN-ISS 90/2 (1990).
 - [4] V. B. Mandelzweig, S.J. Wallace, *Phys. Lett. B* 197, 469 (1987).
 - [5] V. B. Mandelzweig, S.J. Wallace, *Nucl. Phys. A* 503, 673 (1989).
 - [6] D. R. Phillips, S.J. Wallace, arXiv:9603008v2 [nucl-th] 16 May (2006).
 - [7] E. M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Vol. IV: Teoría Cuántica Relativista*, parte I, Reverté , Barcelona (1975).
 - [8] M. De Sanctis, *Pair effects in Relativistic Quark Models*, Proc 9-th Conf. Problems in Theor. Nucl. Phys, Cortona (2002), World Scientific, pg. 205.