

ECUACION DE LIOUVILLE EN EL FORMALISMO DE HUSIMI

D. Campos

Departamento de Física, Universidad Nacional,
Bogotá, Colombia, S.A.

RESUMEN

En la formulación de la mecánica cuántica en el espacio de fase, el operador densidad se representa por una densidad de probabilidad (función de Husimi) y los observables se describen por funciones definidas en el espacio de fase. El objetivo de la presente contribución es obtener la ecuación de movimiento para la función de Husimi a partir de la ecuación mecánico-cuántica de Liouville.

ABSTRACT

In the phase-space formulation of quantum mechanics, the density operator is represented by a probability density (Husimi function) and the observables are described by functions defined in phase-space. In this paper the equation of motion of the Husimi function is derived, starting from the quantum-mechanical Liouville equation.

1. INTRODUCCION

En la carátula de un libro de Osborn [1] se encuentra la siguiente afirmación: *la ecuación*

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \quad (1)$$

es todo lo que usted conoce o necesita conocer!. La relación a la cual se refiere Osborn es la ecuación de Liouville, la cual describe la evolución temporal de un sistema mecánico cuántico identificado por el Hamiltoniano $\hat{H}(t)$. El estado del sistema se describe por el operador de Liouville $\hat{\rho}(t)$, a diferencia de la ecuación de Schrödinger que usa para este fin el concepto de ket $|\psi(t)\rangle$. La ecuación de Liouville es más general que la ecuación de Schrödinger debido a que la primera describe sistemas físicos en estados mezclados mientras que la segunda requiere que el sistema esté en un estado puro [2, 3].

Existe una ecuación cuántica de Liouville (1) y una ecuación clásica de Liouville. Esta última está dada por

$$\frac{\partial \rho_{cl}(q, p, t)}{\partial t} = \left\{ H_{cl}(q, p, t), \rho_{cl}(q, p, t) \right\}, \quad (2)$$

donde $\{ , \}$ es el corchete de Poisson entre el Hamiltoniano clásico $H_{cl}(q, p, t)$ y una densidad de probabilidad $\rho_{cl}(q, p, t) \geq 0$. La ecuación (2) describe la evolución temporal de la función de distribución $\rho_{cl}(q, p, t)$ en el espacio de fase asociado con el sistema clásico. Las entidades q y p representan las coordenadas de posición y los impulsos canónicamente conjugados para un sistema de f grados de libertad, respectivamente. Físicamente, $\rho_{cl}(q, p, t) dq dp$ es la probabilidad de encontrar el sistema físico en el instante de tiempo t dentro del elemento de volumen $dq dp$, centrado en el punto (q, p) del espacio de fase.

La ecuación (1) es el fundamento de la mecánica estadística cuántica mientras que (2) es la base de la mecánica estadística clásica [4]. La primera incluye a la segunda como un caso particular, ya que, a la luz del *principio de correspondencia*, la mecánica cuántica es una teoría más general que la mecánica clásica y la primera se debe reducir a la última en el límite en el cual la constante de Planck tiende a cero, $\hbar \rightarrow 0$.

Con base en lo anterior surge la necesidad de responder las siguientes preguntas: (a) ¿Bajo que condiciones se obtiene la ecuación clásica de Liouville a partir de la ecuación cuántica (1)?; (b) ¿Cómo surgen los corchetes de Poisson $\{ , \}$ a partir de los conmutadores de la mecánica cuántica $[,]$? El entendimiento de lo que es el límite clásico de la mecánica cuántica y la comprensión de lo que significa el principio de correspondencia está ligado con estas preguntas. El presente artículo se centra en esta temática y usa el formalismo de Husimi para responder las inquietudes anteriores.

Como base para los desarrollos subsiguientes usaremos los resultados del artículo precedente [5], en el cual se analizó la relación entre los formalismos de Weyl, Wigner y Husimi de la mecánica cuántica. Para referirnos a la ecuación (n) de ese artículo usaremos la *notación* (1.n).

2. SIMBOLOS ASOCIADOS CON UN OPERADOR

Los valores esperados de los operadores de posición e impulso con relación a un estado coherente, identificado por los números complejos $z = (z_1, z_2, \dots, z_f)$, están dados por (1.5),

$$q = q[z] := \langle z | \hat{q} | z \rangle = \frac{q_0}{\sqrt{2}} (z + z^*), \quad (3a)$$

$$p = p[z] := \langle z | \hat{p} | z \rangle = -i \frac{p_0}{\sqrt{2}} (z - z^*), \quad (3b)$$

donde q y $q[z]$ son notaciones alternativas para referirnos al mismo valor esperado, y q_0 y p_0 son unidades de posición e impulso restringidas por la relación $q_0 p_0 = \hbar$.

A cada punto (q, p) del espacio de fase le corresponde un número complejo z , $(q, p) \leftrightarrow z$, un estado coherente $|z\rangle := |z_1, z_2, \dots, z_f\rangle$, un operador de Weyl y uno de Wigner. Tal como se muestra en el lado izquierdo de la figura-1, a un operador mecánico cuántico $\hat{B} := B(\hat{q}, \hat{p})$ se le pueden asociar varios símbolos o funciones definidas en el espacio de fase: Weyl, $B(q, p)$; Wigner, $\tilde{B}(q, p)$; $B_-(q, p)$ y $B_+(q, p)$. Las definiciones y resultados relevantes se encuentran en el artículo anterior [5], los cuales omitimos en aras de brevedad.

De acuerdo con la relación (1.32), el valor esperado del operador densidad $\hat{\rho}(t)$ con relación al estado coherente $|z\rangle$ se conoce con el nombre de *función de Husimi*:

$$\rho_-(q, p, t) = \langle z | \hat{\rho}(t) | z \rangle. \quad (4)$$

Esta definición garantiza que la función de Husimi es positiva y acotada, de acuerdo a la relación $0 \leq \rho_-(q, p, t) \leq 1$, de tal manera que se puede interpretar como una función de distribución definida en el espacio de fase, con propiedades similares a las de las funciones de distribución de la mecánica estadística clásica.

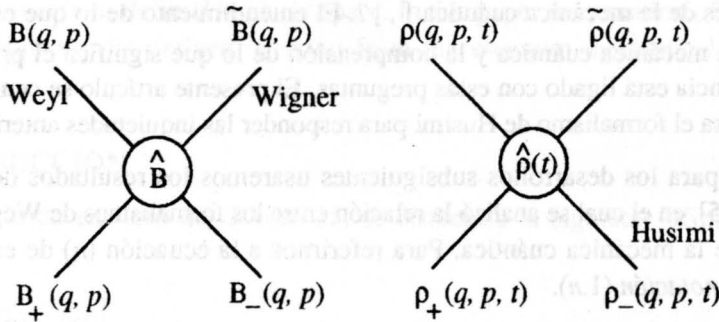


Figura-1. En el lado izquierdo se muestran los símbolos o funciones asociadas con un operador mecánico-cuántico \hat{B} . En el lado derecho se considera el caso del operador densidad.

3. RELACIONES ENTRE LOS SÍMBOLOS

3.1. Relación entre $B_-(q, p)$ y $B_+(q, p)$

Por aplicación de las ecuaciones (1.21) y (1.33) obtenemos

$$B_-(q', p') := \langle z' | \hat{B} | z' \rangle = \int I(z', z) B_+(q, p) d\Gamma, \quad (5)$$

donde usamos la notación (1.10b) y definimos la cantidad auxiliar

$$I(z', z) := \int d\Gamma'' \langle z' | \hat{\Pi}(z'') | z' \rangle \langle z'' | \hat{\Pi}(z) | z'' \rangle \quad (6a)$$

$$= \exp\left(-|z'|^2 - |z|^2 + z' z^* + z'^* z\right). \quad (6b)$$

Para calcular la integral anterior hemos empleado (1.31) y la identidad (A.1).

3.2. Relación entre el símbolo de Weyl y $B_+(q, p)$

Queremos deducir la relación entre el símbolo de Weyl $B(q, p)$ y el símbolo $B_+(q, p)$. Por substitución de (1.33) en (1.16) obtenemos

$$\exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right) B(q, p) = \int d\Gamma'' \Omega^*(z, z'') B_+(q'', p''), \quad (7)$$

donde hemos empleado la identidad

$$\int d\Gamma' \langle z'' | \hat{\Pi}(z') | z'' \rangle \Omega^*(z, z') = \Omega^*(z, z'') \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right). \quad (8)$$

Por comparación de (7) con (1.16), la función $\exp(|z|^2/2) B(q, p)$ es la transformada de Fourier de $B_+(q, p)$. Por lo tanto, en analogía con (1.15), la transformada de Fourier inversa es dada por

$$B_+(q'', p'') = \int d\Gamma \Omega(z, z'') \exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right) B(q, p). \quad (9)$$

3.3. Relación entre el símbolo de Weyl y $B_-(q, p)$

Por substitución de (9) en (5) obtenemos

$$B_-(q'', p'') = \int d\Gamma \Omega(z, z'') \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) B(q) \quad (10)$$

La fórmula inversa se escribe como

$$\exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) B(q, p) = \int d\Gamma'' \Omega^*(z, z'') B_-(q'', p''). \quad (11)$$

3.4. Relación entre el símbolo de Wigner y los símbolos $B_{\pm}(q, p)$

Si los factores $\exp(\pm |z|^2/2)$ no estuvieran presentes en (9) y (10), los símbolos $B_{\pm}(q'', p'')$ coincidirían con la función de Wigner $\tilde{B}(q'', p'')$, tal como se puede deducir al comparar con (1.15). Las exponenciales $\exp(\pm |z|^2/2)$ las podemos extraer del signo integral teniendo en cuenta la identidad

$$\exp\left(\pm \frac{1}{2} |z|^2\right) \Omega(z, z'') = \exp\left[\mp \left(\frac{1}{2} q_0 \frac{\partial}{\partial q''}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} p_0 \frac{\partial}{\partial p''}\right)^2\right] \Omega(z, z''). \quad (12)$$

De esta manera, de (9) y (10) obtenemos la relación que conecta el símbolo de Wigner con los símbolos $B_{\pm}(q, p)$,

$$B_{\pm}(q, p) = \exp\left[\mp \left(\frac{1}{2} q_0 \frac{\partial}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} p_0 \frac{\partial}{\partial p}\right)^2\right] \tilde{B}(q, p). \quad (13)$$

A la luz de (1.35), estos símbolos son importantes ya que permiten calcular el promedio estadístico de un operador con ayuda de la función de Husimi, de una manera idéntica a como se hace en la mecánica estadística clásica.

3.5. Dos casos de interés: energía cinética y energía potencial

Estamos interesados en un operador $\hat{B} = V(\hat{q})$ que sólo es función de los operadores de posición; por ejemplo, la energía potencial. En virtud de las relaciones desarrolladas previamente encontramos:

$$V(q, p) = (2\pi\hbar)^f V\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \delta(p) \quad (14a)$$

$$\tilde{V}(q, p) = V(q) \quad (14b)$$

$$V_{\pm}(q) = \exp\left[\mp \left(\frac{1}{2} q_0 \frac{\partial}{\partial q}\right)^2\right] V(q). \quad (14c)$$

En particular, el símbolo $(-)$ se puede escribir también en la forma

$$V_{-}(q) = \frac{1}{(\sqrt{\pi} q_0)^f} \int dq' \exp\left[-(q'/q_0)^2\right] V(q + q'). \quad (14d)$$

Consideramos ahora un operador $\hat{B} = T(\hat{p})$ que es función sólo de los impulsos; por ejemplo, la energía cinética. Los resultados son similares a las relaciones (14), excepto

por los siguientes cambios: $V \rightarrow T$, $i \rightarrow -i$, $q \rightarrow p$, $q_0 \rightarrow p_0$. En el caso de un sistema de f grados de libertad, al operador

$$\hat{T} = \frac{1}{2m_1} \hat{p}_1^2 + \dots + \frac{1}{2m_f} \hat{p}_f^2 \quad (15a)$$

le corresponden los símbolos

$$T_{\pm}(p) = \frac{p_1^2 \mp \frac{1}{2} p_0^2}{2m_1} + \dots + \frac{p_f^2 \mp \frac{1}{2} p_0^2}{2m_f}. \quad (15b)$$

En relación a la función clásica, cada grado de libertad tiene una contribución adicional $p_0^2/(2m)$ igual al cuadrado de la incertidumbre en el impulso, cuando el sistema se encuentra en un estado coherente $|z\rangle$. Esta contribución refleja la existencia del principio de incertidumbre en el dominio cuántico.

4. COMPOSICION DE GROENEWOLD PARA EL SIMBOLO (-)

El objetivo principal del presente artículo es deducir la ecuación de movimiento para la función de distribución $\rho_-(q, p, t)$. En virtud de la ecuación de Liouville (1), necesitamos encontrar primero el símbolo (-) asociado con el producto de dos operadores, $\hat{C} := \hat{A} \hat{B}$; esto es, expresar el símbolo $C_-(q, p)$ en términos de los símbolos individuales $A_-(q, p)$ y $B_-(q, p)$.

4.1. Símbolo de Wigner asociado con el operador $\hat{C} := \hat{A} \hat{B}$

Como punto de partida usamos la ecuación (1.18b) para determinar el símbolo de Wigner asociado con el producto $\hat{C} := \hat{A} \hat{B}$:

$$\tilde{C}(q', p') = \int w(q, p') \left\langle q' - \frac{1}{2} q \mid \hat{A} \hat{B} \mid q' + \frac{1}{2} q \right\rangle dq. \quad (16)$$

El operador unidad lo expresamos en representación de coordenadas y empleamos (1.14) para evaluar las cantidades $\langle q' - q/2 \mid \hat{A} \mid q' \rangle$ y $\langle q' \mid \hat{B} \mid q' + q/2 \rangle$. Después de un poco de álgebra e introduciendo el cambio de variables -ver notación (3)-

$$q[a] = q' - q'' - \frac{1}{2} q, \quad q[b] = q'' - q' - \frac{1}{2} q, \quad (17)$$

obtenemos el símbolo de Wigner asociado con el operador $\hat{C} := \hat{A} \hat{B}$,

$$\tilde{C}(q', p') =$$

$$\int d\Gamma[a] d\Gamma[b] \Omega(a, z') A(q[a], p[a]) \Omega(a, \frac{1}{2} b) \Omega(b, z') B(q[b], p[b]). \quad (18)$$

4.2. Símbolo (-) asociado con el operador $\hat{C} := \hat{A} \hat{B}$

Ahora bién, de acuerdo con (1.30), el símbolo (-) asociado con el producto de dos operadores es dado por

$$C_{-}(q, p) = \int \left\langle z \left| \hat{\Pi}(q', p') \right| z \right\rangle \tilde{C}(q', p') d\Gamma'. \quad (19)$$

Substituimos (18) en (19) y usamos la identidad (8) para evaluar la integral sobre $d\Gamma'$, de tal manera que obtenemos

$$C_{-}(q, p) = \iint d\Gamma[a] d\Gamma[b] \Omega(a, z) \exp\left(-\frac{1}{2} |a|^2\right) A(q[a], p[a]) \times \\ \exp(-a^* b) \Omega(b, z) \exp\left(-\frac{1}{2} |b|^2\right) B(q[b], p[b]). \quad (20)$$

Si en esta ecuación estuviera ausente el factor $\exp(-a^* b)$, el símbolo $C_{-}(q, p)$ se reduciría al producto $A_{-}(q, p) B_{-}(q, p)$, como se puede ver de (10). Sin embargo, es un hecho que el factor $\exp(-a^* b)$ está presente en (20). Por esta razón seguiremos el método de Balaz y Jennings [6] para deducir la fórmula de Groenewold para la composición de símbolos de Wigner.

Introducimos la cantidad auxiliar

$$C_{-}(q', p'; q'', p'') = \iint d\Gamma[a] d\Gamma[b] \Omega(a, z') \exp\left(-\frac{1}{2} |a|^2\right) A(q[a], p[a]) \times \\ \exp(-a^* b) \Omega(b, z'') \exp\left(-\frac{1}{2} |b|^2\right) B(q[b], p[b]). \quad (21)$$

La cantidad física $C_{-}(q, p)$ está relacionada con la cantidad auxiliar anterior por medio de la relación

$$C_{-}(q, p) = C_{-}(q' = q, p' = p; q'' = q, p'' = p). \quad (22)$$

Definimos ahora operadores que actúan sobre funciones en el espacio de fase,

$$\hat{\lambda}_{\pm z', k} := \pm q_0 \frac{\partial}{\partial q'_k} + i p_0 \frac{\partial}{\partial p'_k} \quad k = 1, 2, \dots, f \quad (23a)$$

$$\hat{\Lambda}_{z', z''} := \hat{\Lambda}_{-z', 1} \hat{\Lambda}_{+z'', 1} + \hat{\Lambda}_{-z', 2} \hat{\Lambda}_{+z'', 2} + \dots + \hat{\Lambda}_{-z', f} \hat{\Lambda}_{+z'', f} \quad (23b)$$

y observamos la validez de la identidad

$$\frac{1}{2} \hat{\Lambda}_{z', z''} \Omega(a, z') \Omega(b, z'') = a^* b \Omega(a, z') \Omega(b, z''), \quad (23c)$$

donde $a^* b = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots + a_f^* b_f$. Por lo tanto, la cantidad auxiliar (28) se puede escribir como

$$C_-(q', p'; q'', p'') = \exp\left(-\frac{1}{2} \hat{\Lambda}_{z', z''}\right) \{A_-(q', p') B_-(q'', p'')\} \quad (24a)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2} \hat{\Lambda}_{z', z''}\right)^n \{A_-(q', p') B_-(q'', p'')\}, \quad (24b)$$

la cual se puede designar como la regla de composición de Groenewold para encontrar el símbolo $(-)$ asociado con el producto de dos operadores.

4.3 Aplicación del teorema multinomial

Para lo que sigue es conveniente usar una notación multi-índice: $[n]$ designará el conjunto ordenado $[n] = (n_1, n_2, \dots, n_f)$ de f enteros no negativos sujetos a la restricción $n = n_1 + n_2 + \dots + n_f$ y $[n!]$ será el producto de f factoriales, $[n!] = n_1! n_2! \dots n_f!$. Usando la definición (30b) y el teorema multinomial podemos escribir

$$\frac{1}{n!} (\hat{\Lambda}_{z', z''})^n = \sum_{[n]} \frac{1}{[n!]} (\hat{\Lambda}_{-z'})^{[n]} (\hat{\Lambda}_{+z''})^{[n]}, \quad (25)$$

donde hemos introducido los operadores

$$(\hat{\Lambda}_{\pm z'})^{[n]} := (\hat{\Lambda}_{\pm z', 1})^{n_1} (\hat{\Lambda}_{\pm z', 2})^{n_2} \dots (\hat{\Lambda}_{\pm z', f})^{n_f}. \quad (26)$$

En la suma (25) el rango de cada índice es de 0 hasta n, pero ellos no se pueden sumar independientemente debido a la restricción $n = n_1 + n_2 + \dots + n_f$.

4.5. Símbolo $(-)$ asociado con el conmutador $\hat{\mathcal{C}} := [\hat{A}, \hat{B}]$

El símbolo $(-)$ asociado con el conmutador

$$\hat{\mathcal{C}} := [\hat{A}, \hat{B}] \quad (27)$$

se obtiene aplicando la fórmula de Groenewold dos veces, teniendo en cuenta que z' y z'' son variables mudas. El resultado se escribe fácilmente con ayuda del operador

$$(\hat{\Delta}_{z', z''})^{[n]} := (\hat{\lambda}_{-z'})^{[n]} (\hat{\lambda}_{+z''})^{[n]} - (\hat{\lambda}_{+z'})^{[n]} (\hat{\lambda}_{-z''})^{[n]}. \quad (28)$$

De esta manera obtenemos

$$\mathcal{C}_-(q', p'; q'', p'') = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sum_{[n]} \frac{1}{[n!]} (\hat{\Delta}_{z', z''})^{[n]} \{A_-(q', p') B_-(q'', p'')\}. \quad (29)$$

Esta relación, en conjunto con (22), es el punto de partida para deducir la ecuación de Liouville para el símbolo $\rho_-(q, p, t)$ que representa el operador densidad.

5. ECUACIÓN DE LIOUVILLE PARA EL SÍMBOLO $\rho_-(q, p, t)$

La evolución temporal del estado de un sistema mecánico cuántico, caracterizado por un Hamiltoniano $\hat{H}(t) = \hat{T} + \hat{V}(t)$, está gobernada por la ecuación de Liouville (1). Para transformar esta ecuación en una ecuación de movimiento para la función de Husimi $\rho_-(q, p, t)$, aplicamos (29) para determinar los símbolos asociados con los conmutadores

$$-i\hbar \hat{\mathcal{H}}(t) := [\hat{T}, \hat{\rho}(t)], \quad -i\hbar \hat{V}(t) := [\hat{V}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (30)$$

5.1. Contribución de la energía cinética

Esta contribución está dada por

$$\mathcal{H}_-(q, p, t) = \sum_{k=1}^f \left[\frac{p_k}{m_k} \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{p_0^2}{2m_k} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial p_k} \right] \rho_-(q, p, t). \quad (31)$$

5.2. Contribución de la energía potencial

La escribimos como

$$\mathcal{V}_-(q, p, t) = \hat{J} \rho_-(q, p, t), \quad (32)$$

donde \hat{J} es un operador diferencial definido como una expansión en potencias de la constante de Planck,

$$\hat{J} := \frac{2}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\hbar\right)^n \hat{D}_n. \quad (33)$$

En esta expresión hemos introducido el operador

$$\hat{D}_n := \sum_{[n]} V_-^{[n]}(q) \hat{D}_{[n]}, \quad (34)$$

donde (escribiendo $\hat{\lambda}_{\pm}$ en lugar de $\hat{\lambda}_{\pm z}$)

$$\hat{D}_{[n]} := \frac{i}{2 [n!]} p_0^n \left[\hat{\lambda}_+^{[n]} - (-1)^n \hat{\lambda}_-^{[n]} \right], \quad (35)$$

$$V_-^{[n]}(q) = \frac{\partial^n}{\partial q_1^{n_1} \partial q_2^{n_2} \dots \partial q_f^{n_f}} V_-(q). \quad (36)$$

Es de observar que $\hat{D}_{[n]} \rho_-(q, p, t)$ es una función real, lo cual se verifica teniendo en cuenta que $\rho_-(q, p, t)$ es una función real, usando la identidad $\hat{\lambda}_{-z, k} = -\hat{\lambda}_{+z, k}^*$ y observando que

$$\hat{\lambda}_-^{[n]} \rho_-(q, p, t) = (-1)^n \left[\hat{\lambda}_+^{[n]} \rho_-(q, p, t) \right]^*.$$

5.3. Ecuación cuántica de Liouville

Como consecuencia, la ecuación de Liouville (1) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_-(q, p, t) = \hat{\mathcal{L}} \rho_-(q, p, t), \quad (37)$$

donde hemos introducido el *operador de Liouville generalizado* definido por

$$\hat{\mathcal{L}} := - \sum_{k=1}^f \left[\frac{p_k}{m_k} \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{p_0^2}{2 m_k} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial p_k} \right] - \hat{J}. \quad (38)$$

6. LÍMITE CLÁSICO DE LA ECUACIÓN DE LIOUVILLE

Para considerar el límite clásico de la ecuación de Liouville buscamos una expansión del operador de Liouville generalizado $\hat{\mathcal{L}}$ en potencias de $\hbar/2$,

$$\hat{\mathcal{L}} = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \hbar \right)^N \hat{\mathcal{L}}_N. \quad (39)$$

Para encontrar esta expansión regresamos a la ecuación (14c) para el símbolo $V_-(q)$, la cual por aplicación del teorema multinomial se puede escribir como

$$V_-(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \hbar \right)^k \left(\frac{1}{2} \tau_0 \right)^k \sum_{[k]} \frac{1}{[k!]} V^{(2[k])}(q), \quad (40a)$$

donde hemos definido $\tau_0 = q_0 / p_0 = 1 / (m_0 \omega_0)$ como una cantidad independiente de \hbar . De las relaciones anteriores obtenemos

$$V_{-}^{(n)}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \hbar\right)^k \left(\frac{1}{2} \tau_0\right)^k \sum_{[k]} \frac{1}{[k!]} V^{(n+2[k])}(q). \quad (40b)$$

Este resultado lo podemos substituir en (33)-(34), de tal manera que después del cambio de índices $N = n + k - 1$, obtenemos la expansión para el operador \hat{J} ,

$$\hat{J} = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \hbar\right)^N \hat{J}_N, \quad (41)$$

donde

$$\hat{J}_N = \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{2} \tau_0\right)^k \sum_{[k]} \frac{1}{[k!]} \sum_{[N+1-k]} V^{(N+1-k)+2[k]}(q) \hat{D}_{[N+1-k]}. \quad (42)$$

De acuerdo a (38) y teniendo en cuenta que $q_0^2 = \hbar \tau_0$ y $p_0^2 = \hbar / \tau_0$, deducimos que la energía cinética sólo contribuye en la expansión (39) con términos de orden \hbar^0 y \hbar^1 . Por esta razón, para escribir (38) en la forma (39), sólo necesitamos calcular los operadores \hat{J}_0 y \hat{J}_1 . Al hacer esto obtenemos

$$\left(\frac{1}{2} \hbar\right)^0 \hat{\mathcal{L}}_0 := \sum_{k=1}^f \left[\frac{\partial V}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{p_k}{m_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right], \quad (43a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \hbar\right)^1 \hat{\mathcal{L}}_1 := & - \sum_{k=1}^f \frac{p_0^2}{2 m_k} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial p_k} \\ & + \frac{q_0^2}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial p_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial q_j \partial q_k^2} \frac{\partial}{\partial p_k} \right], \end{aligned} \quad (43b)$$

$$\left(\frac{1}{2} \hbar\right)^N \hat{\mathcal{L}}_N := - \left(\frac{1}{2} \hbar\right)^N \hat{J}_N, \quad \text{si } N \geq 2. \quad (43c)$$

Como consecuencia de los resultados anteriores, cuando la constante de Planck tiende a cero ($\hbar \rightarrow 0$), la ecuación de Liouville (37) se convierte en la ecuación clásica de Liouville, ya que

$$\hat{\mathcal{L}}_0 \rho_{-}(q, p, t) = \sum_{k=1}^f \left[\frac{\partial V}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{p_k}{m_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right] \rho_{-}(q, p, t) = \left\{ H(q, p, t), \rho_{-}(q, p, t) \right\}$$

se transforma en el corchete de Poisson $\{ , \}$ entre el Hamiltoniano clásico y la función de Husimi.

7. OSCILADOR ARMONICO

En esta sección consideramos un oscilador armónico unidimensional con Hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2. \quad (44)$$

La ecuación de Liouville que satisface el símbolo de Wigner es dada por [7]

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(q, p, t) = \left[-\frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} + m \omega^2 q \frac{\partial}{\partial p} \right] \tilde{\rho}(q, p, t). \quad (45)$$

Ahora bien, de acuerdo a la definición del símbolo $\rho_-(q, p, t)$, esta cantidad está ligada con la función de Wigner por medio de la relación -ver (1.30) y (1.31)-,

$$\rho_-(q, p, t) = 2 \int \tilde{\rho}(q', p', t) \exp(-2|z - z'|^2) d\Gamma'. \quad (46)$$

La derivada $\partial \rho_-(q, p, t) / \partial t$ se puede determinar combinando (46) y (45) y usando la identidad (A.2) para realizar una integración por partes. Similarmente, de (46) podemos obtener las derivadas parciales de la función de Husimi. De esta manera, encontramos la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_-(q, p, t) &= \left[m \omega^2 q \frac{\partial}{\partial p} - \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} - \left(\frac{1}{2m} p \delta - \frac{1}{2} m \omega^2 q \delta \right) \frac{\partial^2}{\partial q \partial p} \right] \rho_-(q, p, t), \end{aligned} \quad (47)$$

la cual coincide con la ecuación de Liouville deducida en el presente artículo.

8. DISCUSION

La función de distribución de Husimi $\rho_-(q, p, t)$ es una cantidad mecánico cuántica que tiene un comportamiento análogo al de las funciones de distribución de la mecánica estadística clásica. En especial, satisface $0 \leq \rho_-(q, p, t) \leq 1$, de tal manera que se puede interpretar como una densidad de probabilidad conjunta para posición e impulso. Es interesante observar que la dependencia simultánea de posición e impulso no es inconsistente con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Cada punto del espacio de fase está asociado con un único estado coherente $|z\rangle$ y viceversa. Por lo tanto, la cantidad

$$P_q(q, t) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^f} \int dp \rho_-(q, p, t) \quad (48a)$$

representa la probabilidad de encontrar el sistema físico en el instante de tiempo t en un estado coherente $|z\rangle$, tal que el valor esperado de la posición es dado por $\langle z|\hat{q}|z\rangle = q$. En relación a los impulsos, la siguiente cantidad tiene un significado análogo:

$$P_p(p, t) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^f} \int dq \rho_-(q, p, t). \quad (48b)$$

El procedimiento utilizado en el presente artículo para derivar la ecuación de movimiento para la función de Husimi es una alternativa al método utilizado por Prugovecki [8] para el mismo fin.

APÉNDICE A

En este apéndice citamos algunas identidades utilizadas en el texto:

$$\int \exp\left(-a|z_k''|^2 + f z_k'' + g z_k''^*\right) d^2 z_k'' = \frac{\pi}{a} \exp\left(\frac{f g}{a}\right), \quad (A.1)$$

donde f y g son números complejos y a es un número real mayor que cero.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\{-[(x-y)/a]^2\} \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (x-y) \exp\{-[(x-y)/a]^2\} g(x) \quad (A.2)$$

9. REFERENCIAS

- [1]. Osborn, R.K., *Applied Quantum Mechanics*. 1988, Singapore: World Scientific.
- [2]. Blum, K., *Density Matrix Theory and Applications*. 1981, New York: Plenum.
- [3]. Ter Haar, D., *Theory and Applications of the Density Matrix*, in *Many-Body Problems*, W.E. Parry, et al., Editor. 1969, W. A. Benjamin: New York.
- [4]. Tolman, R.C., *The Principles of Statistical Mechanics*. 1967, New York: Oxford University Press.
- [5]. Campos, D., *Relación entre los formalismos de Weyl, Wigner y Husimi en la mecánica cuántica*. Momento, 1995. 9: p. 5.
- [6]. Balazs, N.L. and B.K. Jennings, *Wigner's Function and other Distribution Functions in Mock phase Spaces*. Phys. Rep., 1984. 104(6): p. 347.
- [7]. Takabayasi, T., Prog. Theor. Phys., 1954. 11: p. 341.
- [8]. Prugovecki, E., *Liouville Dynamics for Optimal Stochastic Phase-Space Representations of Quantum Mechanics*. Ann. Phys. (NY), 1978. 110, p. 102.