

MÉTODO DE HERTZ PARA SOLUCIONAR LAS ECUACIONES DE MAXWELL: El Caso del Dipolo Oscilante

Isabel Garzón Barragán^{1,2} y Héctor A. Múnera²

¹ Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

² Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá

Resumen

A finales del siglo XIX Hertz propuso un método muy original para solucionar las ecuaciones de Maxwell, en términos de los llamados potenciales de Hertz ($\vec{\Pi}_e, \vec{\Pi}_m$), que simetrizan las ecuaciones de Maxwell. Al aplicar este método a la solución del dipolo oscilante los potenciales de Hertz se relacionan con una única magnitud escalar Q , que es proporcional al flujo eléctrico. Esto permite expresar el campo electromagnético (\vec{E}, \vec{H}) en términos del flujo eléctrico únicamente, llevando así a una visión alternativa del campo emitido por el dipolo. Con fines pedagógicos este artículo describe el método de Hertz, que es poco conocido, y además, describe el proceso para construir las gráficas de las líneas de campo eléctrico, obtenidas por Hertz por primera vez; adicionalmente se presentan las líneas del campo magnético emitido por el dipolo.

Palabras claves: Dipolo oscilante, Potenciales de Hertz, Método de Hertz para solucionar las ecuaciones de Maxwell, ecuaciones de Maxwell

Abstract

By the end of the 19th century, Hertz developed an original procedure for the solution of Maxwell equations. He introduced the so-called Hertz potentials ($\vec{\Pi}_e, \vec{\Pi}_m$), which have the very interesting property of making Maxwell equations symmetrical. Application of Hertz's method to the solution

of the oscillating electric dipole is based on a scalar function Q , which is proportional to the electric flux. In this way, the electromagnetic field (\vec{E}, \vec{H}) becomes a function of electric flux only. For its pedagogical value, in this paper we describe Hertz's method, which is neither widely known, nor easily available to most students and researchers. Additionally, we describe in some detail Hertz's procedure to build the graphs of the electric field (the latter were obtained by Hertz for the first time, and are reproduced in many intermediate textbooks without any explanation), and present the companion graphs for the magnetic field associated with the dipole.

1. INTRODUCCIÓN

Muchos textos de electromagnetismo muestran la representación gráfica de las líneas de campo eléctrico generadas por un dipolo oscilante sin mencionar el método seguido para dibujarlas, que se debe a Hertz. Debe anotarse que la descripción del método de Hertz no se encuentra fácilmente en literatura que sea asequible a la mayoría de los estudiantes e investigadores de nuestro país, por lo que, por su gran contenido pedagógico, en este artículo se presenta en cierto detalle. El método muy original propuesto por Hertz para solucionar las ecuaciones de Maxwell en términos del llamado potencial de Hertz [2]. Al aplicar este método a la solución del dipolo oscilante el potencial de Hertz se relaciona con una única magnitud escalar Q , que es proporcional al flujo eléctrico. Esto permite expresar el campo electromagnético (\vec{E}, \vec{H}) en términos del flujo eléctrico únicamente, llevando así a una visión alternativa del campo emitido por el dipolo. Además, se describe el proceso para construir las gráficas de las líneas de campo eléctrico, obtenidas por Hertz por primera vez; y adicionalmente se presentan las líneas del campo magnético emitido por el dipolo.

2. El problema del dipolo oscilante desde la perspectiva de Hertz

La demostración experimental de Hertz, de la existencia de las ondas electromagnéticas, lo obligó a aceptar el paradigma físico de los *campos electromagnéticos de Faraday y Maxwell*, contrapuesto al paradigma de la acción a distancia. En palabras de Hertz: “Los resultados de los experimentos que he realizado sobre oscilaciones eléctricas rápidas me parece que confieren a la teoría maxwelliana una superioridad sobre las otras teorías de la electrodinámica” [2, pp. 107].

Desde la perspectiva de campos, es decir, a partir de las ecuaciones de Maxwell; Hertz describe teóricamente (calcula y representa gráficamente) el **proceso de formación de ondas electromagnéticas** en torno a un dipolo oscilante, que constituye su emisor.

El dipolo oscilante, también conocido como dipolo de Hertz, *idealmente* está formado por dos cargas eléctricas opuestas que oscilan armónicamente con cierta frecuencia a lo largo de un segmento, estando siempre simétricamente situadas respecto al centro. El orden de magnitud de la frecuencia del dipolo de Hertz era de 100 MHz, que se correspondía con la frecuencia de las oscilaciones eléctricas con las que realizó los experimentos que lo condujeron al descubrimiento de las ondas electromagnéticas [2, pp. 63].

3. Método propuesto por Hertz para solucionar las ecuaciones de Maxwell

Hertz propone un método para hallar las soluciones de las ecuaciones de Maxwell, basado en lo que hoy se llama “el vector de Hertz” (o potencial de Hertz) [3].

Si se considera el dipolo oscilante orientado –por ejemplo– en la dirección del eje z , se tiene simetría de revolución respecto al eje del oscilador, es decir, la distribución del campo eléctrico es simétrica en torno al eje z , de modo que para cada punto este campo está en

el plano (ρ, z) figura 1, y el campo magnético es perpendicular al campo eléctrico; en consecuencia, se describe la radiación emitida por el dipolo en coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) .

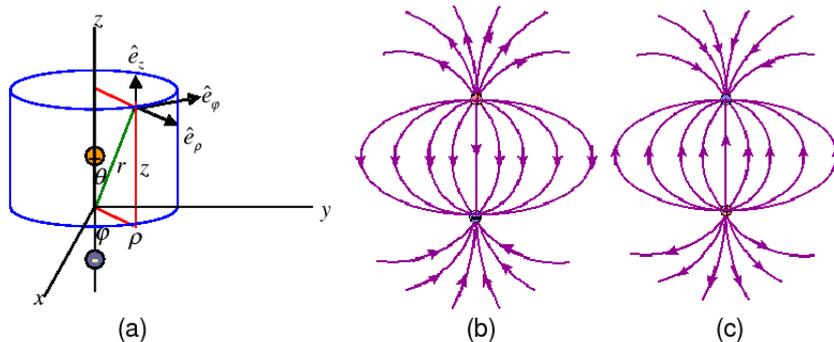


FIGURA 1. (a) El dipolo oscilante está orientado en la dirección z . (b) Imagen estática del dipolo oscilante en un instante dado, en el que la carga positiva está en la parte superior. (c) Imagen estática del dipolo oscilante en un instante dado, en el que la carga negativa está en la parte superior.

Cabe preguntarse ¿cómo sabía Hertz de la distribución del campo electromagnético generado por el dipolo? Quizás lo sabía por su familiaridad experimental con la corriente inducida para las diversas posiciones del resonador, en los experimentos que le permitieron descubrir las ondas electromagnéticas [2, pp. 94-99]. Pero por el contexto parece más bien que lo sabía por argumentos de simetría del fenómeno, en particular reflexión respecto a un plano. Esta se puede entender como una inversión espacial respecto a un punto del plano seguida de una rotación de 180° en torno a la normal al plano por ese punto. Como el campo eléctrico \vec{E} es un vector verdadero o “vector polar”, debe cambiar de sentido por inversión espacial, mientras que el campo magnético \vec{H} , que es un “vector axial”, permanece invariante bajo esa inversión. Ello implica que si \vec{E} y \vec{H} son simétricos respecto a un plano, necesariamente \vec{E} está contenido en él, mientras que \vec{H} es perpendicular a él [1].

Considerando esto, Hertz propone un teorema mediante el cual introduce una función escalar Π que depende de ρ, z, t . Este teorema constituye el método propuesto para solucionar las ecuaciones

de Maxwell en el caso del dipolo oscilante. Pero este método fue generalizado por Righi [4] al señalar que el eje del dipolo puede tener cualquier orientación en el espacio y puede por lo tanto ser representado por una función vectorial $\vec{\Pi}$, hoy llamada “vector de Hertz”. El teorema de Hertz generalizado a lenguaje vectorial, es el siguiente:

Supongamos un campo vectorial $\vec{\Pi}$, que satisface la ecuación vectorial diferencial

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{\Pi} \quad (1)$$

y definamos el vector \vec{R} (en el caso del dipolo $\|\vec{R}\| = \frac{Q}{\rho}$) como

$$\vec{R} = -\nabla \times \vec{\Pi} \quad (2)$$

entonces los campos definidos por

$$\vec{E} = \nabla \times \vec{R} \quad \text{y} \quad \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \quad (3)$$

satisfacen las ecuaciones de Maxwell.

4. Aplicación del método de Hertz para calcular el campo electromagnético generado por el dipolo oscilante

Para el caso del dipolo oscilante orientado en la dirección z , la función Π que propone Hertz, es el módulo del vector de Hertz $\vec{\Pi}$, que está dirigido según el eje z , es decir

$$\vec{\Pi} = (0, 0, \Pi)$$

Las componentes de \vec{R} en coordenadas cilíndricas son

$$\vec{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \hat{e}_\rho + \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \hat{e}_\varphi$$

como Π no depende de φ , entonces

$$R_\rho = R_z = 0 \quad R_\varphi = \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \hat{e}_\varphi = \frac{Q}{\rho} \hat{e}_\varphi \quad (4)$$

Las componentes del campo magnético son

$$H_\rho = H_z = 0, \quad H_\varphi = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (5)$$

y, las componentes del campo eléctrico son

$$E_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad E_\varphi = 0, \quad E_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial \rho} \quad (6)$$

Como el campo electromagnético generado por el dipolo queda expresado únicamente en términos del parámetro escalar Q , es necesario entender su sentido físico para comprender mejor la estructura del campo (\vec{E}, \vec{H}) generado por el dipolo oscilante.

5. El papel de parámetro Q

El parámetro Q permite dibujar las líneas de fuerza eléctrica y visualizar con ellas la dirección y la intensidad del campo eléctrico.

5.1. Visualización de la dirección del campo eléctrico

Como se sabe, el flujo del campo eléctrico $\vec{\Phi}_E$ a través de una superficie S cualquiera se define como

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

reemplazando $\vec{E} = \nabla \times \vec{R}$ y aplicando el teorema de Stokes

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_L \vec{R} \cdot d\vec{l}$$

en el caso de simetría de revolución y para una superficie S generada por la revolución de un segmento que una al eje z con un punto cualquiera de coordenada cilíndrica ρ (cuyo contorno l será una circunferencia de radio ρ), y teniendo en cuenta las coordenadas de \vec{R} , ecuaciones (4), ese flujo resulta

$$\Phi_{\vec{E}} = 2\pi Q \quad (7)$$

por lo tanto, la cantidad Q , que por simetría sólo depende de ρ y de z da la medida absoluta del flujo de campo eléctrico.

De acuerdo a la ecuación (7) el volumen limitado por una superficie de revolución, cuyos puntos satisfacen

$$Q(\rho, z) = \text{constante} \quad (8)$$

constituye un tubo de flujo eléctrico constante y el campo eléctrico \vec{E} es tangente a esa superficie. Si consideramos esta superficie, como hace Hertz, cortada por un plano (ρ, z) , la ecuación (8) define implícitamente en ese plano una curva, cuya pendiente es

$$\frac{dz}{d\rho} = -\frac{\partial Q/\partial \rho}{\partial Q/\partial z}$$

que es la pendiente del campo eléctrico \vec{E} , de acuerdo a sus componentes, expresadas por las ecuaciones (6). Por consiguiente, el campo eléctrico es constantemente tangente a las curvas que define la ecuación (8) en el plano (ρ, z) , o, como dice Hertz, las curvas que define la ecuación (8) son las líneas de fuerza eléctrica perfectamente visualizables en el plano (ρ, z) .

5.2. Visualización de la intensidad del campo eléctrico

Para visualizar la intensidad del campo \vec{E} , Hertz considera la “zona en forma de corteza” comprendida entre dos tubos de flujo próximos, definidos por Q y $Q + dQ$. El flujo en esa zona es:

$$\int_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2\pi dQ$$

La intensidad del campo \vec{E} es el cociente entre ese flujo $2\pi dQ$ y la superficie dS perpendicular a \vec{E}

$$dS = 2\pi \rho dl$$

siendo dl la distancia perpendicular entre las dos líneas de fuerza eléctrica correspondientes a $Q(\rho, z) = \text{constante}$ y $Q + dQ =$

constante. Distancia perfectamente visualizable en el plano (ρ, z) . Así, la intensidad del campo \vec{E} es

$$E = \frac{dQ}{\rho dl}$$

6. Descripción de la formación de ondas electromagnéticas en torno al dipolo oscilante

Para describir la radiación emitida por el dipolo oscilante es necesario considerar las ecuaciones de Maxwell con fuentes, es decir, la densidad de corriente \vec{j} y la densidad de carga ρ' :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho' \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} & \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

Expresamos estas ecuaciones en términos del vector de Hertz (o potencial de Hertz), y se obtiene una sola ecuación

$$\nabla^2 \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 4\pi \vec{d} \quad (9)$$

donde el vector $\vec{d}(\vec{r}, t)$ es el vector de polarización, que cumple $\rho' = -\nabla \cdot \vec{d}$ y $\vec{j} = \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}$, y se relaciona con las cargas y corrientes libres del mismo modo que el vector de polarización dieléctrica \vec{P} se relaciona con las cargas y corrientes ligadas, o inducidas en el dieléctrico. La solución de potencial retardado de la ecuación (9) en función del momento dipolar eléctrico \vec{p} es

$$\vec{\Pi}(x, y, z, t) = -\frac{\vec{p}(t - r/c)}{r} \quad (10)$$

donde (x, y, z, t) es un punto cualquiera de observación del efecto de la radiación del dipolo, r es la distancia del punto de observación (x, y, z, t) a la fuente y $\frac{r}{c}$ es el tiempo necesario para que la señal viaje de la fuente al punto de observación.

Para el caso de un oscilador de dirección fija de carga q y oscilación armónica $\vec{l} \sin \omega t$, su momento dipolar es

$$\vec{p}(t) = q\vec{l} \sin \omega t \quad (11)$$

sustituimos (11) en (10)

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{q\vec{l} \sin(kr - \omega t)}{r} \quad (12)$$

Esta ecuación se satisface en todas partes, excepto en el origen del sistema de coordenadas.

Aplicando (12) a las ecuaciones (4) y despejando Q resulta

$$Q = qlk \left[\cos(kr - \omega t) - \frac{\sin(kr - \omega t)}{kr} \right] \sin^2 \theta \quad (13)$$

de aquí se obtiene por diferenciación el campo electromagnético, de acuerdo a las ecuaciones (5) y (6).

7. Representación gráfica de las líneas de campo eléctrico y campo magnético

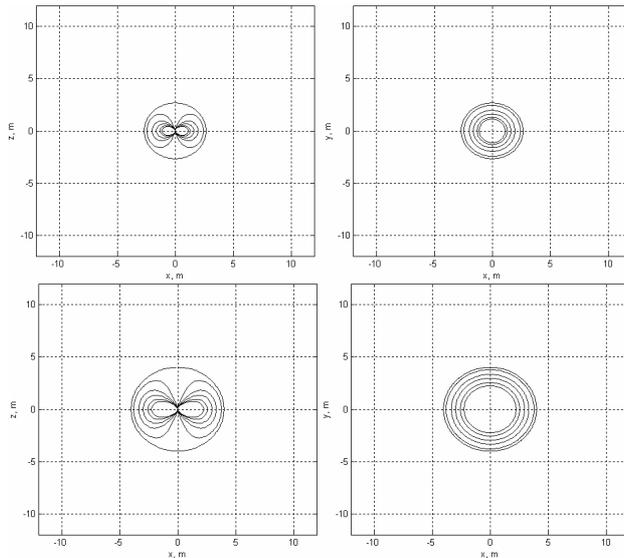
Mediante las ecuaciones (8) y (13) se puede hacer evidente la formación de ondas hercianas en torno al dipolo oscilante, representando gráficamente la evolución temporal de las líneas de campo eléctrico; esta representación fue hecha por Hertz [2, pp. 120-121] y aparece en diferentes textos. Además se representan las líneas de campo magnético para $\theta = \frac{\pi}{2}$, es decir $z = 0$. Es de notar que (13) no es válida en el origen de coordenadas, está calculada para $r = l$.

Para los cálculos se han asignado valores a los parámetros del dipolo similares a los que usó Hertz en sus experimentos:

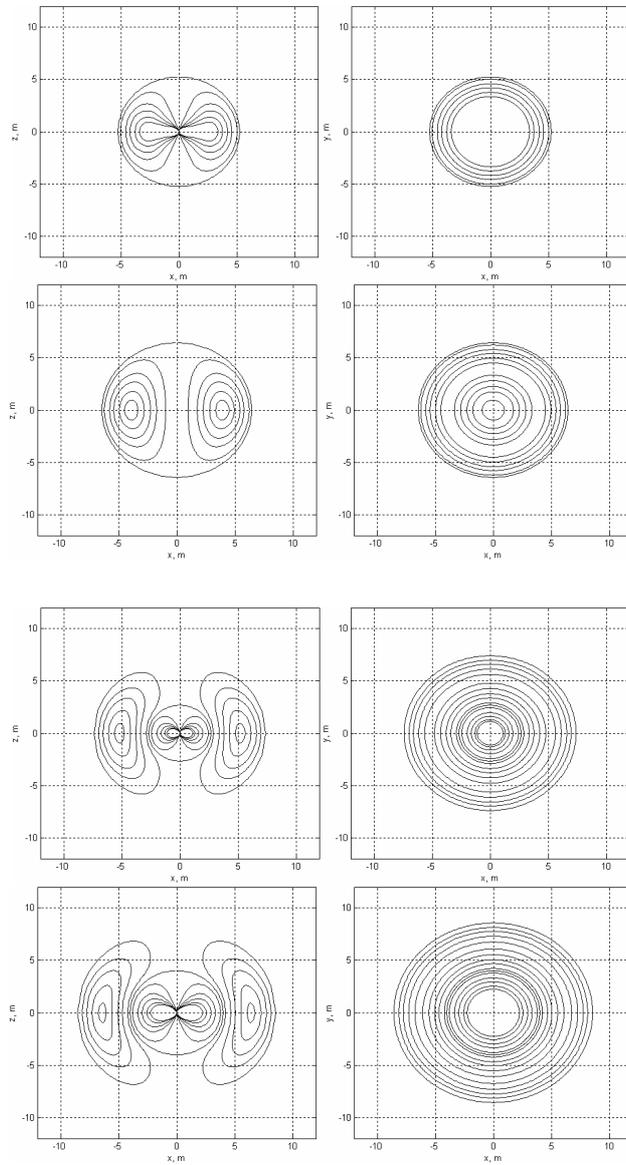
- Carga eléctrica (cantidad de electricidad) en los extremos del dipolo $q = 1\text{C}$
- Longitud del dipolo $l = 0.1\text{ m}$

- Longitud de la onda emitida por el dipolo $\lambda = 9$ m
- Periodo de las oscilaciones $T = 3 \times 10^{-18}$ s
- Frecuencia de las oscilaciones $\nu = \frac{1}{T}$
- Frecuencia angular de las oscilaciones $\omega = 2\pi\nu$
- Número de onda $k = \frac{\omega}{c}$
- Velocidad de la radiación electromagnética $c = 3 \times 10^8$ m/s
- Los valores empleados para Q son: 0, 0.01, 0.03, 0.045, 0.06 y 0.07

Se representan las líneas de campo en el intervalo de tiempo $0 < t \leq T$, en los instantes $t = nT/8$, donde n es un número entero entre 1 y 8. A continuación la figura 2 ilustra estas líneas para los instantes mencionados:



El campo eléctrico es tangente a las curvas de la izquierda, de la figura 2, y el campo magnético es tangente a las curvas de la derecha.



La dirección de las líneas de campo cambia cada medio periodo, debido a la oscilación de las cargas que componen el dipolo oscilante, es decir, si se inicia la oscilación con la carga positiva arriba y la carga negativa abajo –figura 1- al cabo de medio periodo sus posiciones se han invertido.

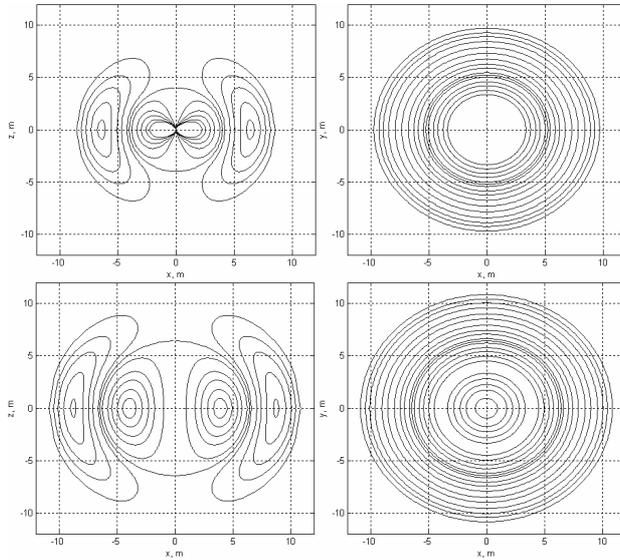


FIGURA 2. Líneas de campo eléctrico y magnético de un dipolo oscilante en los instantes $n\frac{T}{8}$, n es un número entero entre 1 y 8, $Q(x, z) = \text{const.}$

Las líneas de campo eléctrico comienzan a brotar de los polos a partir del instante $t = 0$, y están encerradas en una esfera que corresponde a un valor $Q = 0$. Al observar la secuencia de gráficas se ve que tanto esta esfera como las otras líneas, correspondientes a los otros $Q = \text{constante}$, aumentan con el tiempo, con una velocidad de propagación c .

8. Conclusiones

El método propuesto por Hertz para solucionar las ecuaciones de Maxwell, es una herramienta valiosa para comprender mejor la estructura del campo electromagnético (\vec{E}, \vec{H}) generado por el dipolo oscilante. En este trabajo se consideraron aspectos analíticos, y aspectos gráficos, así:

- Desde el punto de vista teórico, el potencial de Hertz $\vec{\Pi}$ depende solamente del parámetro escalar Q , lo que permite expresar

el campo electromagnético (\vec{E}, \vec{H}) en términos de una única variable escalar Q , que es proporcional al flujo eléctrico.

- En la representación de Hertz, el dipolo oscilante es descrito por una sola magnitud: el vector de polarización eléctrica $\vec{d}(\vec{r}, t)$. Entonces, de acuerdo a la ecuación (9), para el dipolo oscilante la fuente del potencial de Hertz es la polarización eléctrica $\vec{d}(\vec{r}, t)$.
- Hertz, además de hacer la descripción analítica de la radiación emitida por el dipolo, hace uso de la representación gráfica de las líneas de campo eléctrico para facilitar la comprensión y las construye a partir del parámetro Q . Utilizando el procedimiento de Hertz en este artículo se construyó una serie de gráficas con las distribuciones de campo eléctrico y magnético, como función del tiempo. Esto contrasta con los textos revisados, aquellos que representan gráficamente las líneas de campo, reproducen las que hizo Hertz sin ahondar en este aspecto.

Referencias

- [1] HAUSER, Walter. “Vector products and pseudovectors”, *Am. J. Phys* **54** N.2 (February 1986) 168-172.
- [2] HERTZ, Heinrich R. *Las ondas electromagnéticas*. Selección de las *Untersuchungen*, con introducción, notas y apéndices a cargo de Manuel García Doncel y Xavier Roqué. Bellaterra – Cataluña 1990, Publicaciones de la Universidad Autónoma de Barcelona y Ediciones de la Universidad Politécnica de Cataluña.
- [3] McCREA, W. H. “Hertzian electromagnetic potentials”, *Proceeding Royal Society* **240** (1957) 447-457.
- [4] RIGHI, A. “Sui campi elettromagnitici e particolarmente su quelli creati. Da caniche elettriche o da poli magnetici in movimento”, *Nuovo Cimento* **2** (1901) 104.