

## Dinámica de sistemas cuánticos abiertos: técnicas algebraicas para el modelo de Tavis-Cummings

J. Herazo W. y K. M. Fonseca Romero

Departamento de Física, Grupo de Óptica e Información Cuántica, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

### Resumen

Se ilustra el uso de técnicas algebraicas para el cálculo de la evolución temporal de sistemas cuánticos abiertos, empleándola para la interacción de dos átomos idénticos con un modo del campo electromagnético sostenido por una cavidad de microondas con alto factor de calidad, en el régimen dispersivo. El efecto de las pérdidas en la cavidad se modela de manera efectiva mediante un superoperador disipativo, con la forma de Lindblad, correspondiente a temperatura cero. El defecto de pureza y la concurrencia atómica se encuentran para un estado inicial separable de átomos en el mismo estado y campo en un estado coherente.

**Palabras claves:** Decoherencia, Entreveramiento, Álgebra de Lie.

### Abstract

The use of algebraic techniques to compute the time evolution of open quantum systems is illustrated in the case of two identical atoms interacting, in the dispersive regime, with a mode of the electromagnetic field held in a microwave cavity with high quality factor. The effect of the losses in the cavity is modelled by a dissipative superoperator, of Lindbladian form, corresponding to zero temperature. The purity defect and the atomic concurrence are found for an initial separable state of atoms in the same state and field in a coherent state.

## 1. INTRODUCCIÓN

Pese a que su número es relativamente pequeño, el estudio de los sistemas exactamente soluble es de considerable importancia porque permiten hallar características que pueden ser generales y pueden dar luz acerca de otros sistemas (no exactamente solubles), ayudando al entendimiento de los fenómenos físicos que en ellos se presentan. En el presente artículo se estudia una generalización del modelo de Jaynes-Cummings, considerando la interacción de dos átomos de dos niveles en el límite dispersivo interactuando con un sólo modo del campo electromagnético en una cavidad con pérdidas. Se asume un estado inicial puro y separable para el sistema, donde, los átomos entran a la cavidad en una superposición de sus estados bases y excitados, mientras el campo se encuentra preparado en un estado coherente. Se determina la evolución temporal del sistema global calculando el operador densidad total y la de todos los subsistemas involucrados por medio de los operadores densidad reducidos. Se emplean técnicas de álgebras de Lie para los superoperadores, determinando expresiones analíticas, exactas dentro de las aproximaciones consideradas, que permitan calcular entreveramiento de los subsistemas involucrados. En la sección 2 se establece el modelo matemático para la interacción de los dos átomos con el campo electromagnético, en la sección 3 se presenta el método algebraico de Wei-Norman[1] y se emplea para el modelo de la sección 2, y en la sección 4 se muestran algunos resultados correspondientes a un estado inicial separable particular.

## 2. El modelo de Tavis-Cummings dispersivo disipativo

Aquí estamos interesados en la dinámica de átomos que atraviesan cavidades que sostienen modos electromagnéticos en la región de microondas. Cuando una de las transiciones atómicas permitidas es casi resonante con uno de los modos de la cavidad, la longitud de onda del campo electromagnético es mucho mayor que el tamaño atómico típico. Además, si el campo eléctrico dentro de la cavidad no es demasiado alto podemos describir la interacción entre el átomo y la cavidad mediante el modelo de Jaynes-Cummings, o

sus generalizaciones. Por ejemplo, si dos átomos iguales atraviesan una cavidad, la dinámica está gobernada por el hamiltoniano de Tavis-Cummings

$$\begin{aligned} \hat{H}_{TC} = & \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{1}) + \frac{\hbar\omega_A}{2}(\hat{\sigma}_{1z} + \hat{\sigma}_{2z}) \\ & + \hbar\Omega(\hat{a}^\dagger(\hat{\sigma}_{1-} + \hat{\sigma}_{2-}) + \hat{a}(\hat{\sigma}_{1+} + \hat{\sigma}_{2+})) \end{aligned} \quad (1)$$

en donde  $\omega$  es la frecuencia angular del modo del campo electromagnético sostenido por la cavidad,  $\hbar\omega_A$  es la diferencia en energía entre  $|e\rangle$  y  $|g\rangle$ , los dos estados activos de los átomos, y  $\Omega$  es la llamada frecuencia de Rabi del vacío que corresponde al producto del elemento de matriz del momento dipolar eléctrico multiplicado por el campo eléctrico por fotón. La frecuencia del campo  $\omega$  es muy cercana a la frecuencia de transición atómica  $\omega_A$ . Los operadores bosónicos  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación de fotones del campo electromagnético, en tanto que los operadores atómicos que aparecen en el hamiltoniano de Tavis-Cummings (1) se pueden expresar así

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|. \quad (2)$$

Los subíndices 1 y 2 son un rótulo para diferenciar al primer átomo del segundo.

Si suponemos que consideramos estados para los cuales existe un número máximo relevante de fotones  $N$ , y que se satisface la desigualdad

$$\frac{|\Delta|}{\Omega} = \frac{|\omega_A - \omega|}{\Omega} \gg \sqrt{N+1}, \quad (3)$$

en donde a la cantidad  $\Delta$  se le conoce como desintonía, se puede realizar la llamada aproximación dispersiva, dentro de la cual el hamiltoniano efectivo es el siguiente [2]

$$\begin{aligned} \hat{H}_D = & \hbar\omega_f\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega_A}{2}(\hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)}) - \hbar\lambda\hat{a}^\dagger\hat{a}|gg\rangle\langle gg| \\ & + \hbar\lambda\left((\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|ee\rangle\langle ee| + \frac{1}{2}(|eg\rangle + |ge\rangle)(\langle eg| + \langle ge|)\right) \end{aligned} \quad (4)$$

Aquí el parámetro  $\lambda$  se define como  $\lambda = 2\frac{\Omega^2}{\Delta}$ . Observemos que la interacción de los átomos con el campo produce dos efectos: i)

producción de un corrimiento de energía de los estados atómicos  $|ee\rangle$  y  $|gg\rangle$  que depende del número de fotones de la cavidad, y ii) producción de una interacción entre los dos átomos. Este segundo efecto explica como dos sistemas que no interactúan directamente, sino a través de un tercer sistema, pueden entrelazarse, es decir, establecer correlaciones cuánticas entre ellos (*entanglement*).

La descripción que hemos hecho hasta ahora de la interacción de los átomos con el campo electromagnético de la cavidad es incompleta, debido a que los fotones no permanecen para siempre en la cavidad; por el contrario escapan de ella o son absorbidos por sus paredes, de manera que la energía electromagnética dentro de la cavidad disminuye. Una de las formas más sencillas de describir la dinámica de dichos sistemas, llamados abiertos, es el empleo de las ecuaciones maestras en las cuales el efecto de disipación se tiene en cuenta de manera efectiva. Como la dinámica deja de ser unitaria, es necesario acudir a una descripción en términos de operadores densidad. La ecuación que describe la dinámica de los dos átomos de niveles idénticos en régimen dispersivo y el campo electromagnético en la cavidad a temperatura cero es

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_D, \hat{\rho}(t)] + \gamma (2\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (5)$$

en donde  $2\gamma$  es la rata de pérdida de energía. Hemos enfatizado que el término de disipación se refiere a una situación de temperatura cero, porque no hemos tenido en cuenta mecanismos de producción de fotones térmicos dentro de la cavidad. En los experimentos se justifica el empleo de temperatura cero, porque el número de fotones térmicos es del orden de 0.05. Es conveniente trabajar en la imagen de interacción definiendo

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \varrho(t) e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}, \quad \hat{H}_0 = \hbar\omega_f \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_A}{2} (\hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)}). \quad (6)$$

En dicha imagen la ecuación de movimiento

$$\frac{d\hat{\varrho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_D - \hat{H}_0, \hat{\varrho}(t)] + \gamma (2\hat{a}\hat{\varrho}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}(t) - \hat{\varrho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (7)$$

también presenta una forma simple.

En presencia de disipación, inclusive en descripciones sencillas como la de la ecuación (7), en general no se pueden obtener resultados analíticos exactos. Sin embargo, uno de los autores de este artículo (KMFR) mostró que el modelo correspondiente a la interacción de un átomo de dos niveles con un campo electromagnético en una cavidad con pérdidas a temperatura cero, se puede resolver analíticamente. También el caso de dos átomos correspondientes a la ecuación (7) es exactamente soluble, empleando un método algebraico. Enseguida hacemos un breve recuento del método de Wei-Norman.

### 3. Método de Wei-Norman

Wei y Norman [1] consideraron soluciones a la ecuación

$$\frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{A}(t)\hat{U}(t), \quad \hat{U}(0) = \hat{I}, \quad (8)$$

en donde  $\hat{A}$  y  $\hat{U}$  son operadores lineales,  $\hat{I}$  es el operador densidad y  $A$  puede ser escrito como una combinación lineal de elementos de un álgebra de Lie de dimensión finita,

$$\hat{A}(t) = \sum_{k=1}^m a_k(t)\hat{X}_k, \quad [\hat{X}_k, \hat{X}_l] = \sum_n f_{k,l}^n \hat{X}_n, \quad (9)$$

en donde algunos de los coeficientes  $a_k(t)$  pueden ser nulos. Las constantes  $f_{k,l}^n$  se conocen como constantes de estructura. Ellos demostraron que en una vecindad del tiempo inicial la solución de la ecuación (8) puede representarse en la forma

$$\hat{U}(t) = \prod_{k=1}^m e^{g_k(t)\hat{X}_k}. \quad (10)$$

Si escribimos el operador densidad en la imagen de interacción como  $\hat{\varrho}(t) = \hat{U}(t,0)\hat{\varrho}(0)$ , en donde  $\hat{U}(t,0)$  se conoce como operador de evolución temporal, observamos que se debe satisfacer la condi-

ción  $\widehat{\mathcal{U}}(0, 0) = I$ , y que la ecuación (7) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\mathcal{U}}(t, 0)}{dt} \varrho(0) &= \frac{1}{i\hbar} [\widehat{H}_D - \widehat{H}_0, \bullet] \\ &+ \gamma (2\hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet - \bullet \hat{a}^\dagger \hat{a}) \widehat{\mathcal{U}}(t, 0) \varrho(0). \end{aligned} \quad (11)$$

En la ecuación (11) hemos empleado lo que se conoce como la convención del punto: en el lugar del punto se coloca lo que se encuentre a la derecha del operador [3]. Por ejemplo  $\hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger \widehat{\mathcal{U}}(t, 0) \varrho(0) = \widehat{\mathcal{U}}(t, 0) \widehat{\varrho}(0) \hat{a}$ . Ya que la ecuación resultante debe ser válida para cualquier operador inicial  $\widehat{\varrho}(0)$  la ecuación (11) debe ser válida también en términos de operadores, de manera que tiene una forma semejante a la ecuación (8) considerada por Wei y Norman. Para trabajar con una expresión manejable separamos los operadores que actúan sobre los grados de libertad atómicos de aquellos que actúan sobre el grado de libertad del campo. Por ejemplo,  $\hat{a}^\dagger \hat{a} |gg\rangle \langle gg| \bullet$  puede escribirse como el producto de operadores  $(|gg\rangle \langle gg| \bullet) \hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet$ , en donde, además, empleamos la conmutatividad de los operadores de campo y los operadores atómicos. La ecuación dinámica para el operador densidad se escribe, después de la separación mencionada, en la forma

$$\frac{d\widehat{\mathcal{U}}(t, 0)}{dt} = \left( \widehat{A} \widehat{\mathcal{M}} + \widehat{B} \widehat{\mathcal{P}} + \widehat{C} \widehat{\mathcal{J}} + \widehat{D} \right) \widehat{\mathcal{U}}(t, 0), \quad (12)$$

en donde los operadores atómicos están dados por

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= (-i\lambda |ee\rangle \langle ee| \bullet + i\lambda |gg\rangle \langle gg| \bullet - \gamma) \\ \widehat{B} &= (i\lambda \bullet |ee\rangle \langle ee| - i\lambda \bullet |gg\rangle \langle gg| - \gamma) \\ \widehat{C} &= 2\gamma \\ \widehat{D} &= (-i\lambda |ee\rangle \langle ee| \bullet - i\lambda |0\rangle \langle 0| \bullet + i\lambda \bullet |ee\rangle \langle ee| \\ &\quad - i\lambda \bullet |0\rangle \langle 0|), \end{aligned} \quad (13)$$

y los operadores del campo electromagnético por

$$\widehat{\mathcal{M}} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet \quad \widehat{\mathcal{P}} = \bullet \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad \widehat{\mathcal{J}} = \hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger. \quad (14)$$

Calculemos el conmutador entre los operadores de campo  $\widehat{\mathcal{J}}$  y  $\widehat{\mathcal{M}}$ .

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathcal{J}}, \widehat{\mathcal{M}}] &= \widehat{\mathcal{J}}\widehat{\mathcal{M}} - \widehat{\mathcal{M}}\widehat{\mathcal{J}} = \hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet) - \hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet (\hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger) \\ &= \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger \\ &= [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger = \hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger = \widehat{\mathcal{J}}. \end{aligned} \quad (15)$$

De manera similar podemos verificar que todos los operadores atómicos conmutan entre ellos y con los de campo, de modo que pueden tratarse como si fuesen números. Los operadores de campo cumplen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\widehat{\mathcal{J}}, \widehat{\mathcal{M}} - \widehat{\mathcal{P}}] = 0, \quad [\widehat{\mathcal{M}} + \widehat{\mathcal{P}}, \widehat{\mathcal{M}} - \widehat{\mathcal{P}}] = 0, \quad [\widehat{\mathcal{M}} + \widehat{\mathcal{P}}, \widehat{\mathcal{J}}] = -2\widehat{\mathcal{J}} \quad (16)$$

que nos indican que el operador  $\widehat{\mathcal{M}} - \widehat{\mathcal{P}}$  también se comporta como si fuese un número. Finalmente, escribimos la ecuación para el operador densidad en la imagen de interacción como

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\mathcal{U}}(t, 0)}{dt} &= \frac{1}{2} (\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{B}}) (\widehat{\mathcal{M}} - \widehat{\mathcal{P}}) \widehat{\mathcal{U}}(t, 0) \\ &\quad + \left( \widehat{\mathcal{D}} + \frac{1}{2} (\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{B}}) (\widehat{\mathcal{M}} + \widehat{\mathcal{P}}) + \widehat{\mathcal{C}}\widehat{\mathcal{J}} \right) \widehat{\mathcal{U}}(t, 0), \end{aligned} \quad (17)$$

que es de la forma de la ecuación considerada por Wei y Norman con un álgebra bidimensional, pues los únicos operadores que no conmutan son  $\widehat{\mathcal{M}} - \widehat{\mathcal{P}}$  y  $\widehat{\mathcal{J}}$ . Empleando el teorema de Wei-Norman podemos escribir el operador de evolución temporal como

$$\widehat{\mathcal{U}}(t, 0) = e^{\alpha(t)} e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}} + \widehat{\mathcal{P}})} e^{s(t)\widehat{\mathcal{J}}}. \quad (18)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{dt} e^{f(t)\widehat{\mathcal{O}}} = \dot{f}(t)\widehat{\mathcal{O}} e^{f(t)\widehat{\mathcal{O}}} = e^{f(t)\widehat{\mathcal{O}}} \dot{f}(t)\widehat{\mathcal{O}} = \dot{f}(t) e^{f(t)\widehat{\mathcal{O}}} \widehat{\mathcal{O}}, \quad (19)$$

en donde  $\widehat{\mathcal{O}}$  es un operador independiente del tiempo arbitrario, podemos derivar la ecuación (18) con respecto al tiempo para ob-

tener

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{\mathcal{U}}}{dt} &= \dot{\alpha}(t)e^{\alpha(t)}e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}e^{s(t)\widehat{\mathcal{T}}} + e^{\alpha(t)}\dot{\mu}(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}e^{s(t)\widehat{\mathcal{T}}} \\
&\quad + e^{\alpha(t)}e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}\dot{s}(t)\widehat{\mathcal{T}}e^{s(t)\widehat{\mathcal{T}}} \\
&= \dot{\alpha}(t)\widehat{\mathcal{U}}(t,0) + \dot{\mu}(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})e^{\alpha(t)}e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}e^{s(t)\widehat{\mathcal{T}}} \\
&\quad + e^{\alpha(t)}e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}\dot{s}(t)\widehat{\mathcal{T}}e^{-\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}e^{s(t)\widehat{\mathcal{T}}} \\
&= \dot{\alpha}(t)\widehat{\mathcal{U}}(t,0) + \dot{\mu}(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})\widehat{\mathcal{U}}(t,0) + \\
&\quad e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}\dot{s}(t)\widehat{\mathcal{T}}e^{-\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}e^{\alpha(t)}e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}e^{s(t)\widehat{\mathcal{T}}} \\
&= \dot{\alpha}(t)\widehat{\mathcal{U}}(t,0) + \dot{\mu}(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})\widehat{\mathcal{U}}(t,0) + \\
&\quad \dot{s}(t)e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}\widehat{\mathcal{T}}e^{-\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}\widehat{\mathcal{U}}(t,0) \\
&= \left[ \dot{\alpha}(t) + \dot{\mu}(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}}) + \dot{s}(t)e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}\widehat{\mathcal{T}}e^{-\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})} \right] \widehat{\mathcal{U}}(t,0).
\end{aligned} \tag{20}$$

Uno de los pasos fundamentales en la derivación de la ecuación (20) fue la de obtener, de manera sistemática el operador de evolución temporal a la derecha. Para satisfacer dicho propósito inclusive introdujimos un operador identidad en la forma del producto de una exponencial negativa y una positiva. Aunque el tercer término entre paréntesis cuadrados de la última línea de la ecuación (20) no está en la forma requerida, podemos transformarlo a una suma de los elementos del álgebra empleando la serie de Lie

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \tag{21}$$

En efecto empleando la identidad (21) y uno de los conmutadores que aparecen en la ecuación (16) hallamos

$$\begin{aligned}
e^{\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})}\widehat{\mathcal{T}}e^{-\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}})} &= \widehat{\mathcal{T}} + \mu(t)[(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}}), \widehat{\mathcal{T}}] + \\
&\quad \frac{1}{2!}[\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}}), [\mu(t)(\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}}), \widehat{\mathcal{T}}]] + \dots \\
&= \widehat{\mathcal{T}} - 2\mu(t)\widehat{\mathcal{T}} - \frac{2\mu^2(t)}{2!}[\widehat{\mathcal{M}}+\widehat{\mathcal{P}}, \widehat{\mathcal{T}}] + \dots \\
&= \widehat{\mathcal{T}} + \frac{-2\mu(t)}{1!}(\widehat{\mathcal{T}}) + \frac{(-2\mu(t))^2}{2!}\widehat{\mathcal{T}} + \dots \\
&= \widehat{\mathcal{T}}e^{-2\mu(t)}.
\end{aligned} \tag{22}$$



Empleando la igualdad (22) en la ecuación (20), y comparando con la ecuación (17) se tienen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{2} (\hat{A} - \hat{B}) (\hat{\mathcal{M}} - \hat{\mathcal{P}}) + \hat{D}, \quad \dot{\mu} = \frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{B}), \quad \dot{s} e^{-2\mu(t)} = \hat{C}, \quad (23)$$

sujetas a las condiciones iniciales  $\alpha(0) = \mu(0) = s(0) = 0$ , ya que el operador  $\hat{\mathcal{U}}$  debe reducirse a la identidad en el tiempo inicial  $t = 0$ . Las soluciones a las ecuaciones (23) son las siguientes

$$\alpha(t) = \frac{t}{2} (\hat{A} - \hat{B}) (\hat{\mathcal{M}} - \hat{\mathcal{P}}) + \hat{D}, \quad \mu(t) = \frac{t}{2} (\hat{A} + \hat{B}), \quad s(t) = \frac{\hat{C}}{\hat{A} + \hat{B}} (e^{(\hat{A} + \hat{B})t} - 1). \quad (24)$$

Substituyendo estas expresiones en la solución de prueba para el operador de evolución temporal (18), teniendo en cuenta que los operadores  $\hat{\mathcal{M}}$  y  $\hat{\mathcal{P}}$  conmutan y empleando las definiciones de los operadores atómicos y de campo encontramos para el operador de evolución temporal  $\hat{\mathcal{U}}(t, 0)$  la expresión

$$\begin{aligned} & \text{Exp}(-i\lambda |ee\rangle \langle ee| \bullet - i\lambda \bullet |0\rangle \langle 0| + i\lambda \bullet |ee\rangle \langle ee| + i\lambda |0\rangle \langle 0| \bullet)t \\ & \text{Exp}(-i\lambda |ee\rangle \langle ee| \bullet + i\lambda |gg\rangle \langle gg| \bullet - \gamma)t \hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet \\ & \text{Exp}(i\lambda \bullet |ee\rangle \langle ee| - i\lambda \bullet |gg\rangle \langle gg| - \gamma)t \bullet \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ & \text{Exp} \left[ -\frac{2\gamma [e^{(-i\lambda |ee\rangle \langle ee| \bullet + i\lambda |gg\rangle \langle gg| \bullet + i\lambda \bullet |ee\rangle \langle ee| - i\lambda \bullet |gg\rangle \langle gg|)t - 2\gamma t} - 1]}{i\lambda (|ee\rangle \langle ee| \bullet - |gg\rangle \langle gg| \bullet - \bullet |ee\rangle \langle ee| + \bullet |gg\rangle \langle gg|) + 2\gamma} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

en donde el estado  $|0\rangle$  es  $|0\rangle = (|eg\rangle + |ge\rangle)/\sqrt{2}$ .

Para calcular el efecto del operador de evolución temporal sobre un estado en la base atómica usual, los términos con proyectores sobre el estado  $|0\rangle$  no resultan ser los más convenientes. Empleando técnicas semejantes a la descrita en el presente manuscrito se

pueden demostrar las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} e^{-i\lambda t|0\rangle\langle 0|} &= (|ee\rangle\langle ee| + |gg\rangle\langle gg|) \bullet \\ &+ \frac{1}{2}(e^{-i\lambda t} + 1)(|eg\rangle\langle eg| + |ge\rangle\langle ge|) \bullet \\ &+ \frac{1}{2}(e^{-i\lambda t} - 1)(|eg\rangle\langle ge| + |ge\rangle\langle eg|) \bullet, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} e^{i\lambda t\bullet|0\rangle\langle 0|} &= \bullet(|ee\rangle\langle ee| + |gg\rangle\langle gg|) \\ &+ \frac{1}{2}(e^{i\lambda t} + 1) \bullet(|eg\rangle\langle eg| + |ge\rangle\langle ge|) \\ &+ \frac{1}{2}(e^{i\lambda t} - 1) \bullet(|eg\rangle\langle ge| + |ge\rangle\langle eg|). \end{aligned} \quad (27)$$

Para su utilización en la siguiente sección, recordamos que si  $\gamma$  y  $x$  son reales tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} e^{(-\gamma t + ix)\hat{a}^\dagger \hat{a}} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}(1 - |e^{-\gamma t + ix}|^2)} |\alpha e^{(-\gamma t + ix)}\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}(1 - e^{-2\gamma t})} |\alpha e^{(-\gamma t + ix)}\rangle \\ \langle \alpha| e^{(-\gamma t + ix)\hat{a}^\dagger \hat{a}} &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}(1 - e^{-2\gamma t})} \langle \alpha e^{(-\gamma t - ix)}| \end{aligned}$$

#### 4. Aplicación a un estado inicial separable

Asumiendo que el estado inicial es de la forma

$$\hat{\rho}(0) = \sum_{i_1, j_1, i_2, j_2 = e, g} \rho_{i_1 j_1 i_2 j_2} |i_1 j_1\rangle \langle i_2 j_2| \otimes |\alpha\rangle \langle \alpha|, \quad (28)$$

podemos encontrar una expresión cerrada para el operador densidad, que omitimos aquí por ser muy extensa. En los resultados que se presentan a continuación supusimos que ambos átomos se preparan en el estado puro  $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$ .

Para caracterizar la coherencia en el sistema se calculan los defectos de pureza, o entropías lineales,  $\delta = 1 - \text{tr}(\hat{\rho}(t)^2)$  correspondientes al sistema total y a todos los subsistemas. Para la pureza total se calcula la traza del cuadrado de la matriz densidad total. La pureza atómica (dos átomos) se calcula el operador reducido asociado a los dos átomos trazando sobre las variables del campo, y después

se determina la traza del cuadrado del operador reducido. Para la pureza asociada al campo se traza sobre la variables atómicas encontrando el operador reducido del campo y luego se halla la traza del cuadrado de dicho operador. Adicionalmente se pueden calcular la pureza asociado al átomo uno, que coincide con la del átomos dos por ser átomos idénticos, y finalmente la pureza del átomo uno o dos más el campo, que también coinciden por la justificación anterior.

El entreveramiento entre los dos átomos se determina empleando la concurrencia [4]

$$C(\rho_A) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (29)$$

donde los  $\lambda_i$  son las raíces cuadradas positivas de los valores propios de la matriz hermítica  $R^2 = \sqrt{\rho_A} \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \rho_A^* \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \sqrt{\rho_A}$ , donde  $\sigma_y^{(i)}$  son la matrices de Pauli.

En la parte izquierda de la figura 1 se muestran las gráficas de concurrencia para los dos átomos, en función de  $\lambda t$  para un número medio de fotones igual a uno ( $\alpha = 1$ ). La línea sólida hace referencia al caso en que no se tienen efectos disipativos en la cavidad ( $k = \frac{\gamma}{\lambda} = 0$ ), y la línea punteada para el caso en que tenemos efectos disipativos ( $k = 0,1$ ). Se observa un compartamiento periódico para  $k = 0$ , e intervalos de tiempo donde hay desentrelazamiento para  $\lambda t = 2n\pi$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Para  $k \neq 0$  existe una disminución del grado de entreveramiento atómico.

Los defectos de pureza total y de algunos de los subsistemas son mostrados superpuestos con la concurrencia atómica en la parte derecha de la figura 1 para el caso en que tenemos presentes efectos disipativos ( $k = 0,1$ ) y un número promedio de fotones igual a uno. La línea punteada indica el defecto de pureza total (dos átomos más campo), la línea sólida más oscura hace referencia al defecto de pureza atómico (los dos átomos), mientras que el defecto de pureza para el campo se indica por la línea a trazos. En cuanto a la concurrencia entre los dos átomos se indica por la línea sólida más clara. Cuando se tiene la igualdad entre las entropías total y atómica se muestra que para esos instantes de tiempo el campo evoluciona hacia un estado puro, desacoplándose de los dos átomos que continúan en un estado mezclado.

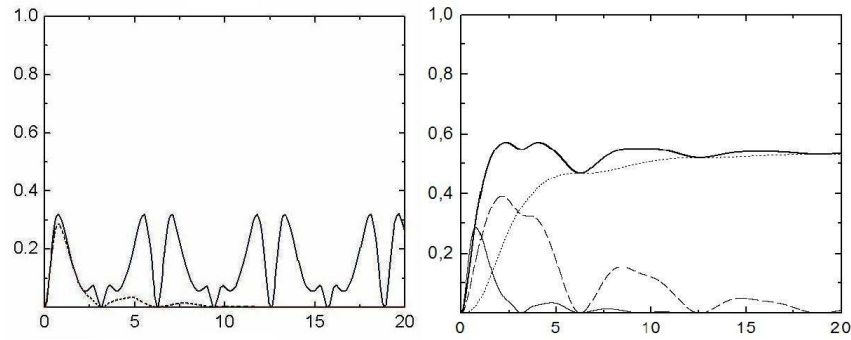


FIGURA 1. Concurrencia, y defectos de pureza en función de  $\lambda t$ .

## Referencias

- [1] J. Wei y E. Norman. Proc. Am. Math. Soc. **15**, 327 (1964).
- [2] J. Herazo, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia (2006).
- [3] W. H. Louisell. *Quantum statistical properties of radiation*, Wiley, New York (1973).
- [4] W. K. Wootters. Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (2002), arxiv:quantum-ph/9709029 (1997).