MOMENTO Revista del Depto. de Física U. Nacional de Colombia. Número 9, Abril de 1995

RELACION ENTRE LOS FORMALISMOS DE WEYL, WIGNER Y HUSIMI EN LA MECANICA CUANTICA

D. Campos
Departamento de Física, Universidad Nacional,
Bogotá, Colombia, S.A.

RESUMEN

En esta contribución se presenta la formulación de la mecánica cuántica en el espacio de fase en la cual el operador densidad se identifica por densidades de probabilidad y los observables se describen por funciones definidas en el espacio de fase. Esto permite que los valores esperados mecánico cuánticos sean calculados por medio de integrales similares a las de la mecánica estadística clásica. Consideramos los métodos de Weyl, Wigner y Husimi y la relación entre ellos.

ABSTRACT

The paper presents a review of the phase-space formulation of the quantum mechanics in the sense that the density operator can be identified whith phase-space probability densities and the observables can be described by functions on phase-space. This allows the calculation of expectation values as integrals like to the ones of the classical statistical mechanics. We consider the Weyl, Wigner and Husimi methods and the relationships between them.

1. INTRODUCCION

La descripción de un sistema mecánico clásico de f grados de libertad se hace en el espacio de fase; esto es, en un espacio de $2f$ dimensiones cuyos ejes coordenados son ortogonales entre si y que se rotulan por las coordenadas y los impulsos generalizados, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_f)$ y $p = (p_1, p_2, \ldots, p_f)$. En este espacio, el *estado* del sistema en el instante de tiempo t se representa por un punto $(q(t), p(t))$, el cual describe una *trayectoria* a medida que transcurre el tiempo. Las trayectorias en el espacio de fase no se cruzan y se cumple el teorema de Liouville.

En el caso de un sistema mecánico cuántico, la descripción del estado no se realiza en el espacio de fase. Lo habitual es emplear funciones de onda que dependen de la posición o del impulso, $\psi(q, t)$ o $\tilde{\psi}(p, t)$, designadas como representaciones de coordenadas o de impulsos, respectivamente. En esta formulación, los parámetros q y

p son independientes del tiempo y, como consecuencia del principio de incertidumbre, desaparece en la mecánica cuántica el concepto de trayectoria.

Para facilitar la comparación y la transición del dominio cuántico al clásico, desde los albores de la teoría cuántica ha existido el interés de formular esta teoría con la ayuda de funciones definidas en el espacio de fase, análogas a las funciones de distribución de la mecánica estadística clásica. Los trabajos de Weyl [1], Wigner [2], Groenewold [3] y Moyal [4] son el punto de partida para las investigaciones –antiguas y modernas– sobre este tema.

En la mecánica cuántica, el estado del sistema se puede describir por medio del operador de Liouville $\hat{\rho}(t)$, en lugar del ket $|\psi(t)>$ usado tradicionalmente en esta teoría. Esto permite, además de una formulación unificada para estados puros y estados mezclados, el tratar estados y observables en pie de igualdad, ya que ambos son descritos por medio de operadores.

El hecho anterior es el punto de partida para lograr una formulación de la mecánica cuántica en el espacio de fase (representación-*qp*). En el formalismo de Weyl-Wigner-Moyal, al estado cuántico $\hat{\rho}(t)$ se le asocia una función real $\tilde{\rho}(q, p, t)$ denominada *función de Wigner* [5, 6]. Esta función desempeña un papel análogo al de las funciones de distribución clásicas pero no se puede interpretar como una auténtica densidad de probabilidad debido a que *puede tomar valores negativos*. Una distribución alternativa es la función de Husimi, introducida por Husimi en 1940 [7], la cual siempre es positiva.

El objeto del presente trabajo es hacer una exposición moderna de las ideas y técnicas fundamentales que conducen a la formulación de la mecánica cuántica en el espacio de fase, mediante la función de Wigner o la función de Husimi, al igual que entender la relación entre ellas. Esto es fundamental, en la medida en que existe una abundante literatura especializada en la cual se hace uso de estos formalismos para estudiar diferentes sistemas físicos.

2. CONEXION DE LA TEORIA CUANTICA CON EL ESPACIO DE FASE

Vamos a considerar un sistema mecánico cuántico de f grados de libertad con operadores básicos de posición e impulso $\hat{q} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \ldots, \hat{q}_f)$ y $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_f)$, los cuales son independientes del tiempo (imagen de Schrödinger) y obedecen las relaciones de conmutación de Heisenberg. Asociados con estas entidades, definimos para cada grado de libertad ($k = 1, 2, \ldots, f$) operadores destrucción y creación,

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{q}_k}{q_0} + i\,\frac{\hat{p}_k}{p_0}\right), \qquad \hat{a}_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{q}_k}{q_0} - i\,\frac{\hat{p}_k}{p_0}\right) \tag{1}$$

y formamos con ellos los conjuntos $\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_f)$ y $\hat{a}^+ = (\hat{a}_1^+, \hat{a}_2^+, \ldots, \hat{a}_f^+)$. En las definiciones anteriores, q_0 y p_0 son unidades de longitud e impulso restringidas por la condición $q_0\, p_0 = \hbar$, donde $\hbar$ es la constante de Planck. Usualmente, en términos de un oscilador armónico de masa m_0 y frecuencia ω_0,

$$q_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0\,\omega_0}}\,, \qquad p_0 = \sqrt{\hbar\, m_0\, \omega_0}\,. \tag{2}$$

Para cada grado de libertad del sistema introducimos *estados coherentes* normalizados a la unidad, definidos como los kets propios del operador destrucción [8-10]

$$\hat{a}_k \left| z_k \right\rangle = z_k \left| z_k \right\rangle, \tag{3}$$

donde cada número complejo z_k es un valor propio. El conjunto $\{ z_k\,,\, k = 1, 2, \ldots, f\}$ se puede considerar como un elemento de un espacio euclidiano complejo f-dimensional, C_f, con puntos de la forma $z = (z_1, z_2, \ldots, z_f)$. En este espacio definimos el producto escalar entre dos vectores y el cuadrado de la distancia entre ellos como sigue:

$$\alpha\,\beta = \alpha_1\,\beta_1 + \ldots + \alpha_f\,\beta_f \quad , \qquad \left|\alpha - \beta\right|^2 = \left|\alpha_1 - \beta_1\right|^2 + \ldots + \left|\alpha_f - \beta_f\right|^2 .$$

Por otro lado, asociado con el el punto z en C_f tenemos en el espacio de Hilbert convencional un *estado coherente* normalizado $| z >$, definido como el producto directo

$$\left| z \right\rangle := \left| z_1, z_2, \ldots, z_f \right\rangle = \left| z_1 \right\rangle \otimes \left| z_2 \right\rangle \otimes \ldots \otimes \left| z_f \right\rangle . \tag{4}$$

La importancia física de los estados coherentes está en el hecho de que ellos forman un conjunto completo (estrictamente, sobrecompleto) y que representan estados de incertidumbre mínima, esto es, estados para los cuales se cumple la igualdad en la relación de incertidumbre de Heisenberg.

Los valores esperados de los operadores de posición e impulso, $\hat{q}_k$ y $\hat{p}_k$, con relación al estado coherente $| z >$ están dados por

$$q_k = q_k[z] := \left\langle z \right| \hat{q}_k \left| z \right\rangle = \left\langle z_k \right| \hat{q}_k \left| z_k \right\rangle = \frac{q_0}{\sqrt{2}}\,(z_k + z_k^*)\,, \tag{5a}$$

$$p_k = p_k[z] := \left\langle z \right| \hat{p}_k \left| z \right\rangle = \left\langle z_k \right| \hat{p}_k \left| z_k \right\rangle = -\,i\,\frac{p_0}{\sqrt{2}}\,(z_k - z_k^*)\,, \tag{5b}$$

donde p_k y $p_k[z]$ son notaciones alternativas para referirse al mismo valor esperado. Las relaciones (5) permiten escribir el número complejo z_k en la forma

BIBLIOTECA CENTRAL
SALA UNIVERSIDAD NACIONAL

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{q_k}{q_0} + i \, \frac{p_k}{p_0} \right]. \tag{5c}$$

De esta manera, a cada estado coherente $|z>$ le podemos asociar un punto $q = (q_1, q_2, \ldots, q_f)$ y un punto $p = (p_1, p_2, \ldots, p_f)$ en sendos espacios euclidianos f-dimensionales de posición e impulso, respectivamente. Por otro lado, como cada número complejo z_k es un valor propio del operador destrucción $\hat{a}_k$, al recorrer todos los valores propios de este operador se generan todos los rangos completos de posición e impulso, $-\infty < q_k < \infty$ y $-\infty < p_k < \infty$. De esta manera, cada punto (q, p) del espacio de fase clásico está relacionado de manera única con un estado coherente y viceversa. Finalmente, como los operadores $\hat{q}_k$ y $\hat{p}_k$ tienen espectros continuos, las ecuaciones de valores propios se pueden escribir empleando la misma notación,

$$\hat{q}_k \left| q \right\rangle = q_k \left| q \right\rangle, \qquad \hat{p}_k \left| p \right\rangle = p_k \left| p \right\rangle. \tag{6}$$

En conclusión, los valores esperados de posición e impulso con relación a los estados coherentes permiten establecer la conexión entre la descripción cuántica y el espacio de fase clásico asociado con el sistema.

En el resto de este artículo usaremos la notación $z \leftrightarrow (q, p)$, $z' \leftrightarrow (q', p')$, etc., para referirnos a conjunto de cantidades que están ligadas entre si por la transformación (5).

3. REPRESENTACIONES DE WEYL Y DE WIGNER

3.1 Definición del operador de Weyl

El estado coherente $|z>$ se puede escribir [8] en la forma

$$\left| z \right\rangle = \hat{D}(q, p) \left| 0 \right\rangle = exp\left(-\frac{1}{2} \, z \, z^* \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \left| n \right\rangle \tag{7}$$

donde $|0> := |z=0> := |n=0>$ es el estado vacío y $|n> := |n_1, n_2, \ldots, n_f>$ es el estado de un sistema de f osciladores armónicos independientes entre si. En lo anterior, $\hat{D}(z) := \hat{D}(q, p)$ es el operador desplazamiento u *operador de Weyl* [1], definido como

$$\hat{D}(q, p) := \exp\left(\frac{i}{\hbar} \, (p \, \hat{q} - q \, \hat{p}) \right), \tag{8}$$

donde q y p están ligados con z por las relaciones (5), $p \, \hat{q}$ significa $p \, \hat{q} = p_1 \, \hat{q}_1 + \ldots + p_f \, \hat{q}_f$ y algo similar representa $q \, \hat{p}$. Obsérvese que a cada punto del espacio de fase se le asocia un operador de Weyl.

La importancia del operador de Weyl está en el hecho de que operadores asociados con puntos diferentes del espacio de fase son ortogonales, en el sentido de que se satisface la relación

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{\mathrm{D}}(q,\, p)\right] = (2\pi\hbar)^f \;\; \delta(q)\, \delta(p) \,. \tag{9}$$

En esta expresión, Tr significa la traza, esto es, la suma de los elementos diagonales en cualquier representación que se elija (coordenadas, impulsos, etc.) y $\delta(q)$ es el producto de f funciones delta de Dirac, $\delta(q) = \delta(q_1)\, \delta(q_2) \ldots \delta(q_f)$.

3.2 Definición del símbolo de Weyl

Los operadores de Weyl son completos, ya que un operador mecánico cuántico $\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{B}(\hat{q},\, \hat{p})$ se puede expandir en términos de ellos, según la relación Weyl [1]

$$\mathrm{B}(\hat{q},\, \hat{p}) = \int \mathrm{B}(q,\, p)\, \hat{\mathrm{D}}(q,\, p)\, d\Gamma, \tag{10a}$$

donde usamos la notación

$$d\Gamma := \frac{1}{(2\pi\hbar)^f}\, dq\, dp = \frac{1}{\pi^f}\, d^{2f}z \,, \qquad d\Gamma' = d\Gamma[z'] \,. \tag{10b}$$

La integración en (10a) se hace sobre todo el espacio de fase $2f$-dimensional. De acuerdo con (10a), el operador $\mathrm{B}(\hat{q},\, \hat{p})$ tiene asociada una función escalar $\mathrm{B}(q,\, p)$ definida en el espacio de fase, la cual recibe el nombre de *símbolo de Weyl*. A pesar de que usamos una notación similar, el lector no debe confundir $\mathrm{B}(\hat{q},\, \hat{p})$ con $\mathrm{B}(q,\, p)$, ya que en virtud de las relaciones de conmutación de Heisenberg *no se cumple* una regla de substitución como $q \leftrightarrow \hat{q}$ y $p \leftrightarrow \hat{p}$.

El símbolo de Wey, asociado con el operador $\hat{\mathrm{B}}$, se determina por medio de la relación

$$\mathrm{B}(q,\, p) = \mathrm{Tr}\left[\hat{\mathrm{B}} \;\; \hat{\mathrm{D}}^+(q,\, p)\right] \tag{11a}$$

$$= \int w^*(q',\, p) \left\langle q' + \tfrac{1}{2}\, q \right| \hat{\mathrm{B}} \left| q' - \tfrac{1}{2}\, q \right\rangle dq' \tag{11b}$$

$$= \int w(q,\, p') \left\langle p' + \tfrac{1}{2}\, p \right| \hat{\mathrm{B}} \left| p' - \tfrac{1}{2}\, p \right\rangle dp' \,, \tag{11c}$$

donde la cruz (+) en el operador de Weyl significa el adjunto. Por conveniencia definimos cantidades auxiliares

$$w(q', p) := \exp\left(\frac{i}{\hbar}\, q' p\right) \tag{12}$$

$$\Omega(z, z') := \exp(z\, z'^* - z^*\, z') = w^*(q, p')\, w(q', p), \tag{13}$$

donde $q\, p' := q_1\, p_1' + \ldots + q_f\, p_f'$.

La expresión que hemos obtenido para el símbolo de Weyl es la transformada de Fourier de un elemento matricial del operador $\hat{\mathrm{B}}$. Esta transformada de Fourier se puede invertir para dar en representación de coordenadas el elemento matricial

$$\left\langle q' \middle| \hat{\mathrm{B}} \middle| q'' \right\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^f} \int w\!\left(\frac{1}{2}(q' + q''), p\right) \mathrm{B}(q' - q'', p)\, dp \tag{14}$$

y una expresión análoga se cumple en la representación de impulsos.

3.3 Definición del símbolo de Wigner y del operador de Wigner

En analogía con el hecho de que las funciones de onda en representaciones de coordenadas y de impulsos están ligadas por una transformada de Fourier, definimos el *símbolo de Wigner* $\tilde{\mathrm{B}}(q, p)$ asociado con el operador $\hat{\mathrm{B}}$ como la transformada de Fourier del símbolo de Weyl:

$$\tilde{\mathrm{B}}(q', p') := \int \Omega(z, z')\, \mathrm{B}(q, p)\, d\Gamma. \tag{15}$$

A esta expresión le corresponde la transformación inversa

$$\mathrm{B}(q, p) = \int \Omega^*(z, z')\, \tilde{\mathrm{B}}(q', p')\, d\Gamma'. \tag{16}$$

Si substituimos en la expresión para $\tilde{\mathrm{B}}(q, p)$ el símbolo de Weyl $\mathrm{B}(q, p)$, determinado mediante la representación de coordenadas (11b), encontramos que es conveniente introducir un nuevo operador, bautizado como *operador de Wigner*, definido por medio de la relación

$$\hat{\Pi}(q', p') := \int \Omega^*(z, z')\, \hat{\mathrm{D}}(q, p)\, d\Gamma \tag{17a}$$

$$= \int w(q, p') \left| q' + \frac{1}{2} q \right\rangle \left\langle q' - \frac{1}{2} q \right| dq \tag{17b}$$

$$= \int w^*(q', p) \left| p' + \frac{1}{2} p \right\rangle \left\langle p' - \frac{1}{2} p \right| dp\,. \tag{17c}$$

Esto es, a cada punto del espacio de fase le asociamos un operador de Wigner. En las expresiones anteriores, los operadores bajo los signos integrales son proyectores que extraen de un estado arbitrario $|\psi\rangle$ su componente en la dirección $|q' + q/2\rangle$ o $|p' + p/2\rangle$ con un peso dado por la función de onda $\psi(q' - q/2)$ o $\tilde{\psi}(p' - p/2)$.

Con ayuda del operdor de Wigner, el símbolo de Weyl se determina mediante las relaciones

$$\tilde{B}(q', p') = \mathrm{Tr}\left[\hat{B}\ \hat{\Pi}(q', p')\right] \tag{18a}$$

$$= \int w^*(q, p') \left\langle q' + \frac{1}{2} q \right| \hat{B} \left| q' - \frac{1}{2} q \right\rangle dq \tag{18b}$$

$$= \int w(q', p) \left\langle p' + \frac{1}{2} p \right| \hat{B} \left| p' - \frac{1}{2} p \right\rangle dp\,. \tag{18c}$$

El operador $\hat{\Pi}(z') := \hat{\Pi}(q', p')$ fue introducido por Royer [11] como el operador paridad asociado con el punto (q', p') del espacio de fase. Estrictamente, la definición de Royer está relacionada con la presente defínción por la relación $2^f\ \hat{\Pi}_{qp} = \hat{\Pi}(q, p)$. Dahl [12] ha coleccionado propiedades de los operadores de Weyl y de Wigner, las cuales han sido derivadas por Royer [11], Grossmann y Huguenin [13, 14].

3.4 Símbolo de Wigner asociado a un proyector y función de Wigner

Como ejemplo de interés, vamos a considerar el proyector

$$\hat{\mathcal{P}} := |\Phi\rangle\langle\Psi| \tag{19}$$

asociado con dos kets arbitrarios $|\Phi>$ y $|\Psi>$. Por aplicación de las relaciones anteriores, el símbolo de Wigner asociado con este operador es dado por

$$\tilde{\mathcal{P}}(q', p') = \int w^*(q, p')\, \Psi^*\left(q' - \frac{1}{2} q\right) \Phi\left(q' + \frac{1}{2} q\right) dq$$

BIBLIOTECA CENTRAL
SALA UNIVERSIDAD NACIONAL

$$= \left\langle \Psi \left| \hat{\Pi}(q', p') \right| \Phi \right\rangle, \tag{20}$$

donde $\Psi(q) = <q|\Psi>$ y $\Phi(q) = <q|\Phi>$ son funciones de onda en representaciones de coordenadas.

La famosa función de Wigner, introducida en 1932 [2], corresponde al caso en el cual los dos kets coinciden, $|\Psi> = |\Phi>$. Esto es, la *función de Wigner* asociada con el estado $|\Psi>$ es por definición el valor esperado del operador de Wigner $\hat{\Pi}(q', p')$ con respecto al estado $|\Psi>$.

3.5 Expansión de un operador en términos del operador de Wigner

Si substituimos (16) en (10) y usamos (17a), encontramos que el operador $\hat{B}$ se puede expandir en términos del operador de Wigner, como

$$B(\hat{q}, \hat{p}) = \int \tilde{B}(q', p')\,\hat{\Pi}(q', p')\,d\Gamma', \tag{21}$$

donde el coeficiente de la expansión es el símbolo de Wigner.

4. DETERMINACIÓN DE VALORES ESPERADOS

La relación (21) es particularmente útil debido a que, dados dos kets arbitrarios $|\Psi>$ y $|\Phi>$, podemos calcular el elemento matricial $\langle\Psi\,|\hat{B}|\,\Phi\rangle$ como una integral sobre el espacio de fase:

$$\langle\Psi\,|\hat{B}|\,\Phi\rangle = \int \tilde{B}(q', p')\langle\Psi\,|\hat{\Pi}(q', p')|\,\Phi\rangle\,d\Gamma', \tag{22}$$

donde el símbolo de Wigner está asociado con el operador y el elemento matricial $\langle\Psi\,|\hat{\Pi}(q', p')|\,\Phi\rangle$ depende del operador de Wigner y de los estados objeto de interés.

Similarmente, si usamos la identidad [14]

$$\hat{\Pi}(q', p')\ \hat{\Pi}(q'', p'') = 4^f\ \Omega(z', -2\,z'')\ \hat{D}(2\,q' - 2\,q'', 2p' - 2\,p'') \tag{23}$$

y empleamos (9), podemos demostrar que dados dos operadores $A(\hat{q}, \hat{p})$ y $B(\hat{q}, \hat{p})$, entonces

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{A}\ \hat{B}\right] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^f}\int \tilde{A}(q', p')\,\tilde{B}(q', p')\,dq'\,dp'. \tag{24}$$

Este resultado es especialmente interesante debido a que sugiere formular la mecánica cuántica en una forma similar a la de la mecánica estadística clásica, en donde los valores esperados se determinan integrando sobre el espacio de fase el producto de la función que representa el observable por la función de distribución que describe el estado del sistema.

5. APLICACIÓN DEL MÉTODO AL OPERADOR DENSIDAD

La evolución temporal de un sistema mecánico cuántico se puede hacer por medio de la ecuación de Liouville en lugar de la ecuación de Schrödinger. La ecuación de Liouville es una ecuación de movimiento para el operador densidad $\hat{\rho}(t)$, el cual permite una formulación unificada de estados puros y estados mezclados:

$$\hat{\rho}(t) = \left|\psi(t)\right\rangle\left\langle\psi(t)\right|, \qquad \text{estado puro} \tag{25}$$

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{k=1}^{N} W_k \left|\psi^{(k)}(t)\right\rangle\left\langle\psi^{(k)}(t)\right|, \qquad \text{estado mezclado.} \tag{26}$$

El estado mezclado es una superposición incoherente de N estados normalizados, con pesos estadísticos W_k; esto es, W_k es la probabilidad que se tiene de encontrar el sistema físico, en el instante de tiempo inicial t_0, en el estado $\left|\psi^{(k)}(t_0)\right\rangle$.

El operador densidad es más fundamental que la función de onda y permite expresar el *valor esperado estadístico* de cualquier operador mecánico cuántico $\hat{B}$ como

$$<< \hat{B} >> = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}(t)\ \hat{B}\right] \tag{27a}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{f}} \int \tilde{\rho}(q', p', t)\, \tilde{B}(q', p')\, dq'\, dp', \tag{27b}$$

donde $\tilde{\rho}(q', p', t)$ es la función de Wigner (o símbolo de Wigner) asociado con el operador densidad. En el caso más general de estados mezclados (26), la *función de Wigner* está dada por

$$\tilde{\rho}(q', p', t) = \sum_{k=1}^{N} W_k \left\langle \psi^{(k)}(t) \right| \hat{\Pi}(q', p') \left| \psi^{(k)}(t) \right\rangle. \tag{28}$$

Como el operador de Wigner es hermítico entonces la función de Wigner es real. Sin embargo, esta función puede tomar valores negativos [15] y, en consecuencia, no se puede interpretar como una densidad de probabilidad análoga a la densidad de probabilidad de la mecánica estadística clásica. La dificultad de interpretar $\tilde{\rho}(q', p', t)$ físicamente condujo a Feynman a sugerir la idea de introducir en la mecánica cuántica el concepto de probabilidades negativas [16].

Si el sistema se encuentra en un *estado puro*, entonces, uno de los W_k es igual a uno y los demás son cero. En este caso el valor esperado estadístico se reduce al valor esperado cuántico,

$$<< \hat{B} >> (t) = < \hat{B} > = \left\langle \Psi(t) \right| \hat{B} \left| \Psi(t) \right\rangle, \tag{29}$$

de tal manera que $\tilde{\rho}(q', p', t) = \langle \Psi(t) \,|\, \hat{\Pi}(q', p') \,|\, \Psi(t) \rangle$ se convierte en la función de Wigner asociada con el estado puro $|\,\Psi(t)\rangle$.

6. FUNCIÓN DE HUSIMI

Como la función de Wigner toma valores negativos, con el fin de establecer una correspondencia entre sistemas clásicos y cuánticos es conveniente introducir una función de distribución cuyos valores siempre sean positivos.

Sea $\hat{B}$ un operador arbitrario y $|\,z\rangle$ un estado coherente, $z \leftrightarrow (q, p)$. La función de Husimi asociada con el operador $\hat{B}$ se define como el valor esperado del operador $\hat{B}$ con relación al estado coherente $|\,z\rangle$:

$$B\_(q, p) := \langle z \,|\, \hat{B} \,|\, z \rangle \tag{30a}$$

$$= \int \tilde{B}(q', p') \left\langle z \middle| \hat{\Pi}(q', p') \middle| z \right\rangle d\Gamma', \tag{30b}$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de usar la ecuación (21). Bajo el integrando aparece el valor esperado del operador de Wigner, asociado con el punto (q', p') del espacio de fase, con relación al estado coherente $|\,z\rangle$. Este valor esperado es dado por

$$\left\langle z \middle| \hat{\Pi}(z') \middle| z \right\rangle = \left\langle z' \middle| \hat{\Pi}(z) \middle| z' \right\rangle = 2^f \exp\!\left(-2\,|\,z - z'\,|^2\right), \tag{31}$$

lo cual explica el origen de la función de peso que empleó originalmente Husimi [7] en 1940 con el fin de suavizar la función de Wigner y tener una función de distribución definidamente positiva. La ecuación (30b) –en conjunto con (31)– define una transformada de Gauss (or Weierstrass) [17] entre el símbolo de Wigner y el símbolo o función de Husimi.

En particular, el símbolo de Husimi asociado con el operador densidad (26) es dado por

$$\rho\_(q, p, t) = \langle z \,|\, \hat{\rho} \,|\, z \rangle = \sum_{k=1}^{N} W_k \left| \left\langle z \,\middle|\, \psi^{(k)}(t) \right\rangle \right|^2, \tag{32}$$

de tal manera que representa la probabilidad de encontrar el sistema físico en el instante de tiempo t en el estado coherente $|\,z\rangle$ o, equivalentemente, la probabilidad de que el sistema en el instante de tiempo t tenga valores promedios de posición e impulso, q y p.

Además del operador $\hat{B}$ empleado en (30), introducimos ahora un segundo operador $\hat{A}$. Asociado con el símbolo de Wigner $\tilde{A}(q', p')$ definimos un nuevo símbolo $A_+(q, p)$ como aquel que satisface la transformada de Gauss

$$\tilde{A}(q', p') = \int A_+(q, p) \left\langle z' \middle| \hat{\Pi}(q, p) \middle| z' \right\rangle d\Gamma. \tag{33}$$

Usando las ecuaciones (30) y (33) en (24) encontramos que la traza del producto de los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se puede escribir en la forma de una integral de un producto de funciones sobre el espacio de fase:

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{A}\ \hat{B}\right] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^f} \int A_+(q, p)\, B_-(q, p)\, dq\, dp \tag{34a}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^f} \int A_-(q, p)\, B_+(q, p)\, dq\, dp\,. \tag{34b}$$

Si un sistema mecánico-cuántico se encuentra descrito por el operador densidad $\hat{\rho}(t)$ entonces, aplicando (34b) a (27a), encontramos que el promedio estadístico de un operador $\hat{B}$ se puede escribir en la forma

$$<< \hat{B} >> = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}(t)\ \hat{B}\right] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^f} \int \rho_-(q, p, t)\, B_+(q, p)\, dq\, dp\,. \tag{35}$$

Este resultado es fundamental en la medida en que muestra que el promedio estadístico de cualquier observable mecánico-cuántico se puede determinar por medio de la función de distribución de Husimi $\rho_-(q, p, t)$, la cual tiene todas las propiedades de una función de distribución típica de la mecánica estadística clásica. En particular, debido a que la traza del operador densidad es uno y a que al operador unidad le corresponde el símbolo $B_+(q, p) = 1$, entonces se cumple la condición de normalización

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^f} \int \rho_-(q, p, t)\, dq\, dp = 1\,.$$

7. DISCUSION

En el presente artículo hemos realizado una presentación compacta y moderna de una serie de resultados dispersos en la literatura. Se podría deducir un buen número de fórmulas adicionales, pero tal objetivo está fuera del alcance del presente trabajo.

Es interesante recalcar que tanto la función de Wigner como la función de Husimi permiten calcular promedios estadísticos por un procedimiento análogo al de la mecánica estadística clásica. La diferencia entre las dos está en que la primera es una pseudodistribución de probabilidades, debido a que puede tomar valores negativos, mientras que la segunda es una auténtica distribución de probabilidades definida en el espacio de fase.

En el formalismo de Wigner, tanto el operador densidad como los demás operadores son tratados en pie de igualdad, ya que ambos se representan en (27b) por sus respectivos símbolos de Wigner. En la formulación de Husimi (35) se crea una asimetría ya que el operador densidad se representa por el símbolo $\rho_{-}(q, p, t)$ mientras que al operador $\hat{B}$ se le hace corresponder la función $B_{+}(q, p)$. Este es el precio que hay que pagar para tener en la mecánica cuántica una auténtica distribución de probabilidad como $\rho_{-}(q, p, t)$.

8. REFERENCIAS

[1]. Weil, H., *The theory of Groups and Quantum Mechanics.* 1931, New York: Dover.

[2]. Wigner, E., *On the Quantum Corrections For Thermodynamics Equilibrium.* Phys. Rev., 1932. **40**: p. 749.

[3]. Groenewold, H.J., *On the Principles of Elementary Quantum Mechanics.* Physica, 1946. **12**(7): p. 405.

[4]. Moyal, J.E., *Quantum Mechanics as a Statistical Theory.* Proc. Cambridge Phil. Soc., 1949. **45**: p. 99.

[5]. Balazs, N.L. and B.K. Jennings, *Wigner's Function and other Distribution Functions in Mock phase Spaces.* Phys. Rep., 1984. **104**(6): p. 347.

[6]. Hillery, M., *et al., Distribution Functions in Physics: Fundamentals.* Phys. Rep., 1984. **106**(3): p. 121.

[7]. Husimi, K., Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1940. **55**: p. 762.

[8]. Glauber, R.J., *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field.* Phys. Rev., 1963. **131**: p. 2766.

[9]. Klauder, J.R. and E.C.G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics.* 1968, New York: Benjamin.

[10]. Louisell, W.H., *Quantum Statistical Properties of Radiation.* 1973, New York: Wiley.

[11]. Royer, A., *Wigner function as the expectation value of a parity operator.* Phys. Rev. A, 1977. **15**(2): p. 449.

[12]. Dahl, J.P., *On the Group of Translations and Inversions of Phase Space and the Wigner Functions.* Physica Scripta, 1982. **25**: p. 499.

[13]. Grossmann, A., Commun. Math. Phys., 1976. **48**: p. 191.

[14]. Grossmann, A. and P. Huguenin, Helv. Phys. Acta, 1978. **51**: p. 252.

[15]. Wigner, E.P., *Quantum-Mechanical Distribution Functions Revisited,* in *Perspectives in Quantum Theory,* W. Yourgrau and A. van der Merwe, Editor. 1971, Dover: New York.

[16]. Nauenberg, M. and A. Keith, *Negaative Probability and the Correspondence between Quantum and Classical Physics,* in *Quantum Chaos – Quantum Measurement,* P. Cvitanovic, I. Percival, andA. Wirzba, Editor. 1992, Kluwer Academic: Dordrecht.

[17]. Magnus, W., F. Oberhettinger, and R.J. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics.* 1966, New York: Springer.